GRAFICOS EN MODELOS DINAMICOS SOFTWARE LIBRE

Ricardo E. Adra[1] , Graciela C. Pedrosa[2]
Grupo de Investigación PROIMES
Facultad Regional Tucumán, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina
radra@arnet.com.ar, **gpedrosa@herrera.unt.edu.ar**

Área temática: Experiencia de Cátedra
Palabras Claves : modelo ecológico, cuasiperiódicos ,bifurcación, software libre.

RESUMEN

Las soluciones graficas, hablan más que mil palabras. Algunas de nuestra experiencia en la enseñanza de la Matemática Superior, de la FRT,UTN, nos alientan a realizar esta presentación.
En los modelos donde se puede representar curva tiempo-estado se muestra que al elegir de manera apropiada los intervalos para las variables pueden crearse gráficas curiosas e inusuales que, por decirlo así, cuentan una historia. Este aspecto de la representación de gráficas científicas y matemáticas es de suma importancia, ya que sobre todo se precisa que las gráficas den información del comportamiento de las soluciones. Si la representación gráfica es mala, entonces no surgirá la información.
Las investigaciones contemporáneas sugiere que las oscilaciones misteriosas y los cambios de comportamiento de los sistemas físicos pueden explicarse con frecuencia en términos de una bifurcación.
Al parecer, las oscilaciones de las concentraciones en un reactor químico, los ciclos de vida de una célula y los ciclos límites de Van de Pol en un circuito eléctrico se disparan cuando cambia un parámetro de un sistema y ocurre una bifurcación de Hopt o de algún otro tipo.
Verificar las condiciones de una bifurcación no siempre es sencillo. Una vez que se ha identificado un posible parámetro de bifurcación en el sistema, es posible usar gráficas de computadoras para desplegar pruebas visuales de que ha ocurrido una bifurcación.

1. INTRODUCCION

Se estudió el modo en que también podemos hallar movimientos cuasiperiódicos y toroides.
Sabemos que el origen es un centro en un sistema linear planar cuando los eigenvalores son complejos conjugados puramente imaginarios. Todas las trayectorias en un centro(excepto por el origen) se encuentran en elipses (o círculos) que rodean al origen.
Para tal fin se empleó programas de solución numérica con objeto de observar cómo cambian las soluciones cuando se modifican los datos iniciales y los coeficientes de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).
El **espacio fásico**, **espacio de fases** o **diagrama de fases** es una construcción matemática que permite representar el conjunto de posiciones. Es decir, cada punto del espacio fásico representa un estado del sistema físico. Para este caso se recurrió a un ejemplo de la ecología.
En este trabajo presentamos también ejemplos de sistemas que utilizan ode45 .
Para algunos sistemas tuvimos que en lugar este función emplear una elaborada en nuestro laboratorio denominada eulerbis7.

2. DESARROLLO

Una manera de visualizar el movimiento caótico, o cualquier tipo de movimiento, es hacer un diagrama de fases del movimiento. Algunas veces el movimiento representado con estos diagramas de fases no muestra una trayectoria bien definida, sino que ésta se encuentra errada alrededor de algún movimiento bien definido.

Verificar las condiciones de una bifurcación no siempre es sencillo. Una vez que se ha identificado un posible parámetro de bifurcación en el sistema, es posible usar gráficas de computadoras para desplegar pruebas visuales de que ha ocurrido una bifurcación.

2.1 Atractor de Lorenz

$$x_1' = \sigma(x_2 - x_1)$$
$$x_2' = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3$$
$$x_3' = -\beta x_3 + x_1 x_2$$

```
function f=f14_6_1(t,x)
sigma=10;beta=8/3;rho=28;
f=[sigma*(x(2)-x(1));rho*x(1)-x(2)-x(1)*x(3);-beta*x(3)+x(1)*x(2)];
```

Se observa el sistema de ecuaciones diferenciales puede agrupar en una función denominada en este caso como f14_6_1 a los efectos de codificar la misma para ser empleada en innumerables software matemático sea libre o no. Responde de una manera sencilla a la expresión matemática del sistema solo separad cada expresión por punto y coma.

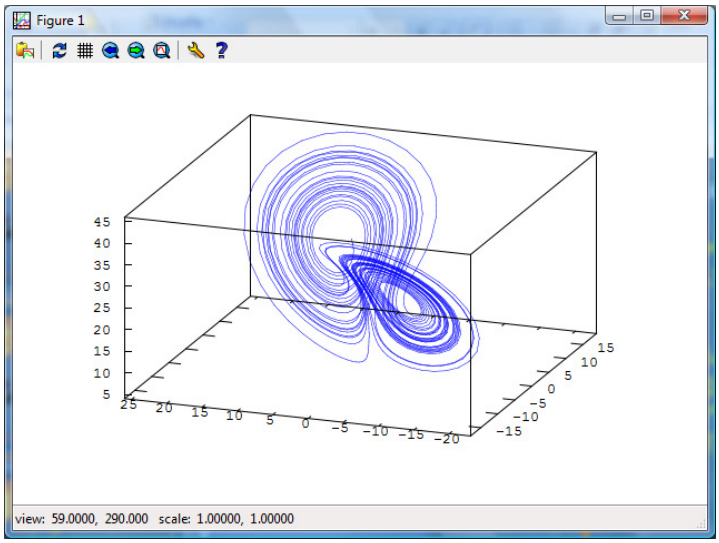

Fig. 1 Atractor de Lorenz

2.2 Ejemplo presa y depredador

Aquí presentamos un sistema de conejos y zorros para poder observar que se los analiza de una manera similar al caso anterior.

$$c' = \alpha c - \beta c z$$
$$z' = -\gamma z^2 + \delta c z$$

Para realizar un campo de direcciones se recurre a un comando del software matematico denominado quiver.

```
function dy=presarapaz(t,y)
a=0.4;b=0.01;g=0.01;d=0.01;
c=y(1);
```

```
z=y(2);
dc=a*c-b*c*z;
dz=-g*z^2+d*c*z;
dy=[dc;dz];
```

La función que hemos creado ahora se denomina presarapaz, introducidos los valores constantes se procedió como en el caso anterior a declarar dos C de conejos como c=y(1) y z de zorros como z=y(2) a partir de esta aclaración se observa que responde a la expresión matemática del sistema, el asterisco representa por y el signo circunflejo elevado a, z^2.

Para convocar al comando quiver se debe realizar el siguiente código:

```
y1=0:4:80;y2=0:4:80;t=0;
[Y1,Y2]=meshgrid(y1,y2);
for j=1:21
for i=1:21
dy=presarapaz(t,[Y1(i,j),Y2(i,j)]);
dY1(i,j)=dy(1);
dY2(i,j)=dy(2);
end
quiver(Y1,Y2,dY1,dY2)
```

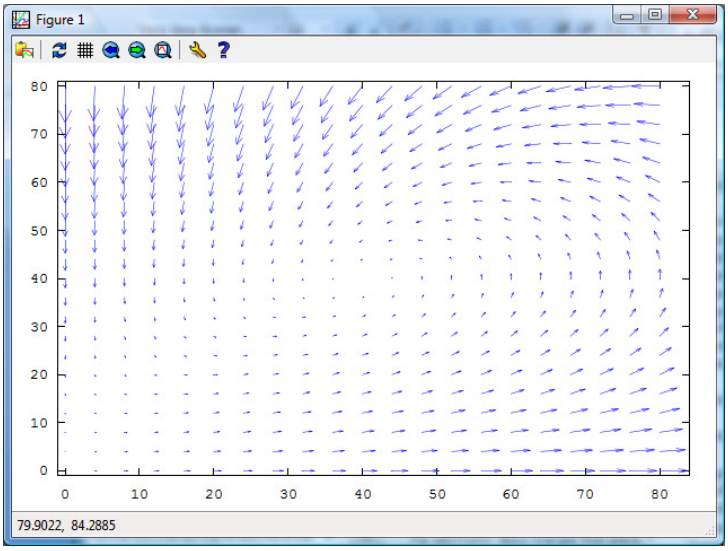

Fig. 2 Campo de direcciones

Y finalmente se invoca la función y se mantiene el campo de direcciones para dar el resultado:

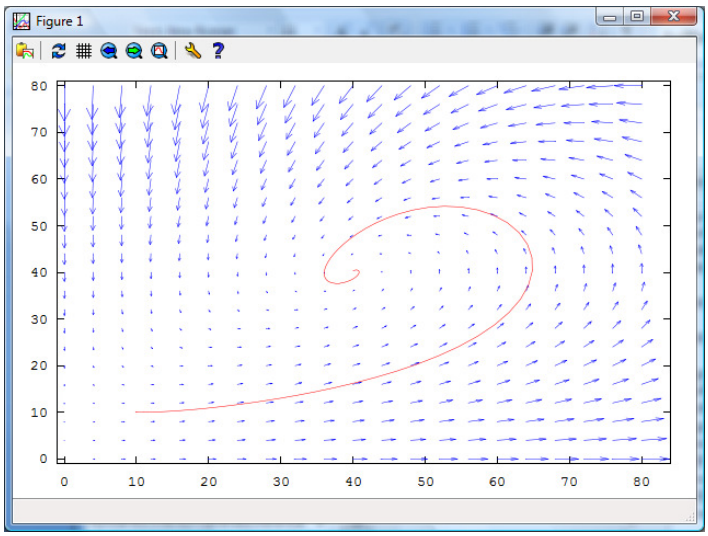

Fig. 3 Zorros y conejos y punto crítico

2.3 Toroide lineal de cuatro dimensiones

Sabemos que el origen es un centro en un sistema lineal planar cuando los eigenvalores son complejos conjugados puramente imaginarios. Todas las trayectorias en un centro(excepto por el origen) se encuentran en elipses (o círculos) que rodean al origen.
Supongamos que realizamos el análisis con una matriz en forma normal de Jordan

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{23} \\ 0 & 0 & -\sqrt{23} & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema lineal asociado se desacopla en dos sistemas planares:

$$\begin{aligned} x_1' &= -0.1x_2 \\ x_2' &= 0.1x_1 \\ y & \\ x_3' &= \sqrt{23}x_4 \\ x_4' &= -\sqrt{23}x_3 \end{aligned}$$

Sea

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Y observemos que el det(P)=27, por lo cual P es invertible. Ahora sea : $A=PBP^{-1}$ de modo que A es solo una matriz cuya forma normal de Jordan es B. Calculamos A y resulta ser:

$$A = \begin{pmatrix} 10.6722 & -16.0417 & 5.4028 & -12.2597 \\ 5.3472 & -8.1375 & 2.7569 & -3.6597 \\ 2.1574 & -3.5194 & 1.1954 & -0.3144 \\ 5.3287 & -7.9931 & 2.6644 & -3.7301 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que los eigenvalores de A son +-0.1i y +-4.7958i
Ahora calculamos la solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias X'=AX donde la función A*x se guarda en una función:

```
function f=f14_5_1(t,x)
A=[10.67221819995419 -16.04166063326462 5.40277576664376 -12.25971759661399;
5.34722021108821 -8.13749698329898 2.75694343887744 -3.65972081442841;
2.15740660295380 -3.51944323776403 1.19536996814357 -0.31435165073845;
5.32870169256969 -7.99305253885453 2.66435084628484 -3.73009118479878];
f = A*x;
```

La imagen del espacio fase se puede ver en tres dimensiones(con solo pasar por alto una coordenada). Las proyecciones de esta trayectoria en el hiperplano $x_1 x_2 x_4$ y en el hiperplano $x_1 x_3 x_4$

Dan por resultado las figuras 4 y 5

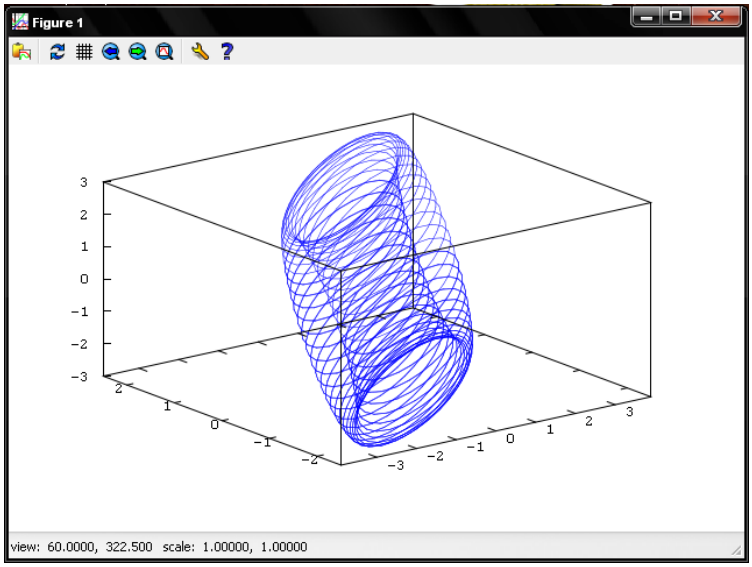

Fig. 4 Trayectorias hiperplano $x_1 x_2 x_4$

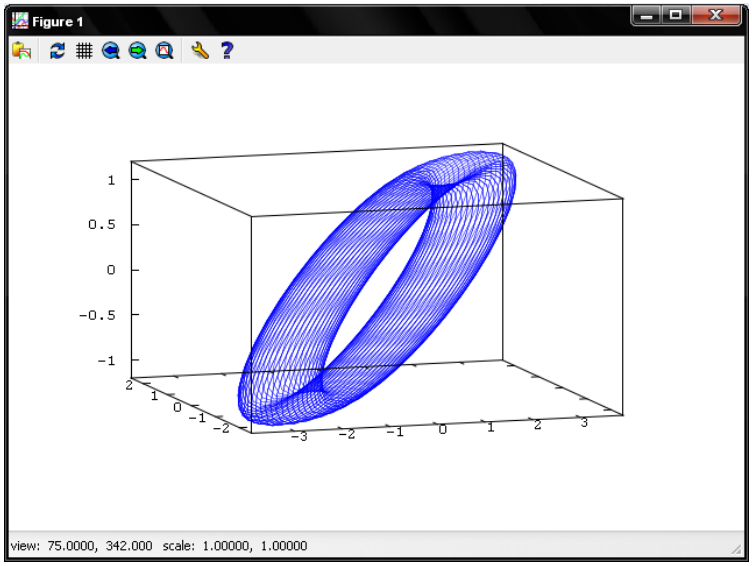

Fig. 5 Trayectorias hiperplano $x_1 x_3 x_4$

2.4 Un Toroide en tres dimensiones

No es obvio, pero es cierto, que las soluciones de sistemas no lineales de tres ecuaciones diferenciales también pueden tener dos soluciones cuasiperiódicas de dos frecuencias. No se va a plantear la teoría para resolver este ejemplo, pero con las técnicas numéricas nos permitirán visualizar que estas soluciones existen.
Considere el sistema autónomo no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias :

```
function f=f14_5_3(t,x)
f=[(x(3)-0.7)*x(1)-3.5*x(2);3.5*x(1)+(x(3)-0.7)*x(2);0.6+x(3)-x(3)^3/3-(x(1)^2+x(2)^2)*(1+0.25*x(3))];
```

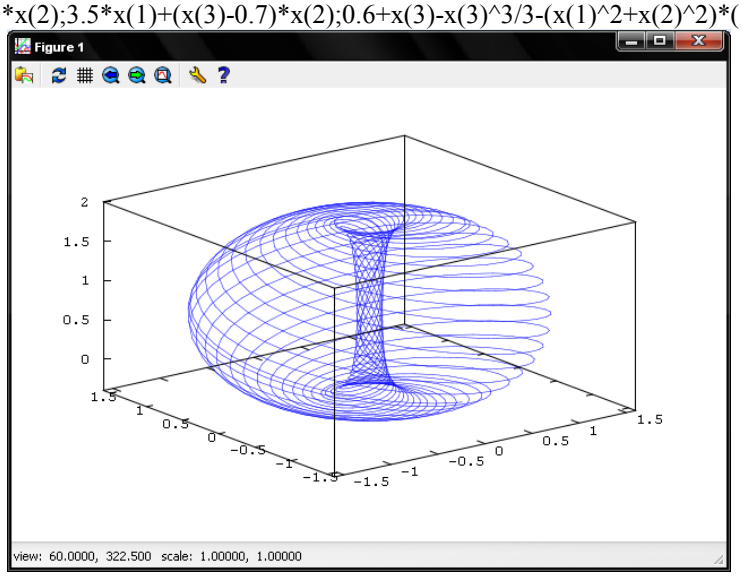

Fig. 6 Espacio fase que muestra movimiento de un toroide con condición inicial

3. CONCLUSIONES

La experiencia en la enseñanza de Matemática Superior, asignatura de tercer año de la carrera Ingeniería de Sistema de información de la facultad Regional Tucumán, Universidad Tecnológica Nacional, nos permite realizar este análisis.
Un **retrato de fase** es una representación geométrica de todas las trayectorias de un sistema dinámico no plano. Cada curva representa una condición inicial diferente. Un retrato de fase es una herramienta valiosa en el estudio de los sistemas dinámicos autónomos de segundo orden. La configuración de las

curvas en el espacio de fase revela información sobre la existencia de atractores, repulsores, ciclos límite.
Ciclos,bifurcaciones y caos : La órbita de una oscilación periódica en el espacio de estados se denomina Ciclo. Ejemplo de ciclos lineales es el oscilador armónico y de los no lineales del sistema depredador-presa de Lotka-Volterra. Aquí presentamos un ejemplo similar.
Se muestra que al elegir de manera apropiada los intervalos para las variables pueden crearse gráficas curiosas e inusuales. Este aspecto de la representación de gráficas científicas y matemáticas es de suma importancia, ya que sobre todo se precisa que las gráficas den información del comportamiento de las soluciones. Se empleó QTOCTAVE , software libre sobre plataforma también libre Linux.

4. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Robert Borrelli, Courtney Coleman, "Ecuaciones Diferenciales" Oxford University Press, 2002

Ricardo Adra, "Transformada de Fourier en Máxima" , Laboratorio Proimes, FRT-UTN. Tucumán, Octubre 2007.

Ricardo Adra, Graciela Pedrosa , "Transferencia de calor en Octave", Laboratorio Proimes, FRT-UTN. San Miguel de Tucumán, Junio 2006.

Adra, R. E., "Estudio de Superficie Software Libre", , Laboratorio Proimes.2008

Adra, R. E., Pedrosa G. "Oscilaciones Caóticas en reactor químico, Software Libre" , Mecom2010.

M. Golubitsky,M.Dellnitz, "Algebra Lineal y Ecuaciones diferenciales", Thomson Learning, 2001.

Dennis G. Zill, "Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de Modelado", Thomson Learning, 2002.

Henry Edwards,David Penney, "Ecuaciones Diferenciales", Prentice Hall, 2001.