ANALISIS DE LA DINAMICA DE VACIADO DE UN RECIPIENTE INCLINADO

L.T.VILLA(*), N.A.ACOSTA
(*)Universidad Nacional de Salta – Facultad de Ingeniería. INIQUI-UNSa- CONICET. CIUNSa. Av. Bolivia Nº 5150 A 4402FDC Salta Argentina.
villal@unsa.edu.ar

Palabras Claves: vaciado recipientes. Dinámica vaciado

Resúmen

Cuando se aborda el análisis del desagote de ***recipientes inclinados*** en general, la cuestión sobre la obtención de la expresión de la superficie libre del liquido durante el vaciado se constituye en un problema de atractiva dificultad, que a juicio de los autores no se encuentra tratada en los textos de la bibliografía corriente al alcance. En tal sentido y tratándose de un proceso de particular interés práctico, en el trabajo se aborda la problemática para un recipiente cónico circular recto inclinado un ángulo θ respecto de la horizontal. Se obtienen las expresiones correspondientes a la superficie libre del líquido complementada con resultado numérico del tiempo de vaciado total

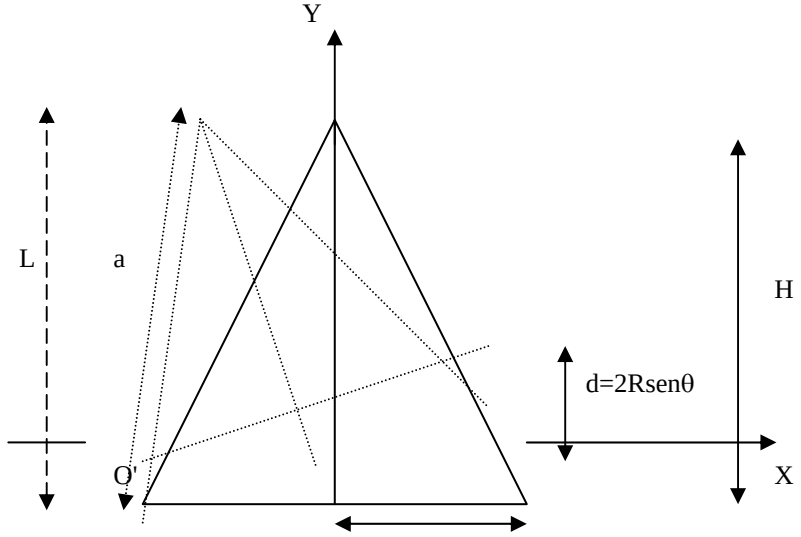
1- Introducción

Es conocido el hecho del vaciado de recipientes con ejes de simetría coincidentes o paralelos al eje coordenado de dirección vertical y, habida cuenta de la asunción de ciertas hipótesis restrictivas, se modela tal situación según un problema de valor inicial para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. En tal modelo, lo que en principio puede llevar algún trabajo es la obtención de la expresión de la super- ficie libre del líquido al irse evacuando por su punto más bajo. No obstante esta variante se puede considerar resuelta o cerrada desde el punto de vista de la formulación y resolución matemática (ver textos clásicos de ecuaciones diferenciales ordinarias).

En el presente trabajo se aborda la problemática de analizar la dinámica de vaciado de un recipiente inclinado respecto a su eje de simetría.

En tal sentido y tratándose de un proceso de particular interés práctico, se aborda la problemática para un recipiente cónico circular recto inclinado un ángulo θ respecto de la horizontal. Se obtienen las expresiones correspondientes a la superficie libre del líquido complementadas con resultado numérico del tiempo de vaciado total.

Consideremos un recipiente cónico de sección circular y que se ha inclinado un angulo θ , que permanecerá constante durante el proceso de vaciado, respecto de la horizontal, con un orificio de sección ***a*** en su parte más baja. Inicialmente el recipiente se encuentra lleno de agua y a partir de un instante dado comienza su vaciado por acción de la gravedad exclusivamente (en la parte superior se ha realizado un orificio para tal fin). (La situación precedente se ilustra esquemáticamente en la siguiente figura)



En el modelo dinámico del vaciado el nivel inicial del líquido en el cono inclinado será:

$$L=H\cos\theta + R\,\mathrm{sen}\theta$$

y el área de la superficie libre (obtenida de las secciones del cono al cortar con planos de la forma y=k, k:cte) será la encerrada por un elipse o sección de elipse, lo que nos obliga a partir el problema conforme a los distintos tipos de secciones. Esto puede observarse el la figura anterior.

Recordemos que el problema de vaciado de recipientes por gravedad está dado por

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -\beta \dfrac{\sqrt{y}}{A_0\,(y)}, \quad \beta : cte \\ y(t_0) = L \end{cases} \tag{1}$$

Conviene dividir la situación en tres etapas que llamaremos E_0, E_1 y E_2.

2. Desarrollo

<u>Etapa E_0</u>: En esta etapa consideramos la variación del nivel del líquido en el siguiente intervalo

$$2R\text{sen}\theta \leq y < L$$

y el problema de Cauchy a resolver será:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -\beta \dfrac{\sqrt{y}}{A_0\,(y)}, \quad \beta : cte, \quad 2R\text{sen}\,\theta \leq y < L \\ y(0) = H\cos\theta + R\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \tag{2}$$

Llamaremos $\mathbf{t_0}$ al tiempo correspondiente a la evolución de la Etapa E_0, que se obtiene de la ecuación $\mathbf{y(t_0)=2R\text{sen}\theta}$.

<u>Obtención de A_0</u> :

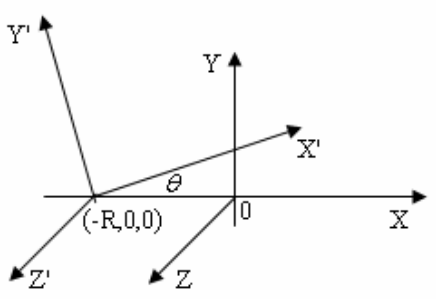
Es claro que en esta etapa la superficie descripta por el líquido en su descenso será la encerrada por una elipse una elipse cuya área se expresa de la forma

$$\mathbf{A_0\,(y)=\pi a(y)\,b(y)} \tag{3}$$

Donde

***a*(y)**: semieje mayor de la elipse en función de y ***b*(y)**: semieje menor de la elipse en función de y

Para **conseguir *a*(y)** vamos a considerar el sistema ortogonal X'Y'Z' que resulta de realizar al sistema XYZ una traslación al punto de coordenadas (-R,0,0) y luego rotarlo un ángulo θ respecto del plano XZ Tal aspecto se muestra en la figura adjunta



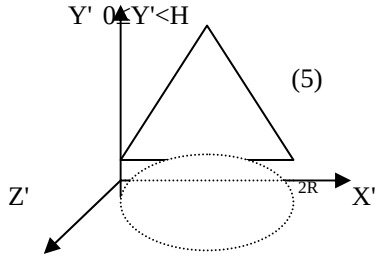
De este modo se puede establecer la transformación lineal entre vectores V y V' dada por

$$V' = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\mathrm{V} + \begin{bmatrix} \mathrm{R} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] \tag{4}$$

La ecuación del cono en el sistema X'Y'Z'es:

$$(x'-R)^2 + z'^2 = \frac{R^2}{H^2}(H - y')^2 \tag{5}$$

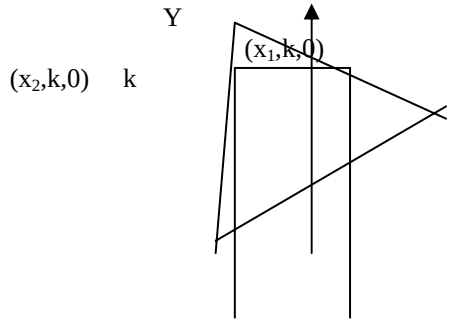
H



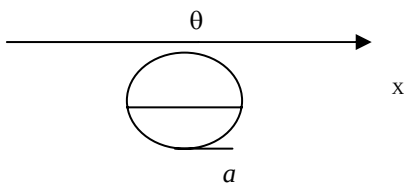
Empleando la transformación dada por (4) obtenemos la ecuación del cono en el sistema XYZ dada por:

$$\left((x+R)\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta - R\right)^2 + z^2 = \frac{R^2}{H^2}\left(H + (x+R)\,\text{sen}\,\theta - y\cos\theta\right)^2 \tag{6}$$

Ahora bien, si en esta útlima ecuación hacemos y=k=cte y z=0 obtenemos una ecuación de segundo grado en x, cuyas raíces $x_{1,2}$ nos permitirán obtener el semieje mayor *a* de la siguiente manera:



$$a(k) = \left| \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \tag{7}$$



Así que la ecuación que nos proveerá $x_{1,2}$ es:

$$\left((x+R)\cos\theta + k\,\mathrm{sen}\,\theta - R\right)^2 = \frac{R^2}{H^2}\left(H + (x+R)\,\mathrm{sen}\,\theta - k\cos\theta\right)^2 \tag{8}$$

Llamando u=x+R en (8) determinamos $u_{1,2}$ y de aquí x_2-x_1 queda expresada en término del discriminante Δ(k). Es decir, la expresión de la cual se obtendrá *a*(k) es finalmente

$$a(k) = \left| \frac{\sqrt{\Delta(k)}}{2a} \right| \tag{9}$$

Las cuentas para obtener Δ(k) no se detallan en el presente trabajo ya que son un poco extensas y no presentan mayores dificultades. Se arriba a la siguiente expresión:

$$a(k) = \frac{HR\,|k - L|}{L(H\cos\theta - R\,\mathrm{sen}\,\theta)} \tag{10}$$

y como 2Rsenθ ≤ k < L, podemos expresar

$$a(y) = \frac{HR\,|y - L|}{L(H\cos\theta - R\,\mathrm{sen}\,\theta)} \quad \text{con } 2R\mathrm{sen}\theta \le y < L \tag{11}$$

Para obtener *b*(y) procedemos en forma similar a la anterior: si en la ecuación (6) hacemos x = x_c = $(x_1+x_2)/2$ e y=k obtenemos una ecuación de segundo grado en z.
Además x_c satisface

$$x_C = -\frac{B}{2A} - R \tag{12}$$

donde A y B son los coeficientes de los término cuadrático y lineal respectivamente en la ecuación (8). Reemplazando A y B obtenemos para x_c

$$x_C(k) = \frac{-k\,\mathrm{sen}\,2\theta\left(1 + \frac{R^2}{H^2}\right) + \frac{2RL}{H}}{\frac{2L}{H^2}\left(H\cos\theta - R\,\mathrm{sen}\theta\right)} - R \tag{13}$$

Haciendo estos reemplazos en (6) tenemos la siguiente ecuación en Z :

$$\left[\frac{\left(-k\,\mathrm{sen}\,2\theta\left(1 + \frac{R^2}{H^2}\right) + \frac{2RL}{H}\right)}{\frac{2L}{H^2}\left(H\cos\theta - R\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}\cos\theta + k\,\mathrm{sen}\,\theta - R\right]^2 + z^2 =$$

$$= \frac{R^2}{H^2}\left[H + \frac{\left(-k\,\mathrm{sen}\,2\theta\left(1 + \frac{R^2}{H^2}\right) + 2\frac{RL}{H}\right)}{\frac{2L}{H^2}\left(H\cos\theta - R\,sen\,\theta\right)}\mathrm{sen}\,\theta - k\cos\theta\right]^2 \tag{14}$$

Con las raíces de esta última ecuación, que llamaremos $z_{1,2}$, expresamos el semieje menor de la siguiente forma:

$$b(k)=|z_1|=|z_2| \tag{15}$$

Ahora bien, como k puede ser cualquier valorcomprendido entre 2Rsenθ y L, podemos expresar las raíces $z_{1,2}$ en términos de *y*. Llamando

$$\alpha(y)=\left[\frac{\left(-y\,\text{sen}\,2\theta\left(1+\frac{R^2}{H^2}\right)+\frac{2RL}{H}\right)}{\frac{2L}{H^2}\left(H\cos\theta-R\,\text{sen}\,\theta\right)}\cos\theta+y\,\text{sen}\,\theta-R\right] \tag{16}$$

$$\beta(y)=\frac{R}{H}\left[H+\frac{\left(-y\,\text{sen}\,2\theta\left(1+\frac{R^2}{H^2}\right)+2\frac{RL}{H}\right)}{\frac{2L}{H^2}\left(H\cos\theta-R\,sen\,\theta\right)}\text{sen}\,\theta-y\cos\theta\right] \tag{17}$$

las raíces $Z_{1,2}$ y *b* ,en términos de y, se obtienen de la siguiente expresión:

$$b(y)=\left|z_1(y)\right|=\left|z_2(y)\right|=\sqrt{\left|\beta^2(y)-\alpha^2(y)\right|} \tag{18}$$

Así que $\boldsymbol{A_0(y)}$, definida por (3),se puede expresar empleando las expresiones (11) y (18). Con esto el problema de obtener de la primera etapa $\boldsymbol{A_0(y)}$ estaría resuelto y por consiguiente en condiciones de poder abordar el ***problema de valor inicial definido por (2)***.

Etapa E_1: La variación del nivel del líquido que corresponde a este período está dada por

$$k^*\leq y\leq 2R\text{sen}\theta \tag{19}$$

con el valor de *k** a determinar y el problema de Cauchy a resolver será:

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=-\beta\dfrac{\sqrt{y}}{A_1(y)}, & \beta:cte,\quad k^*\leq y\leq 2R\,\text{sen}\,\theta\\ y(0)=2R\,\text{sen}\,\theta\end{cases} \tag{20}$$

Llamaremos $\mathbf{t_1}$ al tiempo correspondiente a la evolución de la Etapa E_1, que se obtiene de la ecuación $\mathbf{y(t_1)=k^*}$.

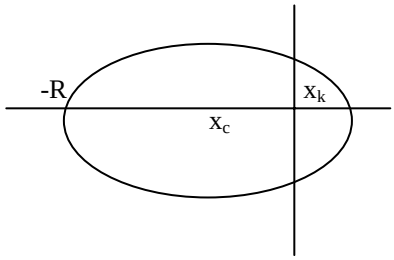
Para obtener *k** notemos que cuando x_c , dada por (13), intersecte a la recta de ecuación

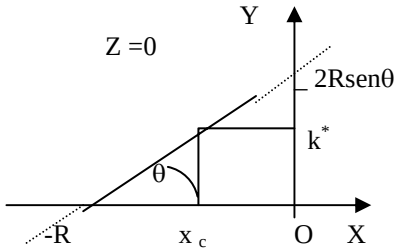
$$y=\text{tg}\,\theta\,(x+R) \tag{21}$$

contenida en el plano definido por Z=0, esta coordenada deberá satisfacer:

$$\text{tg}\,\theta=\frac{k^*}{x_c(k^*)+R} \tag{22}$$

y de esta última ecuación se puede despejar *k**. Una interpretación de lo anterior puede observarse en las siguientes figuras:





Obtención de A_1:

En este nuevo intervalo para y , el (k^*, 2Rsenθ), la superficie libre del líquido es una sección de elipse comprendida entre los puntos (-R,0,0) y (x_k,0,0). La coordenada x_k se obtiene dando el valor y=k en la recta indicada por (21), resultando:

$$x_k = \frac{k}{\operatorname{tg}\theta} - R \tag{23}$$

Con x=x_k e y =k en la ecuación dada por (6) obtenemos una ecuación de segundo grado en z cuyas raíces , $z_1(k)$ ó $z_2(k)$,nos permitirán calcular el área de la sección de elipse desde -R a x_k , en ladirección indicada por el eje X. La expresión para A_1(y) está dada por :

$$A_1(y) = a(y)b(y)\left(\pi - \arccos\left(\frac{z_1(y)}{a(y)}\right)\right) + z_1(y)x_k, \quad k^* \le y \le 2r\operatorname{sen}\theta \tag{24}$$

Así ya tendríamos para trabajar con el PVI dado por (20).

Etapa E_2: En este último tramo tenemos que el nivel del líquido correspondiente variará de la siguiente forma:

$$0 \le y \le k^* \tag{25}$$

y el problema de Cauchy a resolver será:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -\beta \dfrac{\sqrt{y}}{A_2(y)}, \quad \beta : cte, \quad 0 \le y \le k^* \\ y(0) = k^* \end{cases} \tag{26}$$

t_2 nos indicará el tiempo de vaciado que corresponde a esta última sección. Dicho valor se obtiene de la ecuación **$y(t_2)=0$.**

Obtención de A_2:

Procediendo en forma similar que con A_1, ya que A_2 es también una sección de elipse, pero teniendo en cuenta que $x_k \le x_c$ la expresión para $A_2(y)$ es de la forma:

$$A_2(y) = a(y)b(y)\arccos\left(\frac{z_1(y)}{a(y)}\right) - z_1(y)x_k, \quad 0 \le y \le k^* \tag{27}$$

Con esta última expresión tenemos formalmente resuelto el problema, ya que logramos tener concretamente planteadas las tres etapas para obtener el ***tiempo total de vaciado*** que será:

$$T = t_0 + t_1 + t_2 \tag{28}$$

3. Resultados

Ejemplo: Consideremos un cono circular recto cuyas dimensiones son las siguientes:

H=2mt, R=0.80mt, θ=π/6, g≅10mt/seg^2, c=1. Dicho recipiente, inicialmente lleno de agua, comienza a vaciarse por acción de la gravedad, por un orificio en su parte más baja cuya área es de 0.0025 dm^2.

Apelando a un oportuno software, procesamos las tres etapas; E_0, E_1 y E_2 y se obtiene un tiempo de vaciado ***T*** del orden de 261 seg.

4. Conclusiones

Se ha logrado modelar mediante una sucesión oportuna de Problemas de Valor Inicial para una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, el proceso de vaciado por gravedad de un cono circular recto inclinado un cierto ángulo respecto de su eje de simetría.

El problema matemático descriptivo del proceso se resolvió aplicando un software comercial de reconocida eficiencia (SIMNON 1966) para un caso concreto estimando el valor resultante para el correspondiente tiempo de vaciado

Referencias Bibliograficas

[1] EDWARDS C.H., PENNEY E., Elementary Differential Equations with Applications, Ed Prentice Hall, 1985.

[2] WYLIE C. RAY, Matemática Superior para Ingeniería, De Mc Graw Hill, 1986.

[3] VILLA L.T., MOYA M., TIRADO G; Análisis de la Dinámica de Vaciado de Recipientes Inclinados (Cilindro Inclinado), Revista FAMAF, Univ Nac de Córdoba, Nº28/95