MATEMÁTICA PARA LA MECÁNICA

Silvia Inés Villarreal, Juan Carlos Serra
Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Rafaela. Argentina
silvivillarreal@yahoo.com.ar, jcserraar@yahoo.com.ar
Área temática: Experiencias de cátedra
Palabras clave: Matemática para la mecánica
Resumen: Este trabajo muestra un práctico de laboratorio de la cátedra Mecánica y Mecanismos de tercer año de la carrera Ingeniería Electromecánica de la UTN Fac.Reg.Rafaela. En el mismo utilizamos un dispositivo de oscilaciones de un móvil con un grado de libertad deslizando sobre colchón de aire. Se describen los fundamentos teóricos. Este ejemplo es la aplicación de las ecuaciones diferenciales a las oscilaciones mecánicas. Se utiliza un software colector de datos y graficador llamado Data Studio. Transcribimos los resultados obtenidos en la experiencia. Nos proponemos como objetivo mostrar la integración horizontal y vertical de asignaturas básicas de la carrera como así también su aplicación directa en el sistema mecánico de suspensión de los vehículos. Se enuncian las conclusiones de esta experiencia de cátedra.

Introducción

En la materia Mecánica y Mecanismos que se dicta en tercer año de Ingeniería Electromecánica se estudia el análisis de diferentes sistemas de masas puntuales y sólidos rígidos. El objetivo de la misma es comprender, desarrollar y aplicar diferentes herramientas físico matemáticas para encontrar las variables cinemáticas de los movimientos: desplazamiento, velocidad y aceleración.
Partiendo de los conceptos de Física I, materia de primer año de las Ingenierías, se desarrollan diferentes procedimientos para el análisis de movimientos complejos como son los movimientos curvilíneos.
Por esta circunstancia la Mecánica adopta el concepto del estudio de los movimientos instantáneos o sea el análisis punto a punto en cada instante de tiempo valiéndose del apoyo de la matemática, concretamente, de la materia Análisis Matemático II del segundo año de Ingeniería.
El ejemplo a desarrollar es la aplicación de las ecuaciones diferenciales a las oscilaciones mecánicas, es decir, el movimiento de un cuerpo con un solo grado de libertad, o sea, en una sola dirección.

Objetivo

Promover la integración horizontal y vertical de asignaturas de ciencias básicas y la asignatura Mecánica y Mecanismos de la carrera Ingeniería Electromecánica.
Recuperar los conocimientos de matemática para la resolución de oscilaciones mecánicas.
Vincular la experiencia del laboratorio con un ejemplo práctico de mecánica automotriz

Desarrollo

La mecánica analiza el movimiento de un cuerpo con un grado de libertad bajo el concepto de equilibrio dinámico que consiste en que la sumatoria de las fuerzas exteriores y de vínculos debe ser igual a la fuerza resultante o directriz que marca o rige el movimiento del mismo. Consideramos el siguiente sistema que es el utilizado para la experiencia objeto de este trabajo:

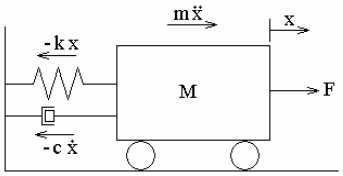


Gráfico 1

El cuerpo de masa *m* se desplaza sin rozamiento según la dirección del eje x.

El mismo está vinculado al sistema fijo a través de un resorte de constante elástica $k\left[\frac{N}{m}\right]$ y además por un elemento amortiguador de constante $C\left[\frac{N.s}{m}\right]$.

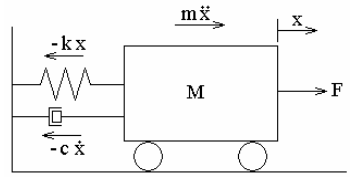
En estas condiciones si el móvil no se aparta de su condición de equilibrio nunca tendrá un movimiento resultante.
Pero en los sistemas mecánicos normalmente existen fuerzas excitadoras externas al sistema como las *F* mostradas en el gráfico 1 que hacen alejar de esta posición de equilibrio al móvil.
El resorte de constante *k* incluye en ella todas las consideraciones de diseño que tienen en cuenta la elasticidad del sistema. El resorte genera una fuerza restitutiva

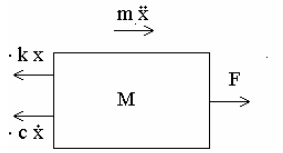
$F_r = -k.x$, *el signo menos es porque se opone al movimiento*

La constante *C* característica de los amortiguadores incluye en ella todas las consideraciones de diseño generando una fuerza restitutiva dependiente de la velocidad del móvil sobre el que actúa.

$F_a = -c.\dot{x} = -c.\frac{dx}{dt}$ *, el signo menos es porque se opone al movimiento*

Realizando el análisis de cuerpo libre de este sistema una vez que lo apartamos del equilibrio resulta:
Gráfico 2





DCL

Siendo:
Fuerzas externas: F

Fuerzas de vínculo: $Fr + Fa = -k.x - c.\dot{x}$

Fuerza resultante $FR = m.\ddot{x} = m.\dfrac{d^2x}{dt^2}$

DCL: Diagrama de cuerpo libre
De esta manera el equilibrio dinámico responde a la siguiente expresión

$$m.\ddot{x} = F - k.x - c.\dot{x}$$

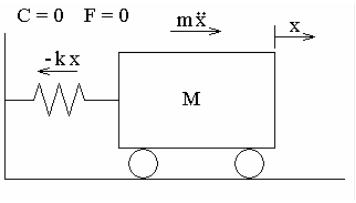
Por pasaje de términos

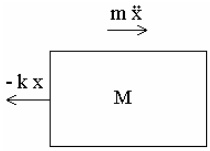
$$m.\ddot{x} + c.\dot{x} + k.x = F$$

Dividiendo por m ambos miembros de la igualdad:

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{c}{m}.\dot{x} + \frac{k}{m}.x = \frac{F}{m}}$$

Obtenemos así la ecuación general de oscilaciones de cuerpos con un grado de libertad
Como podemos ver es una ecuación diferencial del tipo que estudiamos en la materia Análisis Matemático II. El objetivo será encontrar la solución de la misma, es decir la variable x (desplazamiento) para todas las variantes posibles.
Esto es lo que llamamos OSCILACIONES DEL SISTEMA MECÁNICO, o sea, las perturbaciones o desplazamientos medidos sobre el eje x respecto a una posición de equilibrio que tomamos como referencia cero. Si el móvil se desplazara en la dirección del eje de de las y, ésta será la variable del sistema, utilizándose la misma ecuación.
De acuerdo a la forma que tome la fuerza externa F y la constante de amortiguamiento c se podrán presentar cuatro casos característicos de oscilaciones.
Caso 1: Oscilaciones Libres No Amortiguadas (**OLNA**)
Siendo $C = 0$ $F = 0$
Gráfico 3



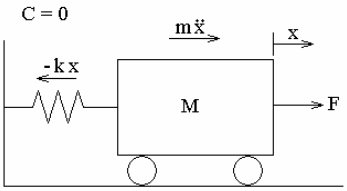


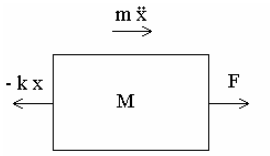
DCL

La ecuación característica de este sistema es

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}.x = 0}$$

Caso 2 : Oscilaciones Forzadas No Amortiguadas (**OFNA**)

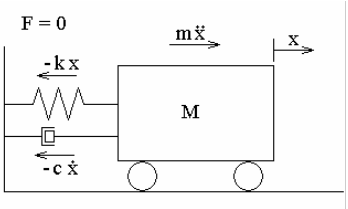


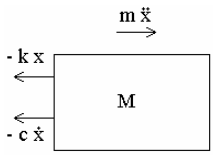


La ecuación característica de este sistema es:

$$\boxed{\ddot{x}+\frac{k}{m}.x=\frac{F}{m}}$$

Caso 3: Oscilaciones Libres Amortiguadas (**OLA**)
Siendo *F = 0*



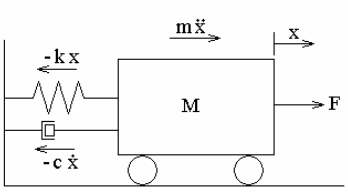


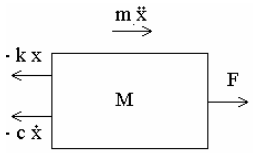
DCL

La ecuación característica de este sistema es:

$$\boxed{\ddot{x}+\frac{c}{m}.\dot{x}+\frac{k}{m}x=0}$$

Caso 4: Oscilaciones Forzadas Amortiguadas (**OFA**)
Caso general



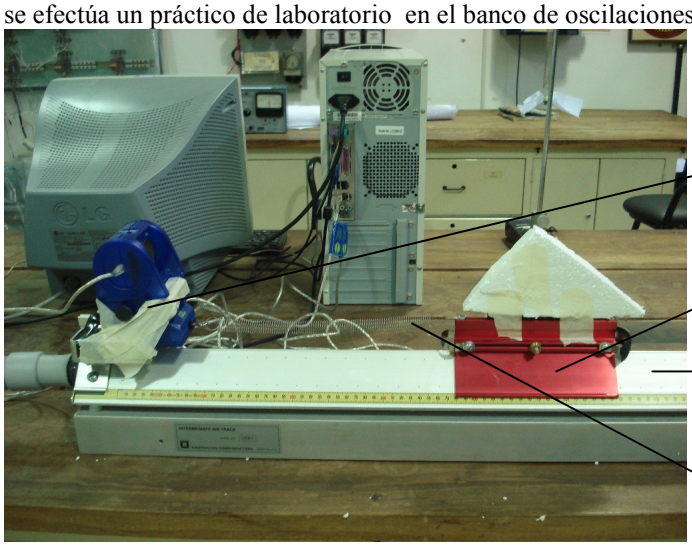


DCL

La ecuación característica de este sistema es:

$$\boxed{\ddot{x}+\frac{c}{m}.\dot{x}+\frac{k}{m}.x=\frac{F}{m}}$$

A los fines de realizar una simple simulación y comprensión de este tema en la cátedra Mecánica y Mecanismos se efectúa un práctico de laboratorio en el banco de oscilaciones que se muestra en las fotos 1, 2 ,3 y 4



Detector de desplazamiento

Móvil de estudio

Bancada de desplazamiento con colchón de aire

Resorte

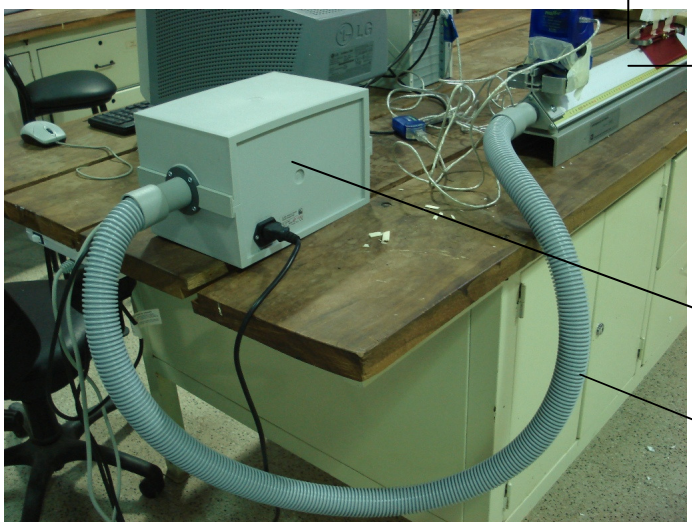
Foto Nº 1

Banco de oscilaciones

Foto Nº 2

Resorte

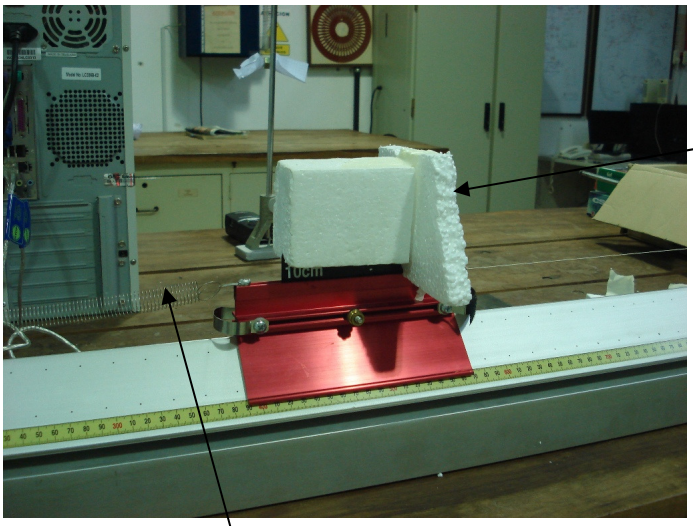
Banco de desplazamiento



Soplador generador de colchón de aire

Tubo conductor de aire

Foto Nº 3



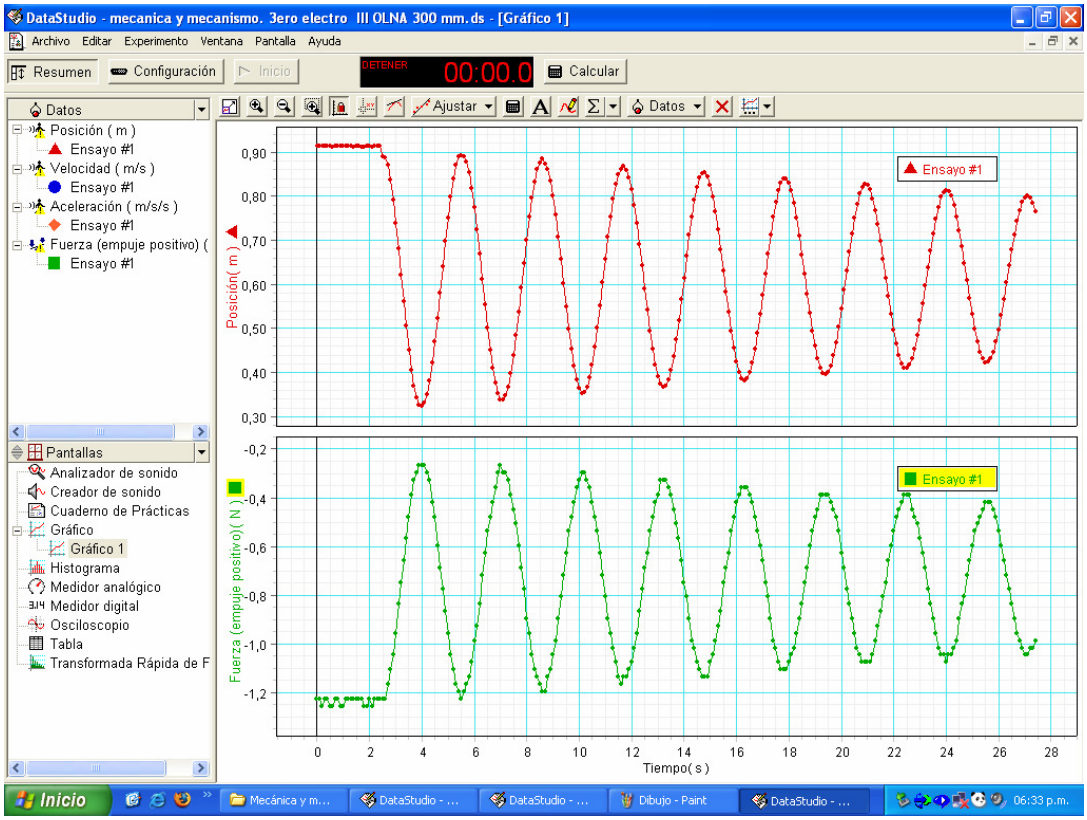
Pantalla de tergopol para incrementar el amortiguamiento (casos OLA y OFA)

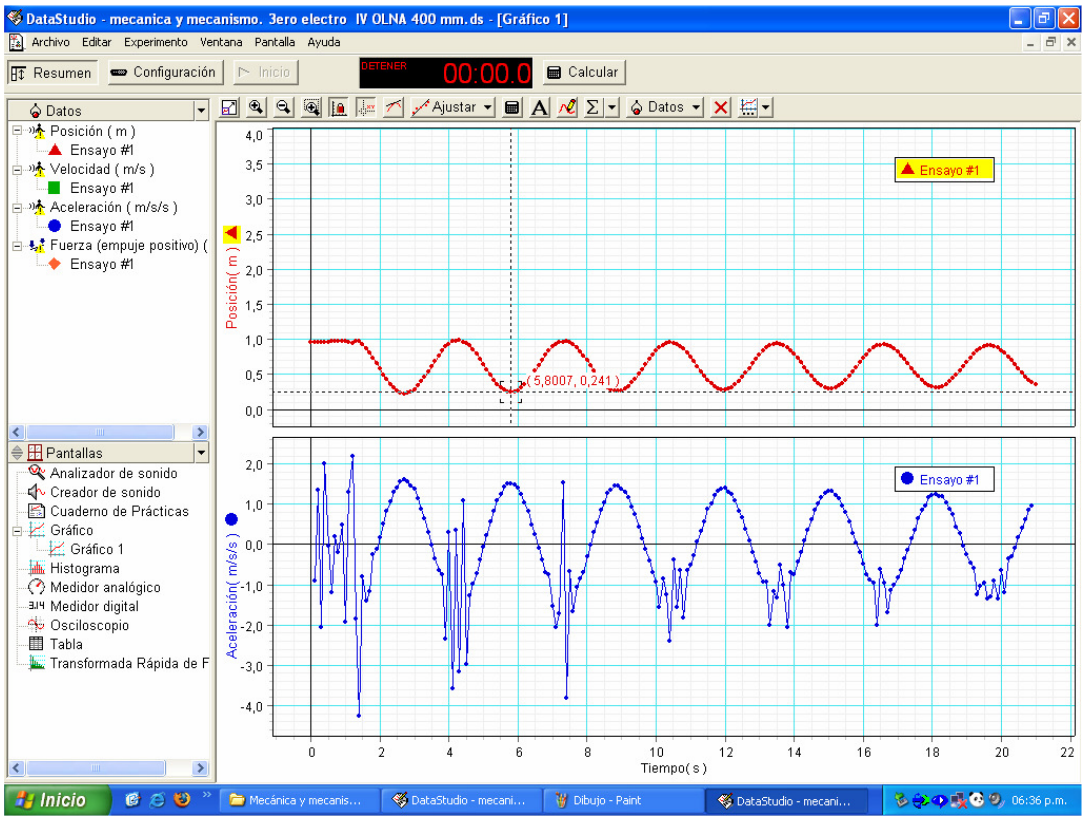
Resorte

Foto Nº 4

Los ensayos se realizaron separando al móvil a 300 mm y 400 mm del punto de equilibrio. Las gráficas obtenidas son las siguientes, discriminadas según el tipo de oscilación a estudiar. El software utilizado es el DATA STUDIO. Los gráficos obtenidos del mismo son la respuesta $x = f(t)$ en todos los casos (ofreciendo también la posibilidad de graficar $\dot{x} = f(t)$, $\ddot{x} = f(t)$ y $F = f(t)$ que no son parte de esta presentación)

<u>Caso 1: Oscilaciones libres no amortiguadas (OLNA):</u>



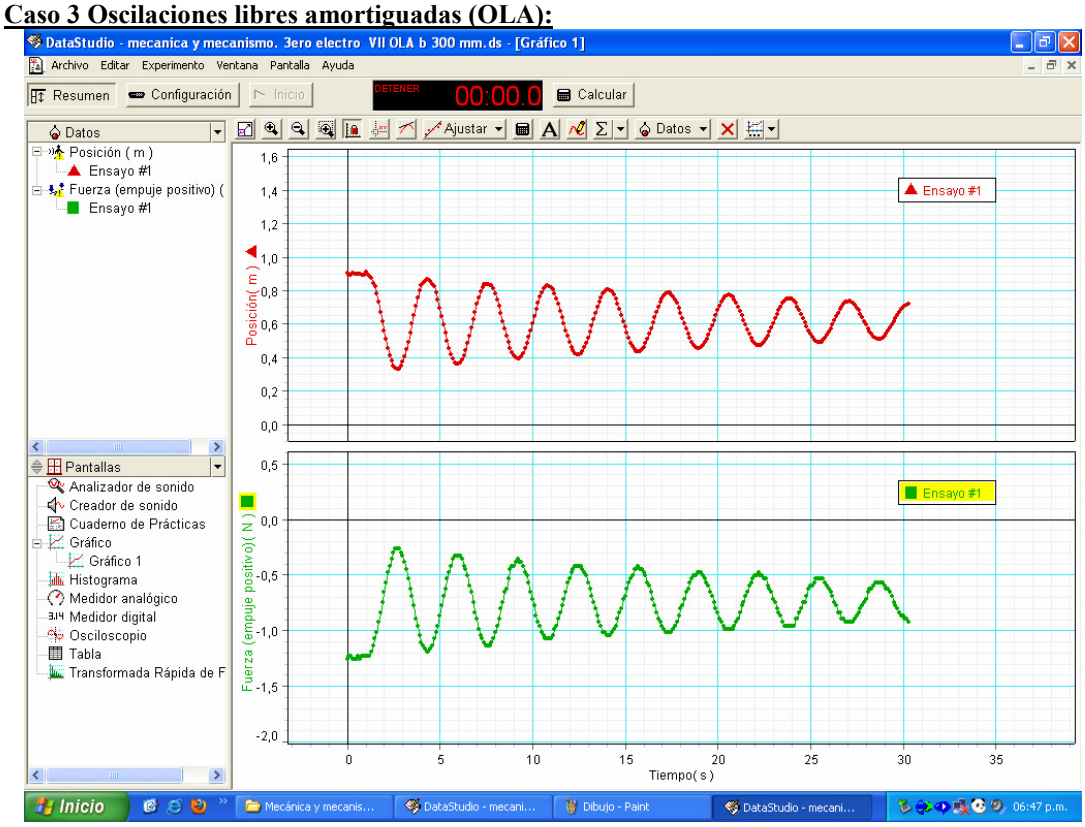


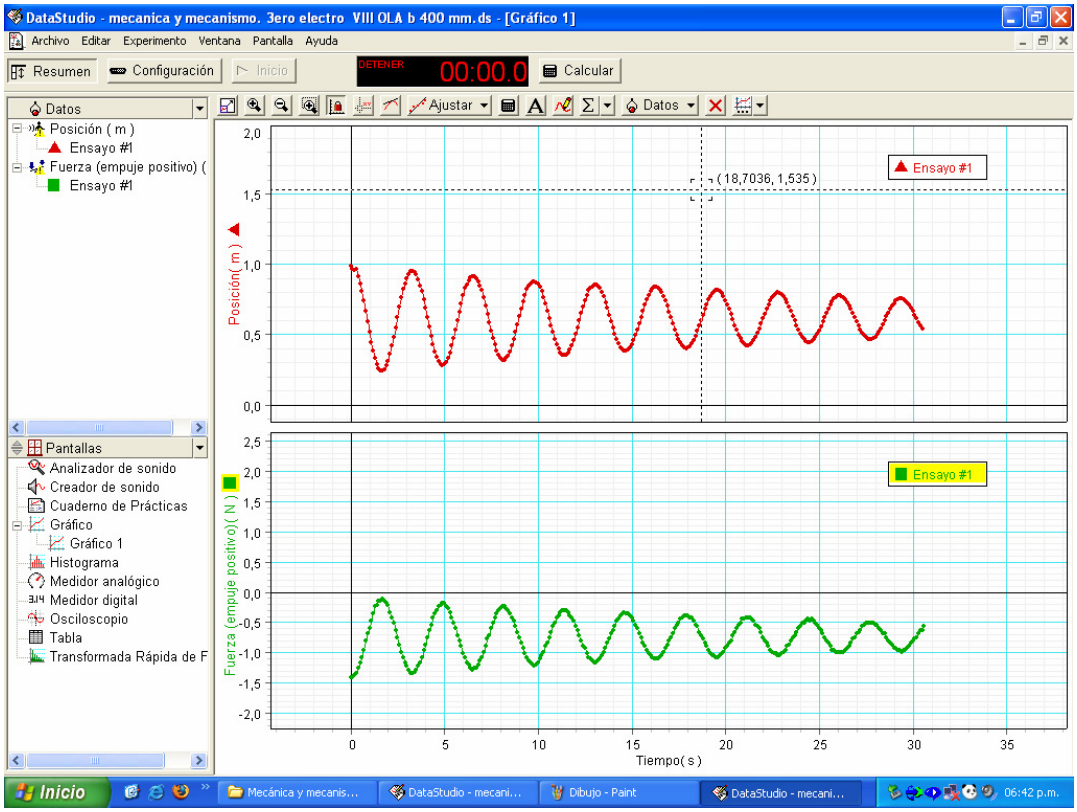
Se puede observar que las amplitudes de ambas oscilaciones son diferentes, siendo, mayor, en el ensayo realizado a 400 mm de distancia del punto de equilibrio.
También se puede observar en las amplitudes de cada oscilación, que las mismas van disminuyendo ligeramente a medida que transcurre el tiempo, debido a los rozamientos (con el aire y entre los componentes del sistema). Esto no debería ocurrir en un sistema ideal, ya que el mismo no es amortiguado, o sea, que las amplitudes deberían mantenerse constante en el tiempo.
Las frecuencias de ambas oscilaciones son iguales (ya que dependen solo de k)

Caso 2 Oscilaciones Forzadas No Amortiguadas (OFNA):

No se detallan en esta presentación debido a que no tienen gran diferencia de visualización respecto al caso 1.

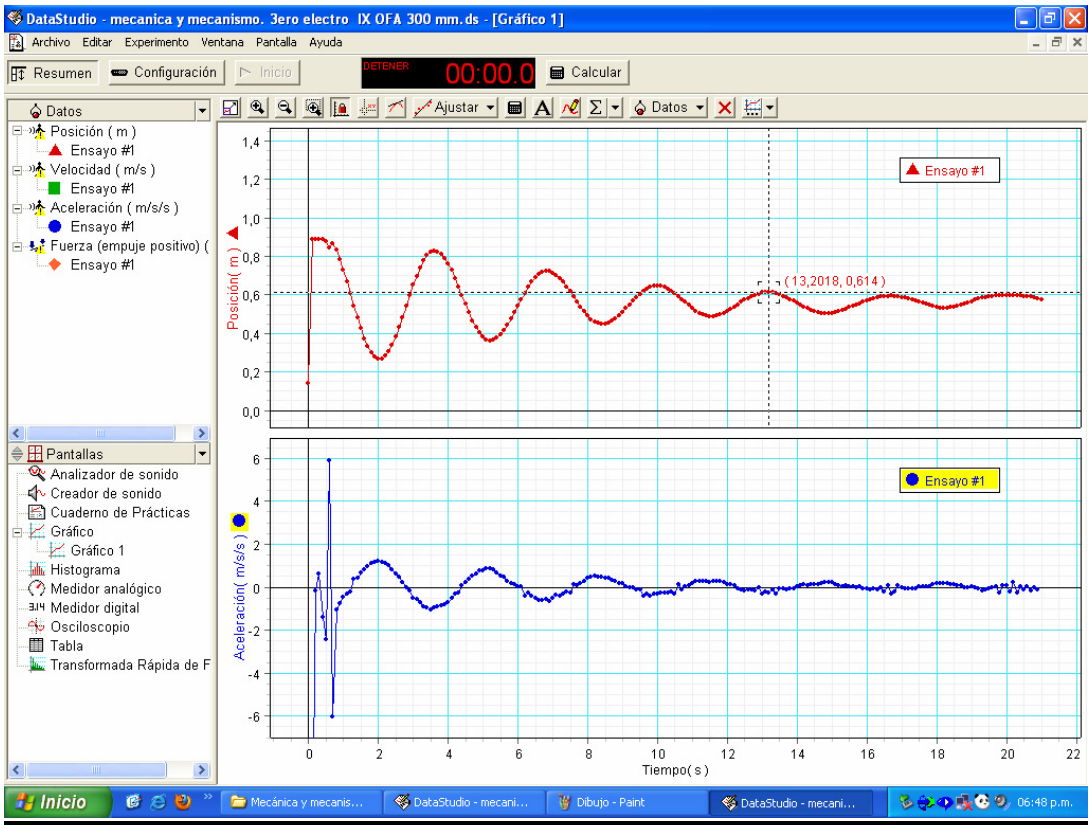
Caso 3 Oscilaciones libres amortiguadas (OLA):

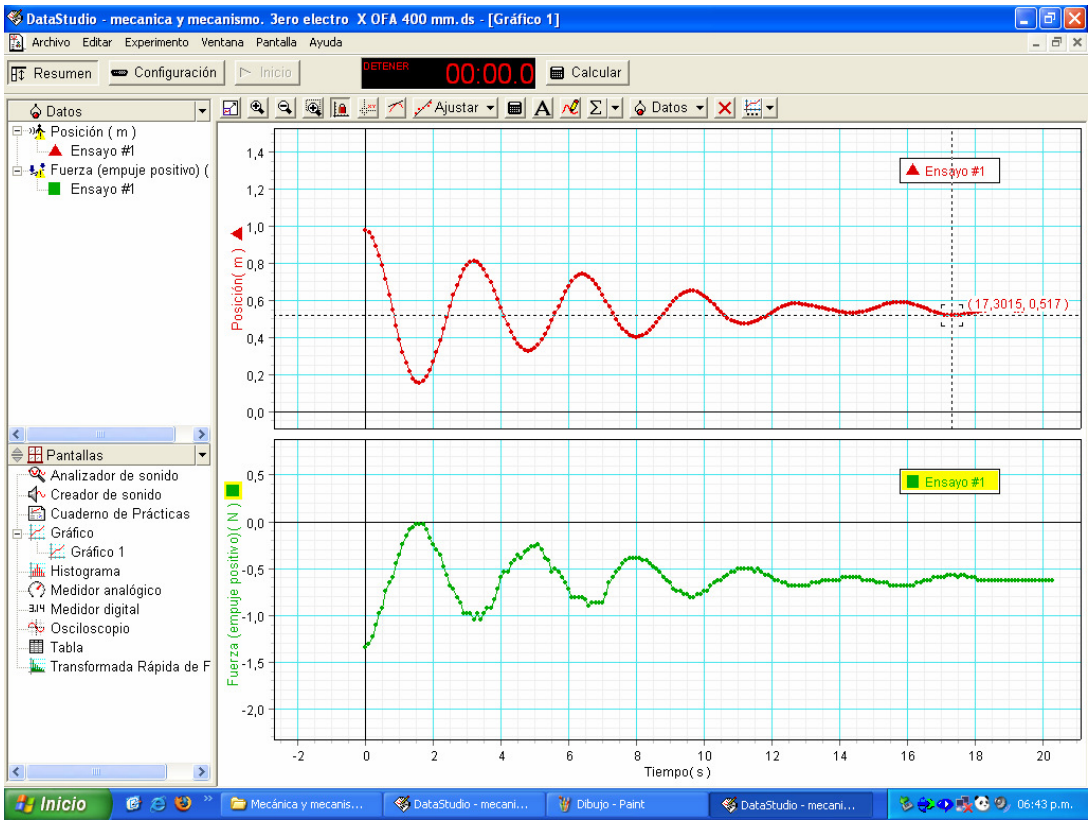




Las amplitudes del ensayo realizado a 400 mm, son mayores. En ambos casos, las amplitudes tienden a disminuir a medida que transcurre el tiempo. Esto es debido al amortiguamiento exterior adicionado al móvil (plancha de tergopol con su superficie transversal al desplazamiento del móvil). Ver foto Nº 4.
La diferencia observada entre las amplitudes de las OLNA y OLA, radica principalmente en que en la primera, la amplitud de la oscilación tenderá a ser constante en el tiempo, en cambio, en el segundo estudio, la misma disminuirá con cada período.
En cambio las frecuencias de las OLNA y OLA, son iguales.

<u>Caso 4- Oscilaciones forzadas amortiguadas (OFA):</u>





Manteniendo la misma configuración del caso 3 (OLA), adicionamos una fuerza excitadora externa (en este caso un ventilador con régimen constante, en una posición fija). Se considera como una fuerza constante.
Se puede determinar que : a) las frecuencias de los casos 1 , 3 y 4 , son similares , b)en el caso 4 en un período corto de tiempo, las amplitudes tienden a cero rápidamente, debido al exceso de amortiguamiento, c) con respecto a los casos 1 y 3 (OLNA y OLA), la amplitud de la oscilación del caso 4, se reduce mucho más rápidamente, en corto período de tiempo.

En la foto Nº 5 vemos un ejemplo de este caso: el sistema de suspensión Mc Pherson de los vehículos actuales que está constituido por la rueda (móvil de masa *m*); resorte y amortiguador característico del mismo.
Para este caso la fuerza excitadora externa *F* es la proveniente de las irregularidades del terreno por donde se desplaza la rueda. En la práctica lo que se desea es que ésta nunca deje de estar en contacto con el terreno para evitar la inestabilidad del vehículo y para ello se utiliza el sistema de suspensión "amortiguador- resorte".

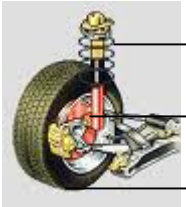


Foto Nº 5

Resultados
Se logra motivar en el alumnado el espíritu crítico, reflexivo y de investigación a través de un sencillo dispositivo de múltiples aplicaciones en sistemas mecánicos. De esta manera los alumnos relacionan los conceptos de ecuaciones diferenciales en aplicaciones de la mecánica concretamente por ejemplo en los sistemas de suspensión de los vehículos (como el sistema Mc Pherson presentado), consiguiéndose así los objetivos propuestos en la cátedra.
Esta experiencia de laboratorio obtiene la integración horizontal y vertical entre las cátedras de Física , Análisis Matemático II y Mecánica y Mecanismos de la carrera de Ingeniería Electromecánica.
Se observa un mayor interés en los alumnos utilizando esta metodología al integrar la teoría en el laboratorio y su aplicación en los sistemas mecánicos concretos.

Conclusiones
El alumno podrá visualizar variables cinemáticas del movimiento gracias a la utilización de elementos de medición y un software que los integra.
El alumno podrá relacionar la forma de las curvas de las variables cinemáticas con su ecuación matemática con la ayuda de las ecuaciones diferenciales.
El alumno podrá hacer variantes de constantes elásticas del resorte, constante de amortiguamiento para observar reacciones del sistema y las respuestas matemáticas correspondientes.
Matemáticamente se pueden introducir diferentes formatos de fuerzas excitadoras externas *F* (como por ejemplo componentes armónicas, funciones pulsantes, funciones diente de sierra, etc.) que son difíciles de obtener en la práctica de laboratorio pero que desde el punto de vista de la mecánica permiten al estudiante mejorar su visión sobre las excitaciones que aparecen en los mecanismos reales.

Bibliografía
Bedford A. y Fowler W (1996) *Mecánica para la ingeniería. Dinámica*.
Meriam, JL y Kraige,LG (2000) *Mecánica para ingenieros. Dinámica*