# CONTROL ESTADÍSTICO DE PROCESO – APLICACIÓN

**Diana Raquel KOHAN** [(1)] **y Silvia Inés PADRÓ** [(1) (2)]
Universidad Nacional de Entre Ríos y Universidad Adventista del Plata – Argentina
dikohan@santafe-conicet.gov.ar y sipadro@gmail.com
Área Temática: Aplicaciones de la Matemática
**Palabras claves:** CEP, gráficos de control, tolerancia.

**Resumen**

Esta comunicación está orientada al ***control estadístico de procesos*** **(CEP)** aplicado en una planta potabilizadora y envasadora de agua de la ciudad de Paraná. Con el propósito de vincular dos asignaturas de la carrera de Bioingeniería de la UNER: Probabilidad y Estadística y Gestión de Calidad se plantea una aplicación de la Estadística al control de los procesos productivos, actividad presente en la mayoría de las empresas, quienes cuentan con un número cada vez mayor de servicios especializados en tal control. El CEP permitirá a los encargados del control, entender y vigilar la variación en los procesos mediante gráficas de control. Además los límites de tolerancia les indicarán entre qué valores puede hallarse cierta proporción de la población en estudio.

## 1. Introducción

Una planta potabilizadora y envasadora de agua de la ciudad de Paraná: *Agua Nuestra*, se encontraba interesada en evaluar dos aspectos relacionados con el proceso de envasado en bidones de 20 litros. Uno de los aspectos fue determinar si la cantidad de agua envasada condice con los 20 litros que ofrecen. El otro, corresponde al número de fallas que presentan los bidones plásticos que compran a un proveedor externo.

***El proceso de envasado*** puede ser descrito brevemente de la siguiente forma: inicialmente el agua es enviada por una bomba a una serie de filtros para luego llegar a la máquina envasadora. En esta máquina ingresa el bidón vacío a través de una cinta transportadora, pasa por el proceso de lavado, enjuague y esterilizado, de allí al de llenado que está programado de tal forma que en un tiempo determinado se envase opcionalmente 20 o 12 litros, y por último pasa al proceso de tapado en forma hermética con tapas plásticas. Un empleado lo retira de la cinta, sella la tapa, lo fecha y etiqueta en forma manual.

El circuito eléctrico fue diseñado por un ingeniero quién calibró la máquina para lograr el fin deseado.

Uno de los dueños de la planta, quien se encuentra relacionado directamente con esta área, nos explicó que la máquina tiene la posibilidad de envasar 100 bidones por hora. Ellos han comprobado que a simple vista el nivel de agua de los bidones va disminuyendo. Por esta razón, y en base a la experiencia han decidido envasar 10 bidones y dejar pasar el tiempo correspondiente a uno de ellos, y comenzar nuevamente con el proceso.

Esta disminución en la cantidad de agua puede ser provocada por dos motivos. Uno de ellos es que la bomba va disminuyendo el caudal de entrada hasta que se recupera y envía nuevamente el caudal deseado. El otro motivo posible es que los filtros se encuentren sucios y por lo tanto provocan una disminución en el caudal que sale de los mismos. Esta última razón ha sido descartada porque ya se ha determinado el tiempo de duración de los filtros y son cambiados regularmente. Igualmente son controlados periódicamente cerca de la fecha de reposición.

Nuestra tarea fue determinar si la metodología empleada permite tener ***el proceso de envasado*** bajo control y establecer los límites de tolerancia para la cantidad de agua envasada por bidón.

Con respecto a las fallas de los bidones, como los mismos no son producidos por la empresa, sino que se compran a un proveedor externo, no se puede realizar un control de proceso, pero si establecer los límites de tolerancia dentro de los cuales podemos admitir seguir realizando las compras a dicho proveedor, teniendo en cuenta el número de defectos que el mismo reconoce a la empresa. Esta tarea no fue incorporada dentro de este trabajo.

## 2. Fundamentación

En un proceso productivo podemos afirmar que es poco probable encontrar dos productos exactamente iguales. Las diferencias que estos presentan se deben a que dicho proceso incluye numerosas fuentes de variación aún cuando se desarrolla en forma rutinaria.

Estas variaciones no pueden ser eliminadas en forma completa, pero sí puede analizarse las causas que las producen con el objeto de minimizarlas. Dichas causas pueden clasificarse en dos categorías: *causas comunes o aleatorias* en donde la variabilidad se debe a fuentes de variación poco importantes e incontrolables, y *causas asignables* no aleatorias, como errores del operador o indicadores de mal ajustado en una máquina, lo cual podría indicar que la máquina debe ser reparada.

Los objetivos del ***control estadístico de procesos*** **(CEP)**, son determinar y eliminar las variaciones no aleatorias a medida que éstas surgen mientras se está llevando a cabo el proceso.

Es vital que los fabricantes vigilen la calidad del producto que elaboran. Cuando se habla de la calidad de los productos nos referimos a que posean cierto conjunto de características. Este proceso de inspección de

[(1)] Fac. de Ingeniería – Universidad Nacional de Entre Ríos
[(2)] Fac. de Ciencias Económicas y de la Administración – Universidad Adventista del Plata

calidad combina la inspección precoz con el control estadístico de proceso. De esta forma se detectan los productos que no cumplen con los estándares deseados y se intenta modificar el proceso a fin de reducir o eliminar estas variaciones en caso de existir alguna irregularidad.

Entre los métodos del CEP que se utilizan a tal fin se encuentran las *gráficas de control* y los *límites de tolerancia*.

**Gráficas de Control**

Las *gráficas de control* pueden ser por variables y por atributos. Entiéndase por *variables* a aquellas características del producto que son medibles, como por ejemplo su vida útil, su peso, su longitud, etc. Mientras que los *atributos* se refieren a la clasificación del producto en una de dos categorías posibles: defectuoso-bueno, aceptable-no aceptable, etc., o bien cuando se cuentan la cantidad de defectos por pieza o número de fallas en una muestra.

Como mencionamos anteriormente, es normal que un proceso de producción experimente cierta variabilidad natural debida a causas aleatorias. En dicho caso, se dice que el proceso se encuentra *en control*. Si, en cambio, las causas de la variabilidad fuesen asignables, el proceso se dice *fuera de control.*

Durante el lapso de tiempo en el cual el proceso funciona en estado de control, genera un producto aceptable. Aún operando en este estado, puede percibirse cierto desplazamiento gradual o repentino que requiere detección.

Las gráficas de control son los mecanismos mediante los cuales determinamos si el proceso de encuentra bajo control o no.

Las mismas se obtienen graficando periódicamente las mediciones de cierta característica de calidad sobre el tiempo. En *k* momentos diferentes se seleccionan muestras de tamaño *n,* por lo general pequeños, de entre 4 y 6 productos y se representan los promedios arrojados en cada una de ellas. El número de muestras tomadas preferentemente es mayor o igual a 20.

Las gráficas de control presentan formas similares a la siguiente:

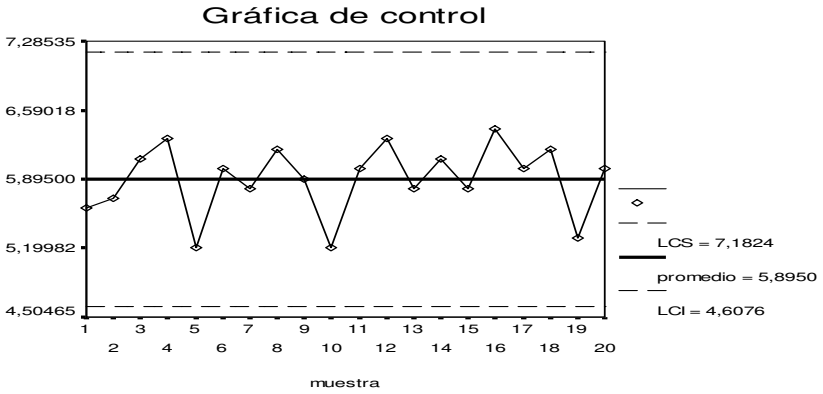



**Gráfico 1**

La línea central representa el valor medio de la característica considerada que, generalmente, el es el objetivo que se desea alcanzar. Los límites de control inferior (LCI) y superior (LCS) son dos líneas horizontales, una por debajo y otra por encima del valor medio considerado, que usualmente están a una distancia de tres desvíos respecto del valor medio. Estos límites se eligen de modo tal que cualquier punto muestral que quede entre ellos debe corresponderse con un valor de la característica considerada aceptable, y por lo tanto el proceso se encuentra bajo control.

Si uno o más puntos caen fuera de estos límites puede considerarse que hay evidencia de que el proceso está fuera de control e indica la necesidad de buscar la causa de dicho desplazamiento.

Veamos una gráfica que represente un proceso fuera de control:

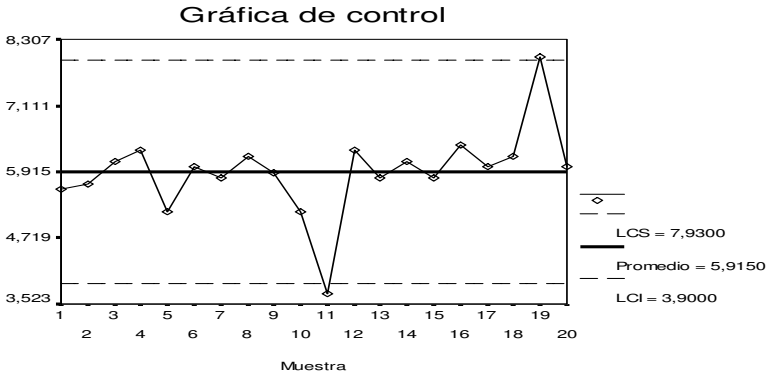



**Gráfico 2**

No sólo el caer fuera de los límites nos lleva a dicha búsqueda, sino que cuando se percibe un patrón no aleatorio de puntos consecutivos todos por encima o todos por debajo de la media, resulta sospechoso y sugiere una investigación al respecto.

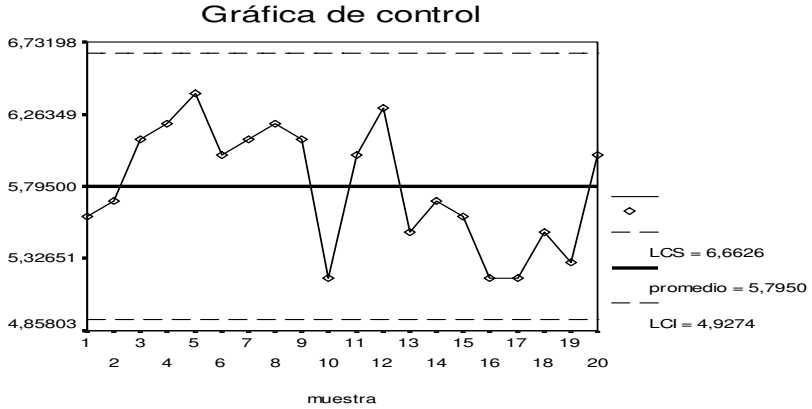



**Gráfico 3**

Como puede observarse el gráfico 3 revela una cierta tendencia en los valores de la característica que se está estudiando a lo largo del tiempo. Los valores de la muestra se encuentran dentro de los límites de control, sin embargo la tendencia puede indicar la presencia de una o más causas de variación asignables. Por ejemplo, es posible que la verdadera media del proceso se haya desplazado levemente a consecuencia del desgaste de una máquina, por ejemplo.

**Límites de Tolerancia**

Toda etapa del control de calidad conlleva el problema de comparar alguna característica del producto terminado con determinadas especificaciones.

Además de la información acerca de un parámetro, quien lleva a cabo el control de calidad desea con frecuencia establecer un intervalo que contenga determinada proporción de mediciones, en lo posible alta, con probabilidad conocida. Este intervalo se llama *intervalo de tolerancia* y sus extremos *límites de tolerancia.*

Destaquemos que las especificaciones son establecidas por el consumidor o el ingeniero de diseño correspondiente, de tal manera que cualquier desviación apreciable hará que el producto sea considerado falto con respecto a dicha característica evaluada. Por lo tanto, aún cuando el proceso sea estable y esté bajo control, si la variabilidad natural actual del proceso es mayor que la dictada por la especificación, el proceso frecuentemente producirá artículos que no cumplan "las especificaciones". Lo importante es producir el artículo en tal forma que una parte aceptablemente alta de la cantidad producida esté dentro de los límites de tolerancia especificados por la norma de calidad determinada.

Si el producto se fabricara sin especificaciones previas, los límites de tolerancia ***"naturales"*** son establecidos por el mismo proceso, como los límites dentro de los cuales puede mantenerse una característica de calidad en una porción considerablemente alta.

Evidentemente existe una diferencia esencial entre los límites de tolerancia y los límites de confianza. Mientras éstos últimos se emplean en la estimación de un parámetro de la población, los límites de tolerancia de los cuales hablamos, indican entre qué límites puede encontrarse cierta proporción de la población.

En la práctica, se trabaja con estimaciones tanto de la media como de la desviación estándar de la población.

Suponiendo que la población de mediciones es aproximadamente normal podemos construir un intervalo de tolerancia $100(1-\alpha)\%$ para $100(\gamma)\%$ de las mediciones de calidad de un producto lo que significa que es un intervalo que incluye el $100(\gamma)\%$ de las mediciones con un coeficiente de confianza de $(1-\alpha)$ de la siguiente manera:

$$\overline{x} \pm K.s$$

Donde

$\overline{x}$ es el contenido promedio de los bidones de una muestra de *n* mediciones

*s* es la desviación estándar de dicha muestra

y *K* se obtiene de la tabla correspondiente con base en los valores del coeficiente de confianza $(1-\alpha)$, $\gamma$ y el tamaño de la muestra $n$.

**3. Desarrollo y Resultados**

Al diagramar nuestra metodología de trabajo, tuvimos en cuenta el proceso tal cual se ha descrito antes.

Para determinar la cantidad de agua envasada en cada bidón, pesamos los mismos antes de que ingresen en la cinta y al salir de la misma terminado el proceso. De esta forma, sabiendo que un litro de agua pesa un kilogramo, descartado el peso del bidón vacío, determinamos la cantidad de agua envasada en cada uno.

Este procedimiento lo llevamos a cabo muestreando cuatro bidones en veinte días del proceso de envasado. Los datos, en kilogramos, se presentan en la siguiente tabla:

| Día | Peso de bidones "llenos" | | | | Día | Peso de bidones "llenos" | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 21,4 | 21,3 | 21,2 | 21,2 | 11 | 21,5 | 21,3 | 21,2 | 21,4 |
| 2 | 21,4 | 21,5 | 21,3 | 21,1 | 12 | 21,2 | 21,3 | 21,4 | 21,4 |
| 3 | 21,4 | 21,2 | 21,1 | 21,2 | 13 | 21,4 | 21,5 | 21,3 | 21,1 |
| 4 | 21,2 | 21,2 | 21,3 | 21,4 | 14 | 21,3 | 21,3 | 21,2 | 21,4 |
| 5 | 21,2 | 21,3 | 21,4 | 21,4 | 15 | 21,4 | 21,5 | 21,3 | 21,1 |
| 6 | 21,2 | 21,2 | 21,1 | 21,4 | 16 | 21,2 | 21,1 | 21,4 | 21,3 |
| 7 | 21,2 | 21,2 | 21,3 | 21,4 | 17 | 21,2 | 21,3 | 21,4 | 21,4 |
| 8 | 21,3 | 21,5 | 21,1 | 21,2 | 18 | 21,2 | 21,3 | 21,3 | 21,3 |
| 9 | 21,2 | 21,1 | 21,4 | 21,3 | 19 | 21,1 | 21,2 | 21,1 | 21,3 |
| 10 | 21,3 | 21,3 | 21,2 | 21,4 | 20 | 21,5 | 21,2 | 21,2 | 21,1 |

**Tabla 1**

Calculamos la media y el rango para cada una de las 20 muestras con el objetivo de construir las gráficas de control de $R$ y de $\overline{X}$ .

Cada envase vacío pesó 0,8 kilogramos. Luego de deducir el peso de los mismos, dispusimos los contenidos, en litros, de los bidones en una nueva tabla.

| **Muestra** | **Obs. 1** | **Obs. 2** | **Obs. 3** | **Obs. 4** | $\overline{X}_i$ | $R_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 20,6 | 20,5 | 20,4 | 20,4 | 20,475 | 0,200 |
| 2 | 20,6 | 20,7 | 20,5 | 20,3 | 20,525 | 0,400 |
| 3 | 20,6 | 20,4 | 20,3 | 20,4 | 20,425 | 0,300 |
| 4 | 20,4 | 20,4 | 20,5 | 20,6 | 20,475 | 0,200 |
| 5 | 20,4 | 20,5 | 20,6 | 20,6 | 20,525 | 0,200 |
| 6 | 20,4 | 20,4 | 20,3 | 20,6 | 20,425 | 0,300 |
| 7 | 20,4 | 20,4 | 20,5 | 20,6 | 20,475 | 0,200 |
| 8 | 20,5 | 20,7 | 20,3 | 20,4 | 20,475 | 0,400 |
| 9 | 20,4 | 20,3 | 20,6 | 20,5 | 20,450 | 0,300 |
| 10 | 20,5 | 20,5 | 20,4 | 20,6 | 20,500 | 0,200 |
| 11 | 20,7 | 20,5 | 20,4 | 20,6 | 20,550 | 0,300 |
| 12 | 20,4 | 20,5 | 20,6 | 20,6 | 20,525 | 0,200 |
| 13 | 20,6 | 20,7 | 20,5 | 20,3 | 20,525 | 0,400 |
| 14 | 20,5 | 20,5 | 20,4 | 20,6 | 20,500 | 0,200 |
| 15 | 20,6 | 20,7 | 20,5 | 20,3 | 20,525 | 0,400 |
| 16 | 20,4 | 20,3 | 20,6 | 20,5 | 20,450 | 0,300 |
| 17 | 20,4 | 20,5 | 20,6 | 20,6 | 20,525 | 0,200 |
| 18 | 20,4 | 20,5 | 20,5 | 20,5 | 20,475 | 0,100 |
| 19 | 20,3 | 20,4 | 20,3 | 20,5 | 20,375 | 0,200 |
| 20 | 20,7 | 20,4 | 20,4 | 20,3 | 20,450 | 0,400 |
| | | | | Promedios | 20,4825 | 0,270 |

**Tabla 2**

Establecimos en un principio las condiciones de la variabilidad *"bajo control"* del proceso y a tal efecto realizamos la grafica R.

La línea central está dada por $\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{20} R_i}{20} = 0,27$

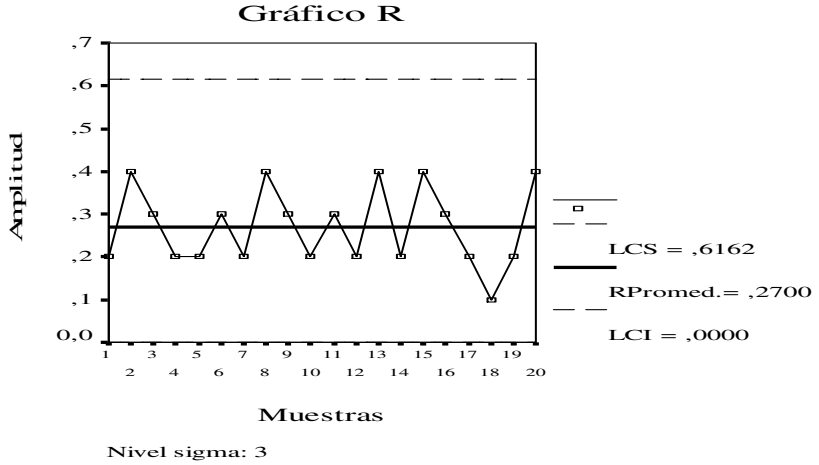
Reproducimos a continuación parte de la tabla en donde se encuentran las constantes $d_1$, $d_2$, $A_2$, $D_3$ y $D_4$ que se emplean para la obtención de los límites de control.

**Factores para la elaboración de gráficas de control**

| Muestra (n) | $d_2$ | $d_3$ | $A_2$ | $D_3$ | $D_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **2** | 1,128 | 0,853 | 1,880 | 0 | 3,267 |
| **3** | 1,693 | 0,888 | 1,023 | 0 | 2,574 |
| **4** | 2,059 | 0,880 | 0,729 | 0 | 2,282 |
| **5** | 2,326 | 0,864 | 0,577 | 0 | 2,114 |
| **6** | 2,534 | 0,848 | 0,483 | 0 | 2 4 |
| **7** | 2,704 | 0,833 | 0,419 | 0,076 | 1,924 |
| **……..** | ……. | ……. | ……. | ……. | ……. |
| **25** | 3,931 | 0,708 | 0,153 | 0,459 | 1,541 |

De aquí que para n = 4, $D_3 = 0$ y $D_4 = 2{,}282$.
Como resultado, los límites de control para la gráfica R son:

$$LCI = \overline{R}D_3 = (0{,}27).(0) = 0 \qquad LCS = \overline{R}D_4 = (0{,}27)(2{,}282) = 0{,}616$$




Como puede observarse ninguno de los rangos graficados cae fuera de los límites de control, por lo tanto no hay indicios que la situación esté fuera de control.

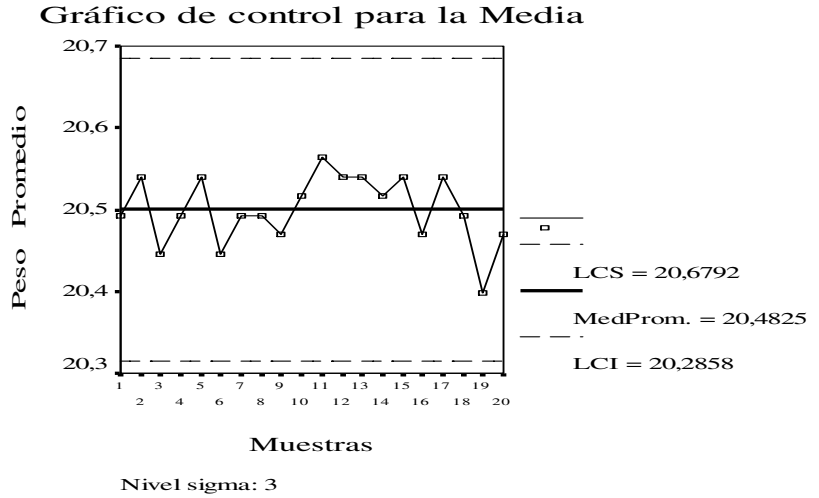
Construimos entonces una gráfica $\overline{X}$ para las observaciones de los pesos de los bidones de agua que hemos muestreado.

La línea central es: $\overline{\overline{X}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{20} \overline{X}_i}{20} = 20{,}4825$

y, para muestras de tamaño 4, resulta de la tabla anterior que $A_2 = 0{,}729$ y por lo tanto, los límites de control son:

$$LCI = \overline{\overline{X}} - A_2\,\overline{R} = 20{,}4825 - (0{,}729)(0{,}27) = 20{,}2858$$

$$LCS = \overline{\overline{X}} + A_2\,\overline{R} = 20{,}4825 + (0{,}729)(0{,}27) = 20{,}6792$$



Podemos ver que, de acuerdo a los resultados obtenidos, el proceso opera bajo control.

Para nuestro problema construimos un intervalo de tolerancia del 95% tal que el 99% de las mediciones de la población de bidones de 20 litros que envasa la planta estén en dicho intervalo.

Reproducimos a continuación parte de la tabla en donde se encuentra K, constante que interviene en el cálculo de los límites de tolerancia.

**Valores de K para límites de tolerancia de distribuciones normales**

| | $1 - \alpha = 0{,}95$ | | | $1 - \alpha = 0{,}99$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ \ $\gamma$ | 0,90 | 0,95 | 0,99 | 0,90 | 0,95 | 0,99 |
| 2 | 32,019 | 37,674 | 48,430 | 160,193 | 188,491 | 242,300 |
| 3 | 8,380 | 9,916 | 12,861 | 18,930 | 22,401 | 29,055 |
| …….. | …….. | …….. | …….. | …….. | …….. | …….. |
| **80** | **1,907** | **2,272** | **2,986** | **2,026** | **2,414** | **3,173** |
| …….. | …….. | …….. | …….. | …….. | …….. | …….. |
| $\infty$ | 1,645 | 1,960 | 2,576 | 1,645 | 1,960 | 2,576 |

Teniendo en cuenta que trabajamos con un total de 80 mediciones, *K* es 2,986

A partir de la tabla 2 calculamos el contenido promedio y desvío estándar, los cuales resultan:

$$\bar{x} = 20{,}4825 \qquad s = 0{,}1167$$

Por lo tanto, los límites de tolerancia inferior y superior son:

$$L_i = \bar{x} - K.s = 20{,}4825 - (2{,}986)(0{,}1167) = 20{,}134$$
$$L_s = \bar{x} + K.s = 20{,}4825 + (2{,}986)(0{,}1167) = 20{,}831$$

De esta forma podemos concluir, que el 99% de los bidones envasados en la planta se encuentran dentro del intervalo (20,134 ; 20,831) con una probabilidad de 0,95.

## 4. Conclusiones

De acuerdo al análisis realizado, el contenido de los bidones supera la cantidad de 20 litros ofrecida por el comerciante.

Si consideramos dicha cantidad como la especificación propuesta por el ingeniero que llevó a cabo la calibración del sistema, la misma es alcanzada y superada en la totalidad de los casos muestreados.

Por lo tanto, la preocupación de los propietarios de la planta, con respecto a que la reducción del caudal de agua que llega a la envasadora disminuya de tal manera que la cantidad envasada sea inferior a los 20 litros, es despejada. Si bien existe una variabilidad natural en el proceso, este se encuentra bajo control y las especificaciones con respecto al contenido de cada bidón se cumplen.

Podemos considerar que la metodología de trabajo utilizada es correcta.

Igualmente, no creemos que sea necesario establecer como límite inferior de tolerancia una cantidad que supera la especificación fijada.

## 5. Referencias bibliográficas


- CHASE, R., AQUILANO, N. y YACOBS, R..(2000). *Administración de la producción y operaciones.* Colombia: Mc Graw-Hill..
- CRAJEWSKI, L. J. y RITZMAN, L.(2008). *Administración de operaciones*. México: Prentice-Hall..
- DEVORE, J..(2008). *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*. (7ma. ed). México: Cengage Learning.
- DRESDNER, E., EVELSON, A., DRESDNER, M. y DREYFUS, M.(1998). *Técnicas cuantitativas (el management científico aplicado a las decisiones en la economía de la empresa).* Buenos Aires: Ediciones Universo.
- MENDENHALL, W., SINCICH, T. (1997). *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias.* (4ta.ed.). México: Prentice-Hall.
- MILLER, I. R., FREUND J. E., JOHNSON, R. (1992). *Probabilidad y Estadística para Ingenieros.* (4ta.ed.). México: Prentice-Hall.
- MONTGOMERY, D. C. (2008). *Control estadístico de Calidad.* (3ra. ed.). México: Limusa Wiley.
- PADRÓ, S. y KOHAN, D. (2005*). Control Estadístico de Procesos. Gráficas de control.* En CD de las XX Jornadas Nacionales de Docentes en Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines. Rosario.
- WALPOLE, R., MYERS, R., MYERS, S. y YE, K. (2007). *Probabilidad y Estadística para ingeniería y ciencias*. (8va. ed.). México: Prentice Hall.