

DIFICULTADES EN LA COMPRESIÓN DE FUNCIONES ESCALARES Y VECTORIALES

Sara Alaniz- Gladys May- Cristina Cosci- Roberto Simunovich- Marcela Baracco
Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis
salaniz@fices.unsl.edu.ar - gcmay@fices.unsl.edu.ar - acosci@fices.unsl.edu.ar -
rsimunov@fices.unsl.edu.ar

Área temática: experiencia de cátedra

Palabras clave: funciones, dominio, derivada, comprensión

RESUMEN

El presente trabajo consiste en analizar cinco actividades, extraídas de una evaluación tomada a los alumnos de la asignatura Análisis Matemático II de Carreras de Ingeniería sobre el tema dominio de funciones escalares, y aplicaciones de derivadas de funciones vectoriales. Este diagnóstico es de tipo exploratorio y con el objetivo de mejorar nuestra práctica docente.

Las Matemáticas son una herramienta básicas para abordar las asignaturas del ciclo superior de la carrera. Por ello, los aprendizajes de los alumnos deben ser significativos, para poder lograr una buena comprensión de los contenidos que se abordan.

INTRODUCCIÓN

Somos docentes de la asignatura Análisis Matemático II de las carreras de Ingeniería, de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales de la Universidad Nacional de San Luis. Como docentes de las Carreras de Ingeniería, sabemos que Matemática es una herramienta importante, de ahí, nuestra preocupación por mejorar nuestra enseñanza, de modo que nos permita obtener una mejor comprensión de los contenidos por parte de los alumnos.

Se seleccionaron las actividades donde los alumnos presentaron mayores dificultades como son dominio de función escalar de dos variables y aplicaciones a la derivada de funciones vectoriales, todas ellas fueron extraídas de la primera evaluación de la asignatura Análisis Matemático II.

En lo que se refiere al tema funciones existen dificultades ligadas a la identificación de lo que es realmente una función de varias variables y también en relacionar los distintos registros semióticos (Duval 1995)

Si bien la representación gráfica, a criterio de los docentes y libros de textos, es la forma más intuitiva, comprensible y facilitadora para la comprensión del concepto, en el caso del concepto de dominio de una función de dos variables, parecería ser que a los alumnos no les resulta tan evidente su interpretación y cálculo en este registro.

Tomando como referencia los registros de representación semiótica (Duval, 1998), analizamos las actividades 1 y 2 realizadas por estudiantes de segundo año de las carreras de Ingeniería de la FICES sobre dominio de funciones dos variables. Observamos que existe un importante porcentaje de alumnos que si bien trabajan correctamente en forma algebraica, presentan dificultades cuando deben encontrar el dominio mediante la visualización gráfica y también se evidencia errores dada la grafica del dominio poder determinar las posibles funciones que la representa.

Respecto a las actividades 3, 4 y 5, se observa en los alumnos deficiencias de comprensión para utilizar propiedades de derivadas de funciones escalares y vectoriales, ya sea cuando las actividades están presentadas como demostraciones o como problemas de aplicación. Comprender el álgebra y análisis vectorial es necesario para establecer un modelo matemático correspondiente a un fenómeno físico que se describa mediante un campo escalar o vectorial.

Se intenta que las actividades propuestas a los alumnos no contengan solamente ejercicios rutinarios, para no desaprovechar la oportunidad de despertar en el estudiante interés. Se cree que, el planteamiento de problemas adecuados a los conocimientos de los alumnos y el estímulo a su resolución representa una buena oportunidad para que la Matemática adquiera sentido para el alumno, sobre todo, como herramienta en su futuro profesional.

FUNDAMENTACIÓN

Las propias acciones de la enseñanza, tanto de los procesos que se buscan desencadenar, deben ser consecuentes con las aspiraciones que se tienen para la enseñanza. Una práctica de enseñanza desencadena procesos de aprendizaje y éstos a su vez, dan lugar a determinados resultados en cada alumno, lo que determina el valor didáctico tanto de la enseñanza como de los procesos y de los resultados de aprendizaje, son las intencionalidades educativas en función de las cuales se emprende el proceso docente y no la eficiencia de cada paso para el siguiente.(Contreras,D.)

La Enseñanza actúa como mediador en el acceso de los alumnos al curriculum y la calidad de ese proceso mediador no es insignificante para la calidad del aprendizaje. Lo que hace de la enseñanza una práctica educativa, no es solo la manifestación en la misma práctica de ciertas cualidades que la constituyen como proceso educativo capaz de promover resultados educativos en términos del aprendizaje del alumno. Cuando se pretende mejorar la práctica, hay que considerar conjuntamente los procesos y los productos. Los procesos deben

tenerse en cuenta a la luz de la calidad de los resultados del aprendizaje y viceversa. Este tipo de reflexión simultánea sobre los procesos y los productos en circunstancias concretas constituyen una característica fundamental de lo que Shon (1983 y 1987) ha denominado práctica reflexiva y otros como Elliott John le denomina investigación- acción. El objetivo fundamental de la investigación-acción (Elliott 1993) consiste en mejorar la práctica en vez de generar conocimientos. La producción y utilización del conocimiento se subordina a este objetivo fundamental y está coordinado por él.

Comprender un tema es” *poder hacer una presentación flexible de él: explicarlo, justificarlo, extrapolarlo, relacionarlo y aplicarlo de manera que vaya más allá del conocimiento y la repetición rutinaria de habilidades. Comprender implica poder pensar y actuar flexiblemente utilizando lo que uno sabe*” (Perkins, D, 1998, pag.42).

La comprensión entendida como la capacidad de tener un desempeño flexible (Stone Wiske, M, 2006) abarca cuatro dimensiones:

1. El conocimiento de conceptos importante.
2. Métodos de razonamiento e indagación disciplinados.
3. Propósitos y limitaciones de las diferentes esferas de comprensión.
4. Formas de expresar la comprensión.

Teniendo en cuenta estas dimensiones, las características de la enseñanza particularmente efectiva para la comprensión deben contar con cuatro elementos, que también ayudan a los docentes a diseñar sus clases, formulando respuestas a las preguntas básicas.

Los elementos del marco de la Enseñanza para la Comprensión y sus rasgos, en la práctica sirven de orientación y recordatorios para los docentes que mientras proyectan sus proyectos de estudio, enseñan, evalúan y reflexionan sobre su propia práctica para descubrir formas de mejorarlas.

Las asignaturas Matemáticas en las carreras de Ingeniería, se estudian con el propósito de poder utilizarlas y/o aplicarlas en materias posteriores. En el caso de los alumnos de estas carreras, es necesario que adquieran las capacidades individuales para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Se hace necesario, entonces, diseñar su enseñanza no para la simple acumulación de conocimientos, sino que contribuya a construir formas de pensamiento en los que se aseguren relaciones entre el conocimiento y la aplicación. En tal sentido, resulta imprescindible realizar transformaciones en la enseñanza tradicional.

Pensamos que la estrategia de enseñanza es la resolución de problemas que es mucho más rica que la aplicación mecánica de un algoritmo, pues implica crear un contexto donde los datos guarden una cierta coherencia. Desde este análisis se han de establecer jerarquías: ver qué datos son prioritarios, rechazar los elementos distorsionadores, escoger las operaciones que los relacionan, estimar el rango de la respuesta, etc. Estas situaciones requieren de un pensamiento creativo para que los alumnos también aprendan matemática a través de la resolución de problemas.

Resolver problemas no rutinarios es caracterizado como una habilidad de nivel superior, a ser adquirida después de resolver problemas rutinarios. Y un último significado de resolver problemas es “hacer matemática.” Hay un punto de vista matemático acerca del rol de los problemas, que es creer, que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática consiste en problemas y soluciones.

Para la confección de las actividades propuestas 1 y 2, se ha tenido en cuenta la importancia de las conversiones entre registros de representación semiótica establecido por Duval (1998).

Este autor analiza y enfatiza la importancia de la “representación” en matemáticas. Dado que los conceptos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, establece que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación. Por ejemplo: una escritura, una notación, un símbolo, un punto, una gráfica, etc. representan un objeto matemático. Un registro está constituido por signos: símbolos, íconos, trazos, etc.. Es decir, son medios de expresión y representación semiótica. Solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos.

Este autor caracteriza un sistema semiótico es un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas:

- 1) La presencia de una representación identificable como una representación de un registro dado.
- 2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
- 3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial.

Considera asimismo, que la comprensión integral de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva.

DESARROLLO

De la primera evaluación parcial que se les tomo a los alumnos se seleccionaron las actividades en las cuales los alumnos demostraron mayor dificultad para resolverlas. Se analizan los errores que cometen, con el propósito de mejorar la comprensión de los contenidos involucrados, se analizaron 90 evaluaciones.

Actividad 1: Determine analítica y gráficamente el dominio de la siguiente función:

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}}{\ln(x^2 - y + 1)}$$

Análisis de las respuestas

	Porcentajes
Trabajan correctamente el numerador	30 %
Trabajan correctamente el denominador	35 %
Trabajan correctamente el cociente (intersección de las dos regiones)	20 %
Expresión en forma conjuntista o algebraica	32 %
Grafica correctamente la región del numerador	45 %
Grafica correctamente la región del denominador (sin considerar $x^2 - y + 1 \neq 1$)	35 %
Grafica correctamente la intersección de las dos regiones	20 %

Algunos alumnos determinan analíticamente el dominio pero no lo escriben en forma conjuntista.

Cuando analizan al numerador: $\sqrt{x^2 + 4y^2 - 4}$, el error más cometido fue considerar al integrando como un círculo de radio 2, otros tomaron radio 4, otro error fue, en lugar de tomar los puntos exteriores de la elipse de semiejes 2 y 1, consideran los puntos interiores, todavía presentan dificultad al trabajar con desigualdades. Algunos alumnos consideran los semiejes de la elipse 4 y 1, en lugar de 2 y 1. No es frecuente pero algunos alumnos seleccionaron la región $x^2 + 4y^2 - 4 > 0$, no tienen en cuenta que tiene que considerar también $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ por estar en el numerador.

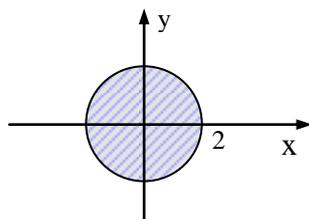
En cuanto al denominador: $\ln(x^2 - y + 1)$, también se encuentra con frecuencia que consideran mal el sentido de la desigualdad y la mayoría no tuvo en cuenta que por estar $\ln(x^2 - y + 1)$ en el denominador además $(x^2 - y + 1) > 0$ hay que considerar $(x^2 - y + 1) \neq 1$.

Otro error que cometen los alumnos es tomar una parábola con vértice en (0,0) y no (0,1). Algunos marcan los puntos interiores y los puntos de la parábola en lugar de todos los puntos exteriores a la parábola.

Un porcentaje de alumnos al tener mal la región del numerador o del denominador, la intersección de ambas regiones les queda incorrecta. Un 10% de los alumnos tienen bien las dos regiones pero no saben encontrar la intersección entre ellas.

En cuanto a la grafica de la región que representa el dominio de la función surge que los alumnos tienen menos dificultades en expresar el dominio de una función en forma algebraica que en forma gráfica. Algunos alumnos dibujan la elipse y la parábola pero no marcan ninguna región. Otro error que se comete es que al hacer la intersección de las regiones, no toman el símbolo “ \wedge ” como intersección de las regiones. Algunos alumnos dibujan las dos regiones pero no hacen la intersección que represente el dominio de esa función.

Actividad 2: Definir al menos una función cuyo dominio concuerde con la gráfica



Análisis de la actividad

	Porcentajes
Escriben correctamente una función	35 %
Escriben funciones que no corresponden al gráfico	65 %
No hacen la actividad	0 %

La actividad está expresada en el registro gráfico y el objetivo es determinar si los alumnos son capaces de encontrar expresiones algebraicas de funciones cuyo dominio corresponde a la región dibujada.

Este tipo de actividad es poco común que aparezca en los libros de textos y hay pocos en la guía de ejercicios prácticos de la asignatura. Nuestro objetivo es analizar si el alumno logra hacer satisfactoriamente esta conversión entre registros.

Dentro de los que contestaron bien, la mayoría eligen la expresión más sencilla como ser:

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

El error más cometido es que en lugar de escribir la función, escriben el dominio de la función es decir $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Otros escriben $\ln(4 - x^2 - y^2)$

Actividad N°3: Determine la torsión de la hélice circular $\mathbf{r}(t) = \cos 2t \mathbf{i} + \sin 2t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$.

Análisis de la actividad

	Porcentajes
Trabajan correctamente la actividad	60 %
Encuentran mal la derivada de $\mathbf{r}(t)$	25%
Encuentran mal la derivada del versor tangente	20 %
Utiliza incorrectamente las Fórmula de Frenet	27 %
No trabajan la actividad	0 %

Se observa que un 20 % de los alumnos, todavía no aplican correctamente las reglas de derivación o no las recuerdan, porque, cuando derivan cometen errores como $\mathbf{r}'(t) = -\sin 2t \mathbf{i} + \cos 2t \mathbf{j} + \mathbf{k}$, otros hacen desaparecer la derivada en la dirección de \mathbf{k} , $\mathbf{r}'(t) = -2\sin 2t \mathbf{i} + 2 \cos 2t \mathbf{j}$. Otro error que cometen es consideran la derivada del versor tangente como $\mathbf{t}'(t) = -\cos 2t \mathbf{i} - \sin 2t \mathbf{j}$. Algunos alumnos encuentra de forma incorrecta el modulo del vector $\mathbf{r}'(t)$, escriben $\mathbf{r}'(t) = -2\sin 2t \mathbf{i} + 2 \cos 2t \mathbf{j} + \mathbf{k}$, igual a 4. Y otros utilizan incorrectamente la segunda,

fórmula de Frenet, que les permite determinar la torsión $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n}$, determinan la torsión como el módulo del

vector $\frac{d\mathbf{b}}{dt}$, es decir confunden a la variable t con la longitud de arco de curva.

Actividad N° 4: Si un móvil recorre la trayectoria, con una velocidad dada por $\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt} \mathbf{t}$, donde s es la

longitud de arco de la curva y \mathbf{t} es el versor tangente. Determine el vector aceleración, dando las componentes, normal y tangencial del mismo.

Análisis de la actividad

	Porcentajes
Trabajan correctamente la actividad	5%
Derivan incorrectamente la derivada de una función escalar por una vectorial	50%
Intentan recordar desarrollos de memoria	25 %
Realizan correctamente la derivada de $\mathbf{v}(t)$, pero no determinan las componentes tangencial y normal	15%
No resuelven la actividad	40%

En esta actividad, el 50% de los alumnos cometen errores al derivar una función escalar por una vectorial, algunos de los errores que cometen son: multiplicar la derivada de $\frac{ds}{dt}$ con el vector \mathbf{t} , o multiplicar la $\frac{ds}{dt}$ con

la derivada del vector \mathbf{t} , multiplican la derivada de $\frac{ds}{dt}$ con la derivada del vector \mathbf{t} , es decir no utilizan

correctamente la regla del producto de la derivada de una función escalar por una vectorial.

A nuestro entender, intentan reproducir desarrollos de memoria, que quedándole operaciones sin sentido como ser multiplican numerador y denominador por el módulo de vector derivado del versor \mathbf{t} , o como el que se

muestra en el ejercicio escaneado $A(t) = -\frac{ds}{(dt)^2} \mathbf{T}$.

Handwritten student work on grid paper showing several incorrect derivations:

- Velocity: $v(t) = \frac{ds}{dt} \cdot \mathbf{t}$
- Acceleration: $A(t) = -\frac{ds}{(dt)^2} \cdot \mathbf{t}$ (circled in red with a red question mark)
- Acceleration: $A(t) = -\frac{dsd}{(dt)^2}$ (circled in red with a red question mark)
- Tangential: $\frac{v'(t)}{|v'(t)|} = \frac{-\frac{dsd}{(dt)^2}}{\sqrt{\frac{dsd^2}{(dt)^2}}} = \frac{-\frac{dsd}{(dt)^2}}{\frac{dsd}{(dt)^2}} = \boxed{-\frac{d^2sd^2}{(dt)^4}}$
- Normal: $\frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{-\frac{d^2sd}{(dt)^4}}{\sqrt{\frac{-d^2sd^2}{(dt)^4}}} = \frac{-\frac{d^2sd}{(dt)^4}}{-\frac{d^2sd}{(dt)^4}} = \boxed{\frac{d^4sd^4}{dT^8}}$

El 15 % de los alumnos determinan correctamente la derivada de $\mathbf{v}(t)$, pero no determinan las componentes tangencial y normal

Actividad 5: Sea $\mathbf{r}(t)$ es una curva, κ es la curvatura y s es la longitud de arco de curva. Demostrar, utilizando alguna de las fórmulas de Frenet:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \kappa \left[\frac{ds}{dt} \right]^3 \mathbf{b}$$

Análisis de la actividad

	Porcentajes
Trabajan correctamente la actividad	5%
Determinan mal la derivada de \mathbf{r} .	20%
Determinan incorrectamente la segunda derivada de \mathbf{r}	40%
No diferencian los vectores los vectores $\frac{d\mathbf{t}}{dt}$ y $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$	25%
Utilizan incorrectamente la segunda Fórmula de Frenet,	10%
Determinan incorrectamente el producto vectorial.	5%
No trabajan la actividad	20%

El 20 % de los alumnos se equivocan al derivar, entre los errores que cometen: realizan la primera derivada del vector \mathbf{r} como $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|\mathbf{t}$ con \mathbf{t} el versor tangente. Un mayor porcentaje de los estudiantes determinan bien la

primera derivada, pero la derivada segunda de \mathbf{r} , les da: $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \frac{d\mathbf{t}}{dt}$ con \mathbf{t} es el versor tangente, o

$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{t}}{dt} \mathbf{t}$. Pocos alumnos, utilizan incorrectamente la Fórmula de Frenet, $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}$, debido a que

sustituyen a $\frac{d\mathbf{t}}{dt}$ por $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$. Y el 5% de los alumnos encuentran correctamente la primera y la segunda derivada de \mathbf{r} , pero no así el producto vectorial.

CONCLUSIONES

- Del análisis efectuado sobre las tareas solicitadas concluimos que los alumnos deben aprender a realizar conversiones en distintos registros como una actividad necesaria, por lo que la coordinación entre dichos registros es de vital importancia para el desarrollo del pensamiento. Dado que, entre las habilidades matemáticas necesarias para resolver un problema, se combinan generalmente, tratamientos y conversiones, la diferenciación de registros de representación y la coordinación entre ellos son los puntos más importantes para el desarrollo del aprendizaje.
- Se observa que los alumnos intentan resolver actividades, que a nuestro juicio, utilizan conceptos más complejos que otros, ejemplo la actividad 3 y 5 son más complejas que la actividad 4, nos parece se debe a que en las guías de trabajos prácticos había actividades similares.
- En la actividad 4 el ver el ejercicio como problema se le presenta un obstáculo, ya que el conocimiento matemático es el mismo, sin embargo, no logran relacionar los conceptos teóricos con la aplicación en el campo de la ingeniería. Se trata de resolver un problema sencillo, ya que los conceptos que aquí se manejan no son nada nuevo, pero el objetivo fundamental de esta parte es la de fomentar la enseñanza de las matemáticas no tan solo desde la parte teórica, sino desde el punto de vista aplicativo.
- Las diferentes asignaturas Matemáticas en las carreras de Ingeniería, se estudian con el propósito de poder utilizarlas y/o aplicarlas en materias posteriores. En el caso de los alumnos de estas carreras, es necesario que adquieran las capacidades individuales para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones. Se hace necesario, entonces, diseñar su enseñanza no para la simple acumulación de conocimientos, sino que contribuya a construir formas de pensamiento en los que se aseguren relaciones entre el conocimiento y la aplicación. En tal sentido, resulta imprescindible realizar transformaciones en la enseñanza tradicional.
- La evaluación nos debe servir para reflexionar, hacer un control de calidad sobre lo que hacemos, analizar, tomar decisiones. Una de ellas, en el caso del aprendizaje, sería calificar al alumno pero no la única y a veces ni la más importante.
- Propuesta que se incremente en las guías de trabajos prácticos actividades con problemas y también demostraciones sencillas, a fin de que puedan perder el miedo a éste tipo de actividades y que les permita poner en juego los conceptos, para lograr una mayor comprensión de los mismos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Contreras D. J.(1994) *Enseñanza, Curriculum y profesorado*.(2ª ed.).Madrid, España: Ediciones Akal.
- *Documento curricular ciclo general de conocimientos básicos en carreras de ingeniería CGCB*. Red de Facultades de Ingeniería UNSL, UNSJ, UNC;UNLP, UNP, Año 2009
- Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.
- Gatica, N. Carranza, M., May G., Cosci C. (2002). El concepto de función en los libros de textos universitarios *XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. - Buenos Aires.
- Godino J. D. y Batanero, C. (1998). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *Actas del IX Seminario de Investigación en Educación Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática*. Guimaraes
- Jackson, P. (2002) *Práctica de la Enseñanza*, Buenos Aires: Editorial Amorrortu.
- Larson Hostetler Edwards(2006)- *Cálculo II-Volumén 2* -Editorial Mc Graw Hill
- Litwin, E. (1998) La evaluación como una explicación ecológica de la actividad en el aula. en *Evaluación Aportes para la Capacitación N°1*. Revista *Novedades Educativas* Edición N°90. Buenos Aires. Pág. 45 a 65.
- Litwin, E. (2008). *El oficio de Enseñar. Condiciones y Contextos* (1ª ed.) Buenos Aires: Editorial Paidós.
- Litwin, E.(2008) *La integración: una estrategia de enseñanza para favorecer mejores reflexiones en la enseñanza superior*. Artículo publicado en <http://www.litwin.com.ar/site/articulo1.asp>
- Smith Robert Minton(2005) - *Cálculo II* - México McGraw-Hill Interamericana Editores-