LA TEORÍA DE LIE PARA EDO's DE PRIMER ORDEN

Salvador Gigena[1, 2], José Sánchez[3] y Daniel Abud[3]
[1]Departamento de Matemáticas – Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario Avda. Pellegrini 250 – (CP 2000) Rosario. Argentina.
sgigena@fceia.unr.edu.ar
[2]Departamento de Matemática – Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba – Avenida Vélez Sarsfield 1611 (CP 5000) Córdoba. Argentina.
sgigena@efn.uncor.edu
[3]Departamento de Física – Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba – Avenida Vélez Sarsfield 1611 (CP 5000) Córdoba. Argentina.
daniel.abud@yahoo.com, joseasanchez@yahoo.com.ar

Área Temática: Aplicaciones de la Matemática
Palabras claves: Grupos de Lie – Soluciones exactas – generadores infinitesimales – factor integrante
Resumen: La enseñanza de las EDO's (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) de primer orden, en las carreras de Ingeniería, consiste esencialmente en un análisis que permita identificar si la ecuación pertenece a alguno de los tipos especiales que se han resuelto previamente. Por otra parte, la teoría de Lie, a través de grupos de transformaciones de Galois, ha servido para estudiar las soluciones de EDO's invariantes bajo algunas transformaciones uniparamétricas. Podrán ser ecuaciones a variables separables mediante cambios de coordenadas, o exactas mediante el uso de un factor integrante, determinando así un único fundamento matemático para obtener soluciones exactas. Este artículo expondrá el método del factor integrante de Lie.

Introducción

El criterio de enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, en los cursos de grado en carreras de Ingeniería de las universidades consiste, esencialmente, en un análisis que permita identificar si la ecuación pertenece a alguno de los tipos especiales que se han resuelto previamente, o que exista un cambio de variables que permita transformar la ecuación en otra que encuadre en alguno de esos tipos [2].

Las ecuaciones diferenciales de primer orden, especiales, que se enseñan son: a variables separables, homogéneas, lineales, exactas, de Bernoullí, entre otras, sin aparente relación entre sí. Sophus Lie (1842-1899) utilizó la teoría de grupos de transformaciones de Galois para estudiar las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Lie descubrió que las ecuaciones diferenciales eran invariantes bajo algunas transformaciones uniparamétricas. De esta manera, podían convertirse en ecuaciones a variables separables mediante cambios de coordenadas o en exactas mediante el uso de un factor integrante, determinando así un único fundamento matemático para obtener soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales lineales, homogéneas, exactas y de Bernoulli, entre otras.

Se expondrá, en este trabajo, la esencia de esa teoría y, en particular, el método del factor integrante de Lie, aplicándolo para obtener la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales de primer orden. Mediante el mismo se pretende divulgar, de manera elemental, la teoría de los grupos de Lie, de creciente importancia en distintos ámbitos investigación, como por ejemplo en la teoría del control [9].

Descripción del Método

Se establecerá un procedimiento que nos permita identificar cuáles son las transformaciones que mantienen invariante a una ecuación diferencial.

Criterio de invariancia [6]:

La EDO de primer orden

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

es invariante bajo las transformaciones uniparamétricas,

$$\begin{cases} x_1 = \phi(x, y; \varepsilon) \\ y_1 = \varphi(x, y; \varepsilon) \\ y_1' = \theta(x, y, y'; \varepsilon) \end{cases} \tag{2}$$

si, y sólo si,

$$f\left(x_1, y_1, y_1'\right) \equiv f\left(x, y, y'\right) \tag{3}$$

Aquí, y en lo que sigue, suponemos que las funciones son de clase C^{∞} en las variable x, y, y', etc., y analíticas con respecto al *parámetro* ε. Entonces, desarrollando la función $f\left(x_1, y_1, y_1'\right)$ en serie de Taylor, alrededor de $\varepsilon = 0$, obtenemos:

$$f(x_1, y_1, y_1') = f(x_1, y_1, y_1')\Big|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \frac{df}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2 f}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} + \ldots \qquad (4)$$

en donde,

$$\frac{df}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y_1'}\frac{\partial y_1'}{\partial \varepsilon}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}. \qquad (5)$$

si definimos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \dfrac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \xi(x, y) \\ \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \eta(x, y) \end{cases}, \qquad (6)$$

utilizamos los respectivos desarrollos en serie de Taylor, alrededor de $\varepsilon = 0$, y aplicamos la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas, podemos escribir:

$$\begin{cases} x_1(\varepsilon) = x + \varepsilon\, \xi(x, y) + O\left(\varepsilon^2\right) \\ y_1(\varepsilon) = y + \varepsilon\, \eta(x, y) + O\left(\varepsilon^2\right) \\ y_1'(\varepsilon) = y' + \varepsilon\, \zeta(x, y, y') + O\left(\varepsilon^2\right) \end{cases}. \qquad (7)$$

Esto nos permite obtener:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{dy_1}{dx_1} \\ &= \frac{dy_1}{dx}\frac{dx}{dx_1} \\ &= \frac{\dfrac{dy_1}{dx}}{\dfrac{dx_1}{dx}} \\ &= \frac{y' + \varepsilon\left(\eta_x + \eta_y y'\right) + O\left(\varepsilon^2\right)}{1 + \varepsilon\left(\xi_x + \xi_y y'\right) + O\left(\varepsilon^2\right)} \\ &= y' + \varepsilon\left[\eta_x + \left(\eta_y - \xi_x\right) y' - \xi_y y'^2\right] + O\left(\varepsilon^2\right). \end{aligned}$$

O sea, que

$$\frac{dy_1'}{d\varepsilon}\Bigg|_{\varepsilon=0} = \eta_x + \left(\eta_y - \xi_x\right) y' - \xi_y y'^2 = \zeta\left(x, y, y'\right). \qquad (8)$$

Reemplazando (6), (7) y (8) en (5) obtenemos:

$$\left.\frac{df}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\xi f_x+\eta f_y+\left(\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2\right)f_{y'} \tag{9}$$

Denominamos, luego

$$\zeta\left(x,y,y'\right):=\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2 \tag{10}$$

y, definiendo, el generador infinitesimal:

$$X:=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial y'}, \tag{11}$$

resulta

$$Xf\left(x,y,y'\right)=\xi f_x+\eta f_y+\left(\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2\right)f_{y'}. \tag{12}$$

Así, reemplazando en (4),

$$f\left(x_1,y_1,y_1'\right)=f\left(x,y,y'\right)+\varepsilon Xf+\frac{\varepsilon^2}{2}X^2f+... \tag{13}$$

obtenemos:

$$f\left(x_1,y_1,y_1'\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k X^k f}{k!}=e^{\varepsilon X}f\left(x,y,y'\right) \tag{14}$$

de la ecuación (13) se desprende que $Xf\equiv 0$ es una condición necesaria y suficiente para la invariancia de f bajo el grupo de transformaciones que permitió escribir la ecuación (2). Esto significa que debe cumplirse $\xi f_x+\eta f_y+\left(\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2\right)f_{y'}\equiv 0$ denominada ***condición de invariancia infinitesimal***, la cual, conjuntamente con la ecuación $f\left(x,y,y'\right)\equiv 0$, permite obtener ξ y η; y, como consecuencia, el generador infinitesimal X, el cual, a través de la serie de Taylor, conduce al grupo de transformaciones que deja invariante la ecuación diferencial.

No existe una manera sistemática de resolver las ecuaciones anteriores para cualquier EDO de primer orden, ya que su solución en todos los casos depende en mucho de la habilidad y la intuición. Una estrategia, por ejemplo, consiste en suponer nula una de las funciones y calcular la otra. En la actualidad existen varios programas que permiten simplificar el procedimiento; por ejemplo Hereman [8]. El grupo que mantiene invariante la ecuación diferencial transforma cualquier solución de la misma en otra solución de esa ecuación diferencial.

En la teoría de Lie se presupone que las funciones ξ y η son analíticas, o al menos de clase C^∞, y se equipa al conjunto de transformaciones (2) con una estructura de grupo mediante la operación de composición, bajo la cual resulta un ***Grupo de Lie***.

En este artículo sólo damos un enfoque básico, y práctico, de los grupos de Lie y no se pretende una definición formal y precisa de los mismos, para ello el lector interesado puede consultar [1] y [4].

Ejemplo Nº 1:

Consideremos como ejemplo la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{15}$$

entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned}
&f\left(x,y,y'\right)=y'+p(x)y-q(x)=0\\
&f_x=p'(x)y-q'(x)\\
&f_y=p(x)\\
&f_{y'}=1
\end{aligned}$$

Además, si $y' = q(x) - p(x)y$. Suponiendo $\xi = 0$ y reemplazando en la condición de invariancia infinitesimal, obtenemos: $\eta p(x) + \eta_x + \eta_y(q(x) - p(x)y) = 0$. Suponiendo además que η sólo depende de x, es decir $\eta_y \equiv 0$, obtenemos:

$$\eta p(x) + \eta_x = 0.$$

y, entonces,

$$\eta = e^{-\int p(x)dx}$$

En consecuencia, con las funciones $\xi = 0$ y $\eta = e^{-\int p(x)dx}$ se obtiene un generador infinitesimal X de esta ecuación diferencial. Varios autores (ver [3]) han desarrollado tablas en las que se relacionan diversas ecuaciones diferenciales de primer orden con generadores de grupos bajo las cuales dichas ecuaciones son invariantes. En estas tablas las ecuaciones aparecen en una forma general, en la cual quedan incluidas la mayoría de aquellas de las cuales se conoce solución.

El siguiente teorema brinda un modo explícito para relacionar la solución de una ecuación diferencial de primer orden, con las funciones ξ y η que permiten construir el generador de un grupo bajo el cual ésta es invariante.

Teorema del Factor Integrante de Lie

Supongamos que la ecuación diferencial sobre un dominio simplemente conexo,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (16)$$

admite un grupo uniparamétrico G, con funciones ξ y η del generador infinitesimal del grupo. Entonces, la función:

$$\mu(x,y) = \frac{1}{\xi M + \eta N} \qquad \text{con} \qquad \xi M + \eta N \neq 0 \qquad (17)$$

es un ***factor integrante*** de la ecuación diferencial dada. El teorema se demuestra exhibiendo que la condición de invariancia infinitesimal y la condición que debe cumplir una función $\mu(x,y)$ para ser un factor integrante de la ecuación diferencial son equivalentes. Desarrollando la ecuación de invariancia infinitesimal para la ecuación (16), obtenemos:

$$\xi f_x + \eta f_y + \left(\eta_x + \left(\eta_y - \xi_x\right)y' - \xi_y y'^2\right) f_{y'} = 0$$
$$f\left(x,y,y'\right) = M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

$$f_x = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} y'$$
$$f_y = \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y'$$
$$f_{y'} = N(x,y)$$
$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$$\xi\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial x} y'\right) + \eta\left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial y} y'\right) + \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\left(-\frac{M}{N}\right) - \frac{\partial \xi}{\partial y}\left(\frac{M}{N}\right)^2\right] N = 0$$

$$\left(\xi\frac{\partial M}{\partial x}+\eta\frac{\partial M}{\partial y}\right)N-\left(\xi\frac{\partial N}{\partial x}+\eta\frac{\partial N}{\partial y}\right)M+\frac{\partial\eta}{\partial x}N^2-\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)MN-\frac{\partial\xi}{\partial y}M^2=0 \quad (18)$$

Para que la función dada en (17) sea un factor integrante debe cumplir la condición:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \quad (19)$$

sustituyendo μ dado en (17) en la ecuación (19) obtenemos:

$$\mu^2\left[\eta\left(N\frac{\partial M}{\partial y}-M\frac{\partial N}{\partial y}\right)-\frac{\partial\xi}{\partial y}M^2-\frac{\partial\eta}{\partial y}MN\right]=$$

$$=\mu^2\left[\xi\left(M\frac{\partial N}{\partial x}-N\frac{\partial M}{\partial x}\right)-\frac{\partial\xi}{\partial x}MN-\frac{\partial\eta}{\partial x}N^2\right] \quad (20)$$

Reordenando la ecuación (20) vemos que coincide con la ecuación (18) y el teorema queda demostrado. Para la ecuación diferencial lineal de primer orden ya habíamos obtenido: $\xi=0$ y $\eta=e^{-\int p(x)dx}$. Reescribiendo $y'+p(x)y=q(x)$ en la forma $\left[p(x)y-q(x)\right]dx+dy=0$, podemos expresar que resulta $M(x,y)=p(x)y-q(x)$ y $N(x,y)=1$. Así, obtenemos el factor integrante que permite resolverla como exacta:

$$\mu(x,y)=\frac{1}{\xi M+\eta N}=\frac{1}{e^{-\int p(x)dx}}=e^{\int p(x)dx}.$$

Consideremos ahora la ecuación diferencial homogénea $y'=g\left(\frac{y}{x}\right)$. Reescribimos la ecuación en la forma $f\left(x,y,y'\right)=y'-g\left(\frac{y}{x}\right)=0$ y calculamos:

$$f_x=\frac{y}{x^2}g'\left(y/x\right)$$

$$f_y=\left(-\frac{1}{x}\right)g'\left(y/x\right)$$

$$f_{y'}=1$$

$$\xi f_x+\eta f_y+\left(\eta_x+\left(\eta_y-\xi_x\right)y'-\xi_y y'^2\right)f_{y'}=0$$

$$\xi\frac{y}{x^2}g'\left(y/x\right)+\eta\left(-\frac{1}{x}\right)g'\left(y/x\right)+\frac{\partial\eta}{\partial x}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)g\left(y/x\right)-\frac{\partial\xi}{\partial y}g\left(y/x\right)^2=0$$

Suponiendo, nuevamente, $\xi=0$ y efectuando los cálculos correspondientes obtenemos $\eta=-y+xg\left(\frac{y}{x}\right)$. Reescribiendo la ecuación diferencial en la forma $g\left(\frac{y}{x}\right)dx-dy=0$, obtenemos por otra parte que $M(x,y)=g\left(\frac{y}{x}\right)$, $N(x,y)=-1$, y podemos calcular el factor integrante para la ecuación diferencial homogénea:

$$\mu(x,y)=\frac{1}{\xi M+\eta N}=\frac{1}{y-xg\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Resolviendo la ecuación diferencial exacta que surge después de multiplicar la ecuación original por el factor integrante obtenemos:

$$\int\frac{1}{g(u)-u}du-\ln x=c \qquad \text{con} \qquad u=\frac{y}{x}$$

Para terminar daremos dos ejemplos más:

Ejemplo Nº 2:

Sea la ecuación diferencial $\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0$. La condición de invariancia infinitesimal es:

$$\eta_x+\frac{1}{2}\frac{\left(\eta_y-\xi_x\right)\left(x+y^2\right)}{xy}-\frac{1}{4}\frac{\xi_y\left(x+y^2\right)^2}{x^2y^2}-\xi\left(\frac{1}{2xy}-\frac{x+y^2}{2x^2y}\right)-\eta\left(\frac{1}{x}-\frac{x+y^2}{2xy^2}\right)=0$$

suponiendo $\eta=0$ obtenemos $\xi=\frac{x^2}{x+y^2}$ y el factor integrante de Lie es:

$$\mu=\frac{1}{\xi M+\eta N}=\frac{1}{\frac{x^2}{x+y^2}\left(x+y^2\right)}=\frac{1}{x^2}$$

La solución general de la ecuación diferencial exacta resultante es: $x=\mathrm{C}e^{\frac{y^2}{2}}$

Ejemplo Nº 3:

Supóngase la ecuación diferencial:

$$y'=\frac{y-x\left(x^2+y^2\right)}{x+y\left(x^2+y^2\right)}$$

que se puede expresar también en la forma:

$$\left[y-x\left(x^2+y^2\right)\right]dx-\left[x+y\left(x^2+y^2\right)\right]dy=0$$

Puede demostrarse que la ecuación diferencial es invariante bajo el grupo de Lie de transformaciones (rotaciones del plano euclidiano):

$$\begin{cases} x_1=x\cos\varepsilon-y\,\mathrm{sen}\ \varepsilon \\ y_1=x\,\mathrm{sen}\ \varepsilon+y\cos\varepsilon \end{cases}$$

luego, utilizando las ecuaciones (6), con $\xi=-y,\quad \eta=x$, el factor integrante de Lie es:

$$\mu(x,y)=\frac{1}{\xi M+\eta N}=-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

entonces, resolviendo la ecuación exacta resultante, se obtiene:

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=\mathrm{C}$$

La teoría de Lie permite también transformar una ecuación diferencial invariante bajo un grupo de transformaciones, en una ecuación a variables separables, utilizando las denominadas coordenadas canónicas, cuyo desarrollo dejamos para otra oportunidad.

Conclusiones y Recomendaciones

El método del factor integrante de Lie permite tratar con una única técnica la solución de la mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que se enseñan en los cursos regulares de grado, tanto lineales como no lineales.

Aunque la ecuación de invariancia infinitesimal habitualmente implica cálculos más complejos y extensos que los demás métodos de solución, tiene la ventaja de que puede aplicarse para obtener una solución exacta en aquellos problemas para los cuales no exista un método tradicional.

Debería considerarse la posibilidad de incorporar este método a los contenidos de los cursos regulares en ecuaciones diferenciales, incluyendo el auxilio de los programas computacionales ya desarrollados.

El criterio de invariancia infinitesimal bajo grupos de Lie se utiliza también para reducir el orden de una ecuación diferencial ordinaria, EDO; y para reducir el número de variables independientes en una ecuación diferencial en derivadas parciales: EDP, ver por ejemplo las referencias [5], [6], [7].

Referencias Bibliográficas

[1] Boothby, W. M., *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, San Diego: Academic Press, 1986.

[2] Gigena, S. et al, *Análisis Matemático II – Teoría, Práctica y Aplicaciones*, Ed.GALEON, ISBN Nº 987-9363-04-3, Córdoba. 1998.

[3] George, Emanuel, *Solution of Ordinary Differential Equations by Continuous Groups*, CHAPMAN and HALL/CRC, 2001.

[4] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and lie Groups*, New York: Springer Verlag, 1983.

[5] Olver, P. J, *Application of Lie Groups to Differential Equations*, Second Edition, Springer Verlag, 1993.

[6] Bluman, G. and Kumei, S., *Symmetries and Differential Equations*, Second Edition, Springer Verlag, 1989.

[7] Hydon, P. E., *Symmetry Methods for Differential Equations*, Cambridge University Press, 2000.

[8] Hereman, W, *Review of Symbolic Software for Lie Symmetric Analysis*, *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 25 (8/9), pp. 115-132, 1997.

[9] Kwatny, H. G., Blankenship, G. L., *Nonlinear Control and Analytical Mechanics*, Birkhäuser, 2000.