“ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA EN TORNO AL USO DE LETRAS EN ÁLGEBRA”

Autores: Florencia Alurralde de Rojo [1] **, Lidia Ibarra** [2]

Universidad Nacional de Salta (U.N.Sa). ([1]Facultad de Ingeniería. [2]Facultad de Cs. Exactas) . Argentina

[1] falurral@unsa.edu.ar [2] ibarra@unsa.edu.ar

Palabras claves: Dificultades, letras, ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales

Resumen: Este trabajo presenta algunos resultados parciales del trabajo de tesis de Maestría de la carrera “Magister en la Enseñanza de la Matemática en Nivel Superior”. El objetivo es analizar las dificultades que se observan en la producción de los estudiantes que cursan primer año de Ingeniería, en cuanto al uso de las letras en ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. El estudio se realiza sobre la producción de los estudiantes en la primera evaluación por temas de la asignatura de primer año Algebra Lineal y Geometría Analítica de la Fac. de Ingeniería de la U.N.Sa. Se adoptó como sustento teórico el constructivismo, la Teoría APOE (acciones, procesos, objetos y esquemas).

INTRODUCCIÓN

La preocupación por el problema que se presenta en el aprendizaje del álgebra en los estudiantes de primer año de la universidad lleva a una serie de interrogantes que dieron origen al presente trabajo y que se centran específicamente, en el uso de las letras en álgebra.Cuando los estudiantes deben generalizar leyes o justificar en forma genérica algunas proposiciones, se hace necesario el uso de letras. ¿Qué significado le asigna el estudiante a las letras?, ¿influye a la hora de dar la solución de un sistema de ecuaciones lineales?

Las letras en álgebra pueden utilizarse de formas diferentes:

- como “incógnitas” (cuyo valor puede determinarse con exactitud, considerando las restricciones propias del problema)
- como “número general” (cuando aparece en generalizaciones y en métodos generales)
- como “variable” (en una relación funcional, entendidas como objetos matemáticos desconocidos que se manipulan como si fueran conocidos)
- como parámetro (entendidos como objetos matemáticos conocidos, sean números, conjuntos, funciones, espacios vectoriales, figuras, matrices o cualquier otro objeto matemático, que se manipulan como si fueran desconocidos).

El concepto de variable es muy importante en la comprensión de cualquier rama de la matemática y aparece inicialmente en los cursos de álgebra de manera no explícita, cuando los alumnos se enfrentan con los procesos de generalización y de modelización (dejando el manejo de operaciones que se aplican solamente a números específicos). Estos procedimientos exigen una buena comprensión del concepto de variable y de su manejo adecuado en diversas situaciones. Ante un mismo problema, los alumnos utilizan distintas estrategias para afrontar su solución. Los estilos o estrategias, muestran diferencias en la forma en que los sujetos piensan, estudian, resuelven problemas, etc. Nos centramos en los procesos cognitivos de los alumnos al resolver diversas tareas, para estudiar las habilidades cognitivas más relevantes, del pensamiento algebraico, con alumnos ingresantes a la universidad, a partir de sus producciones en una evaluación. Se estudia y organiza las dificultades, manifestadas a través de los errores que se dan en el uso de las letras en álgebra, a partir de la creación de categorías adecuadas. En este trabajo tenemos en cuenta la caracterización de los errores en un marco constructivista para realizar el análisis de la producción de los alumnos. Se elige trabajar sobre una Evaluación de la asignatura ALGA, de primer año de Ingeniería, ya que la evaluación es fundamental en los procesos de enseñanza y de aprendizaje porque orienta dichos procesos.

MARCO TEÓRICO

Teoría APOE: La teoría APOE es una interpretación de la teoría constructivista que se basa en el concepto de abstracción reflexiva, introducido por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea a nociones matemáticas más avanzadas (Dubinsky, 1991). Dubinsky usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado, partiendo de la siguiente idea del conocimiento matemático: *“…El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas …*“(Dubinsky - McDonald, 2001, p. 276).

La construcción de un concepto está asociada con las estructuras previas de un individuo y las ideas que pueda hacerse del objeto durante su experiencia con éste. Así, cuando un individuo enfrenta una situación matemática debe recurrir a sus ideas sobre los conceptos involucrados en ella, haciendo una reconstrucción de su conocimiento como resultado de la reflexión sobre las condiciones del problema planteado. De esta manera puede reestructurar su conocimiento mediante una reorganización de las estructuras en un nivel más elevado, donde el nuevo conocimiento es asimilado.

En este sentido, las estructuras que un individuo posee de manera previa determinarán su construcción del nuevo concepto. Por tanto, una meta clara dentro de este marco teórico es ayudar a los estudiantes a que construyan las estructuras apropiadas para cada nuevo concepto, estableciendo las conexiones adecuadas con las estructuras previas. De esta manera las estructuras, denominadas *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas*, están relacionadas de tal modo que sus conexiones determinan el conocimiento matemático de un individuo.

Una característica fundamental de los esquemas es su coherencia, que alude a la capacidad del individuo para establecer si un esquema le permite solucionar un problema particular. Como menciona Dubinsky , un esquema puede ocuparse para resolver una situación matemática y ser tematizado en un objeto para realizarle nuevas transformaciones (acciones y procesos).Sin embargo, ¿cómo se logra la construcción de esquemas? Ya que los esquemas son colecciones de otros elementos como acciones, procesos y objetos, describiremos cómo se logran este tipo de construcciones y los mecanismos necesarios para elaborarlos. Cuando un individuo está frente a una situación matemática puede utilizar ciertos mecanismos para construir estructuras matemáticas que puedan ser aplicadas para solucionar dicha situación. Las estructuras más elementales son las acciones y los procesos, que están relacionadas con los mecanismos de interiorización y encapsulación, respectivamente. Esta teoría señala que cuando un individuo inicia la construcción de un concepto matemático realiza transformaciones (acciones y procesos) sobre otros objetos construidos previamente, a fin de generar el nuevo objeto Es necesario desglosar un conjunto de construcciones mentales denominado esquema, que los estudiantes pueden desarrollar a fin de que asimilen el concepto de ecuación y de sistema de ecuaciones lineales.

Si bien el tema ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales se comienza a estudiar en el nivel medio, se observan aún en el primer año de la universidad, muchos errores en su interpretación, en su resolución y en la obtención y expresión del conjunto solución.

Para poder comprender el esquema de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, detallaremos lo que en este trabajo se entenderá por interpretar y resolver algebraica y gráficamente una ecuación y un sistema de ecuaciones (Alvarenga,pp.201).

Interpretar una ecuación implica, por un lado asimilar el significado de variable real y del conjunto solución, por otro lado , si se presenta como una relación entre expresiones algebraicas, puede ser interpretada como una relación entre funciones y su conjunto solución puede ser interpretado mediante gráficos.

La interpretación del conjunto solución de una ecuación queda perjudicada si el dominio del alumno acerca del universo numérico y de las propiedades de los números reales como cuerpo ordenado es limitado. Por ejemplo al tratar de resolver ecuaciones del tipo $3(2+x) = 6 + 3x$, es importante que el alumno entienda que no existe una única solución, sino que existen otras infinitas soluciones para la ecuación, la letra x simboliza una variable y no una incógnita en este caso.

Resolver una ecuación (o un sistema de ecuaciones) consiste en hallar su conjunto solución y expresarlo de la manera más simple posible. Entonces solucionar una ecuación algebraicamente implica, generalmente, hacer transformaciones mediante el uso de propiedades de los números reales, por eso es importante que el estudiante las conozca y determine cuales de ellas puede utilizar, teniendo en cuenta las equivalencias entre las ecuaciones que va obteniendo. La resolución gráfica de una ecuación y/ o sistema de ecuaciones, entendida como una relación entre funciones, implica la construcción de las gráficas de funciones, lineales en este caso, y la determinación del conjunto solución por medio del análisis de la figura, pero siendo también necesaria la manipulación algebraica.

Interpretar y resolver en el contexto algebraico, una ecuación, de manera general, requiere como requisitos:

Reconocer y emplear adecuadamente las propiedades del cuerpo ordenado de los números reales

Hacer una correspondencia entre los Reales y la recta real

Comprender las letras como incógnitas, variables, parámetros y números generalizados

Comprender nociones de conjuntos en R y operaciones (unión e intersección)

Graficar funciones lineales

Leer e interpretar gráficos sin necesidad de sus expresiones algebraicas

Una **Acción** consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el alumno como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir, por ejemplo resolver una ecuación copiando los pasos de resolución de otra ecuación similar, o hallar soluciones de una ecuación, sustituyendo valores y verificando si satisfacen la ecuación.

Si un estudiante, frente a un concepto, se limita a realizar acciones, se dice que tiene una concepción acción de esa idea. Aunque una *concepción acción* sea muy limitada, la construcción de acciones es fundamental al inicio de la comprensión de un concepto.

Cuando una acción es repetida y el estudiante reflexiona sobre ella, entonces puede *interiorizar* esa acción en **Proceso.** Esta construcción interna permite al individuo realizar la misma acción, sin que sea dirigida por estímulos externos. Por lo tanto un estudiante posee una *concepción proceso* de una transformación dada si su comprensión está restringida a concebirla como un proceso. Por ejemplo un alumno ejecuta un proceso cuando resuelve una ecuación sin imitar la forma de resolución de otra, puede describir los pasos necesarios para resolver una ecuación sin ejecutarla realmente, en cambio el que no posee un nivel de concepción proceso de resolución de ecuación no puede ejecutar una acción en el conjunto solución sin antes haberlo determinado (De Vries, 2001)

El que posee una concepción proceso de ecuación, utiliza el conjunto solución para responder sin un determinado valor es solución o no de la ecuación, sin necesidad de sustituir ese valor en la ecuación para verificarlo.

…"Cuando un individuo reflexiona sobre acciones aplicadas a un proceso específico adquiere una conciencia de su totalidad, percibe que transformaciones (ya sean acciones o procesos) pueden actuar en él y es capaz realmente de reconstruirlas. Si se da tal caso, se dice que reconstruyó- o encapsuló- aquel proceso como un ***Objeto*** *cognitivo. Así, un individuo está en un nivel de concepción objeto de una noción matemática cuando su comprensión de la idea es tan profunda que la trata como un objeto; además tiene la habilidad de ejecutar acciones en el objeto y también de desencapsular el objeto de vuelta al proceso que le dio origen cuando sea necesario. Un ejemplo de este tipo de concepción es: un individuo capaz de pensar en una función como la suma de dos funciones, sin hacer referencias a ejemplos específicos, piensa en ella como un objeto…." (Alvarenga, 2003,pp 203)*

Un alumno capaz de analizar equivalencias entre ecuaciones o sistemas de ecuaciones, utilizando propiedades de los números reales tiene una concepción objeto de ecuación, es consciente del proceso como una totalidad, puede ejecutar acciones aplicando propiedades de los números reales y analizar las equivalencias.

…"Un esquema, para un cierto concepto matemático, abarca una colección individual de acciones, procesos y objetos, a la que se pueden agregar otros esquemas previamente construidos. Las diversas construcciones se encuentran conectadas, de manera consciente o no, en una estructura coherente en la mente del individuo, que puede ser considerada en un problema que implique al concepto en cuestión y su coherencia permite al individuo reconocer lo que se halla en el ámbito del esquema.".(Alvarenga, 2003,pp203).

De la producción de los alumnos ingresantes, en la resolución de los problemas, emergen las dificultades y los errores más frecuentes. Surge la necesidad de definir el marco teórico para interpretarlos.

Dificultades El error es un objeto de estudio para la Educación Matemática. En el Constructivismo, hay un acuerdo general sobre algunos puntos al respecto: Los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, los errores aparecen sobre conocimientos adquiridos previamente, todo proceso de instrucción es generador de errores.

En cuanto a los errores cometidos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas existen teorías de la psicología educativa que ayudan en su interpretación y análisis.

"La posición cognitiva sugiere que la mente del alumno no es una página en blanco. El alumno tiene un conocimiento anterior que parece suficiente y establece en la mente del alumno un cierto equilibrio. Dos parecen las razones básicas a tener en cuenta en la adquisición de un nuevo conocimiento. Primero, el nuevo conocimiento debe tener significado para el alumno y para ello debe contestar a preguntas que él se ha hecho a si mismo, o por lo menos recuperar algunas representaciones que ya estaban en su mente, es decir, el alumno debe asumir la responsabilidad de la construcción del saber, y considerar los problemas como suyos y no como problemas del profesor. Y, segundo, el saber anterior produce modelos implícitos que a veces son favorables con el nuevo conocimiento matemático, y que por tanto hay que explicitarlos, y otras veces, al contrario, son un obstáculo. En ningún caso el conocimiento nuevo se añade al saber antiguo, muy al contrario se construye luchando contra él, porque debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total". (Socas, pag 143)

Socas considera necesario, desde la perspectiva de la enseñanza, tener elementos de análisis de los errores, considera útil abordarlos teniendo en cuenta su origen, que caracteriza en tres grupos:

1º) los errores que tienen su origen en un obstáculo

2º) los errores que tienen su origen en una ausencia de significado

3º) los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales

Como ejemplo de 1º), en relación a las dificultades que los estudiantes tienen en álgebra con la naturaleza abstracta de los elementos utilizados, los alumnos ven en la expresión algebraica 2n+1 un enunciado incompleto, cuando dicha expresión representa un número impar en forma genérica.

En el caso 2º) podemos nombrar

a) errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, es decir considerando el álgebra como una aritmética generalizada, entonces las dificultades de los estudiantes no son tanto en álgebra como problemas de aritmética que se quedan sin corregir, por ejemplo errores en operaciones con fracciones, uso de paréntesis, potencias, etc.

b) errores de procedimientos: uso inapropiado de fórmulas o de algunas reglas de procedimientos. En general estos errores se originan por falsas generalizaciones sobre operadores (por falta de linealidad de estos operadores), un caso típico es el mal uso de la propiedad distributiva

c) errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Estos errores no tienen referencia a la aritmética .Ejemplo de ello son el sentido del signo "=" en su paso de la aritmética al álgebra, y la sustitución formal.. En este trabajo nos referimos a errores del 2º) tipo.

Las dificultades y los errores observados en la producción de los alumnos influye en la evaluación de su aprendizaje, de allí la necesidad de contextualizar el concepto de evaluación que nos permita interpretar los resultados obtenidos.

Fundamentación teórica de la Evaluación

Evaluación educativa hace referencia a cualquier proceso por medio del cual alguna o varias características de un estudiante, grupo de estudiantes, de un ambiente educativo, programa u otros aspectos, reciben la atención del que evalúa, se analizan y se valoran sus características y condiciones en función de unos criterios o puntos de referencia para emitir un juicio que sea relevante para la educación. La evaluación implica siempre una toma de decisiones.

Las escalas de calificación permiten cuantificar los criterios que subyacen a todo juicio. Se pueden utilizar escalas de distinto tipo: numéricas, conceptuales y gráficas.

"La evaluación es un complejo proceso que no se reduce a acreditación, a medición de productos, sino que incluye estas actividades, pero tiende fundamentalmente a la comprensión del proceso de construcción de los aprendizajes. Debe ser un proceso continuo, formativo, cualitativo e integral. Cumple diversas y valiosas funciones que es necesario que rescatemos en la escuela". (Sanjurjo, L.).

Detrás de un proceso de evaluación hay una concepción de aprendizaje. La manera de evaluar determina qué y cómo se aprende. La evaluación es fundamental en los procesos de enseñanza y de aprendizaje porque orienta dicho proceso, entonces para mejorar la calidad de enseñanza se debe tener en cuenta en forma seria el cómo evaluar el aprendizaje. La evaluación del aprendizaje se concibe de dos maneras, según Palou de Maté:

1°) **Como inherente al proceso de enseñar – aprender:** se concibe al conocimiento como un proceso de construcción entre docente y alumno, donde se plantean estrategias de enseñanza, se evalúa para organizar y regular el proceso. Evaluación orientada a una interacción.

2°) **Como acreditación:** responde a una demanda social, certificar conocimientos curriculares previstos que permitan la movilización de los alumnos en las instituciones.

Por la importancia que tiene en el campo social, se tiende a sobredimensionar la acreditación. Sacristán afirma que "la evaluación condiciona todo lo demás".

Se puede delimitar los objetivos, funciones y fines de la evaluación (González Pérez (2.000)). El objetivo (meta) de la evaluación del aprendizaje, es valorar el aprendizaje en cuanto a sus resultados y consecución. Los fines marcan los propósitos que signan esa evaluación, están vinculados con la concepción de enseñanza y de aprendizaje que se quiere promover, con el papel de la educación en la sociedad.

Las funciones están referidas al papel que desempeña para la sociedad, para la institución, para los procesos de enseñanza y de aprendizaje, para los individuos implicados en el mismo. Existen diversos tipos de evaluación según su propósito, se distinguen tres: evaluación ***inicial, formativa y sumativa.***

Evaluación inicial como instrumento de ajuste y recurso didáctico que se integra en el proceso de enseñanza – aprendizaje, y que permite recabar información acerca de las estructuras cognitivas, preconceptos, contenidos aprendidos y habilidades que tienen los alumnos, datos indispensables para posibilitar la construcción de nuevos conocimientos significativos. Además puede cumplir una función motivadora, ya que permite que los alumnos conozcan sus errores, aciertos, contradicciones, etc., le permite al alumno tener una autoimagen de su propio aprendizaje. Se realiza al comienzo de una nueva fase de aprendizajes. Los instrumentos utilizados para este tipo evaluaciones son diversos, por ejemplo: mapas conceptuales, Q sort, informes personales, cuestionarios abiertos o cerrados, redes sistémicas, pautas de observación, parrillas de resultados, etc.

La **evaluación formativa** se realiza durante el proceso de enseñanza – aprendizaje, posibilita la toma de conciencia de los procesos realizados, de los errores, dificultades, bloqueos y aciertos, debe tender permanentemente a la **autoevaluación** (proceso por el cual el sujeto evalúa su propia práctica, es un proceso de reflexión)

Existen diversos instrumentos para llevar a cabo este tipo de evaluación, entre ellos: tablas de especificaciones, parrillas de evaluación y de regulación, fichas para diagnosis y proyecto de regulación, etc.

La **evaluación sumativa** consiste en determinar si se han alcanzado o no los objetivos educativos, mide resultados, para cerciorarse de que alcanzan el nivel exigido. Se realiza al finalizar un tema, unidad o un curso, conduce a la acreditación. La evaluación sumativa es necesaria como control de logros realizados y como información para docentes y alumnos.

Instrumentos de evaluación: Son medios estructurados para la apreciación de la calidad de los procesos de enseñanza – aprendizaje (Villagra 1.998).Pueden ser:- Pruebas (orales y escritas)- Instrumentos basados en la observación: listas de control, escala de clasificación - Instrumentos basados en el autoinforme: Inventario, Escala de actitudes.

Muchas veces se combinan instrumentos de evaluación. Todo instrumento debe ser práctico, útil, válido (que evalúe lo que se pretende evaluar) y confiable (estabilidad de los resultados al repetir la evaluación o al ser calificada por distintos profesores).

DESARROLLO

Metodología

El presente trabajo forma parte de la Indagación Exploratoria del Análisis A priori del trabajo de tesis de maestría. Se realiza un estudio de corte descriptivo e interpretativo de la producción de los alumnos en una evaluación por temas de la asignatura Álgebra Lineal y Geometría Analítica (ALGA), correspondiente al primer cuatrimestre de Primer año de las Carreras de Ingeniería Química, Ing. Industrial e Ing. Civil de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta. Se toma como muestra una comisión al azar, compuesta por 29 alumnos, sobre un total de doscientos alumnos.

Descripción de la Organización Institucional de la asignatura ALGA

El curso de ALGA dura un semestre y se compone de 2 clases teóricas y 2clases prácticas por semana, con una carga horaria total de 10 hs. semanales, 5 de teoría y 5 de práctica. Además cada docente ofrece a los alumnos 4 hs. Semanales de Consulta en forma personalizada. La asignatura está a cargo de un Responsable de cátedra, quien debe organizar todo lo relacionado a la materia. El plantel docente está compuesto por dos Profesores Adjuntos, quienes dictan teoría (un turno mañana y un turno tarde) y siete Docentes Jefes de Trabajos Prácticos que están a cargo de once comisiones de Práctica, en las que se debe desarrollar la guía de 10 Trabajos Prácticos La asignatura es de régimen promocional, para lograr la promoción, el estudiante debe obtener una nota final igual o superior a los 70. Dicha nota se calcula mediante la ecuación polinómica:

Nota Final = 0,6 * PP + 0,25* NET+ o,15* NTP donde PP= Promedio de parciales, NET= promedio de Evaluaciones por temas y NTP= Nota correspondiente a la presentación de los trabajos prácticos.

Los instrumentos de evaluación utilizados son: tres exámenes **Parciales** (con sus Recuperatorios) escritos de carácter teórico- práctico y que abarcan varias unidades, con un tiempo asignado para su desarrollo de 3hs., que se califican con una nota entre 0 y 100, aprobándose con 40, de la cual se obtiene PP. Tres **Evaluaciones por Temas** escritas (teórico-práctica) sobre algunos contenidos específicos con un tiempo asignado para su desarrollo de 1h. , las cuales no se recuperan , asignándole una nota entre 0 y 100 de la cual se obtiene NET, y finalmente los Trabajos Prácticos, que deben ser presentados por los alumnos en tiempo y forma, asignándole una nota entre 0 y 100.

El alumno que no alcanza los 70 en la nota final, habiendo aprobado los tres Parciales, tiene derecho a un Examen Global, que incluye todos los temas de la asignatura y que se aprueba con 60. Del promedio de la Nota final y del Global se obtiene una nueva Nota Final

Contenidos Mínimos: Los contenidos mínimos de la asignatura se adecuan al Convenio de Articulación de Universidades Nacionales del NOA, Proyecto: "El Ciclo Común de Articulación en Carreras de Ingeniería" (CCA). Ellos son: Puntos en R, R^2 y R^3. Distancias en R, R^2 y R^3.Rectas en R^2 y R^3. Plano. Cónicas: ecuaciones canónicas. Superficies: cono, cilindro, cuádricas. Números Complejos. Polinomios. Teorema del resto. Raíces Múltiples. Vectores en R^n y C^n. Producto escalar y vectorial. Triple. Producto Escalar. Matrices. Matriz Transpuesta. Rango. Inversa. Sistemas de ecuaciones. Espacios Vectoriales. Transformación Lineal. Determinante. Matriz Adjunta.

Evaluación a analizar: Se analiza la producción de los alumnos en una evaluación tradicional de la cátedra ALGA, no diseñada con el fin de la investigación, sino dentro del marco del cursado de la asignatura, por lo que el ejercicio Nº 1 de resolución de un sistema de ecuaciones lineales está direccionado al uso de un método de resolución en particular: el método de Gauss. Los temas involucrados en la evaluación corresponden a los temas de los dos primeros trabajos prácticos de la asignatura Ellos son Matrices-Sistemas de ecuaciones-Determinantes. Álgebra Vectorial. Se tendrá en cuenta para el análisis solo los ejercicios relacionados al uso de letras en cualquiera de sus formas, que por practicidad se numeraron del 1 al 5, y que se detallan a continuación.

Ejercicio Nº1: Mediante matriz inversa (por el método de Gauss y operaciones elementales entre filas), resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

Ejercicio Nº2: Explicar en detalle, como se verifica en general, la validez de la regla de Sarrus.

Ejercicio Nº3: ¿Será cierto que todo sistema lineal homogéneo de igual nº de incógnitas que de ecuaciones admite solución única?

Ejercicio Nº4: Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$ Agregar una ecuación de modo que el sistema resultante sea Tema A) indeterminado Tema B) determinado.

Ejercicio Nº5: Expresar el vector U = (-1,3,2) como suma de un vector colineal a V = (1, -2, 3) más un vector perpendicular a V.

Categorías de análisis apriori: Teniendo en cuenta la Teoría APOE se tomó las siguientes categorías de análisis a priori, para poder estudiar la producción de los estudiantes en los problemas propuestos en la primera evaluación por temas de la asignatura ALGA.

a) Interpretación de las letras involucradas (implica la capacidad de interpretar la letra según el caso, ya sea como un número cuyo valor se puede encontrar a partir de las restricciones del problema que se presenta, o como

representación de un número cualquiera en expresiones algebraicas (generalizaciones) o como variable en relación funcional).

b) Simbolización en una situación en la que aparece cierta caracterización de la letra (implica la capacidad de identificar y simbolizar la incógnita en ecuaciones de problemas específicos o identificar y simbolizar el objeto general en problemas particulares que se pueden generalizar o simbolizar situaciones en las que se presenta una relación funcional)

c) Manipulación de las letras que aparecen en una expresión (implica manipular los elementos de una ecuación, o de un sistema de ecuaciones, sea parámetro o incógnita y cualquiera sea la operación involucrada o manipular las letras en expresiones generales o manipular las variables para establecer los valores que puede tomar en función de la otra y resolver la ecuación, lo que implica hacer transformaciones mediante el uso de propiedades de los números reales, por eso es importante que el estudiante las conozca y determine cuales de ellas puede utilizar, teniendo en cuenta las equivalencias entre las ecuaciones que va obteniendo. Se incluye también la manipulación de métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, ya que implica transformaciones realizadas mediante el uso de propiedades de los números reales.

d) Expresión del conjunto solución (implica la capacidad de expresar el conjunto solución de un problema de manera clara y precisa)

Para resolver el **Ejercicio Nº1** los alumnos deben interpretar el enunciado, aplicar el método de resolución pedido y calcular la inversa de una matriz mediante Gauss y operaciones elementales entre filas, para poder expresar el conjunto solución del sistema. Es necesario que sean capaces de interpretar el sistema como una sola ecuación matricial y simbolizarlo de la forma A.X = B donde X actúa como una incógnita que puede ser encontrada con los datos del problema. Para poder hacerlo, deben usar la matriz inversa de A, de modo que se obtenga la expresión $X = A^{-1}.B$. Además deben calcular la inversa de la matriz A por el método solicitado (Gauss y operaciones entre filas).

El **Ejercicio Nº2** requiere el uso de las letras como número generalizado, se espera que los alumnos verifiquen en forma genérica la regla de Sarrus para el cálculo de un determinante de 3x3. (Pueden hacerlo utilizando algún otro método de cálculo de determinante, por ejemplo por el desarrollo de una fila o columna de Laplace).

En el **Ejercicio Nº3** se puede justificar con un contraejemplo elegido correctamente, de manera que alguna de las ecuaciones sea combinación lineal de las otras, aquí entra el concepto de variable en relación funcional, además del uso de las letras como parámetros en los coeficientes que se deben elegir para las ecuaciones

El **Ejercicio Nº4** requiere el uso de las letras como variable en relación funcional y además como parámetro ya que se debe agregar una ecuación de manera que los coeficientes tomen el valor necesario para que el sistema tenga un tipo de solución deseado.

El **Ejercicio Nº5** requiere que el estudiante utilice las letras como números generales para obtener todos los vectores A colineales con el vector V, (k toma el rol de parámetro) que tienen la forma genérica A = k.V y por otro lado todos los vectores B = (x,y,z), perpendiculares a V, cuya forma genérica se obtiene de la condición B.V = 0, donde se observa una relación funcional entre las variables.

RESULTADOS

Se presenta a continuación, para cada ejercicio, una tabla donde se consigna el número de alumnos que responden bien, mal o no responden en cada caso, con sus respectivos porcentajes.

Ejercicio Nº1

Respuestas	**Interpretación** A.X = B	**Simbolización**	**Aplicación método de resolución**	**Expresión de la solución**
Bien	22 (75,86%)	17 (58,62%)	17 (58,62%)	10 (34,48%)
Regular			5 (17,24%)	8 (27,58%)
Mal	5 (17,24%)	4 (13,80%)	5 (17,24%)	6 (20,68%)
Vacío	2 (6,90%)	8 (27,58%)	2 (6,90%)	5 (17,24%)
Total	**29**	**29**	**29**	**29**

Ejercicio Nº2

Respuestas	**Sarrus en forma génerica**			**Laplace u otro método en forma genérica**			**Verificación**
	Interpretacion	**Simbolización**	**Manipulación**	**Interpretacion**	**Simbolización**	**Manipulación**	
Bien	14 (48,23%)	14 (48,23%)	13 (44,82%)	6 (20,68%)	6 (20,68%)	6 (20,68%)	6 (20,68%)
Mal	4 (13,80%)	3 (10,34%)	1 (3,45%)	2 (10,34%)	2 (6,90%)		2 (6,90%)
Vacío	11 (37,93%)	12 (41,37%)	15 (51,72%)	21 (72,38%)	21 (72,38%)	23 (79,31%)	21 (72,38%)
Total	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**	**29**

Ejercicio Nº3

Respuestas	Interpretación	Simbolización	Manipulación	Justificación
Bien	13 (44,82%)	7 (24,13%)	7 (24,13%)	6 (20,68%)
Mal	10 (34,48%)	3 (10,34%)	2 (10,34%)	9 (31,02%)
Vacío	6 (20,68%)	19 (65,51%)	20 (68,96%)	14 (48,23%)
Total	**29**	**29**	**29**	**29**

Ejercicio Nº4

Respuestas	Interpretación del tipo de solución		Interpretación de los coeficientes como parámetros		Simbolización		Verificación	
	Tema A	Tema B	Tema A	Tema B	Tema A	Tema B	Tema A	Tema B
Bien	8 (27,58%)	13 (44,82%)	8 (27,58%)	13 (44,82%)	8 (27,58%)	13 (44,82%)	7 (24,13%)	10 (34,48%)
Mal	5 (17,24%)	1 (3,45%)	5 (17,24%)	1 (3,45%)	4 (13,80%)	1 (3,45%)	4 (13,80%)	1 (3,45%)
Vacío		2 (10,34%)		2 (10,34%)	1 (3,45%)	2 (10,34%)	2 (10,34%)	5 (17,24%)
Total	**13**	**16**	**13**	**16**	**13**	**16**	**13**	**16**

Ejercicio Nº5

Respuestas	Interpretación	Simbolización	Manipulación	Expresión de solución
Bien	15 (51,72%)	19 (65,51%)	16 (55,17%)	12 (41,37%)
Mal	10 (34,48%)	6 (20,68%)	8 (27,58%)	9 (31,02%)
Vacío	4 (13,80%)	4 (13,80%)	5 (17,24%)	8 (27,58%)
Total	**29**	**29**	**29**	**29**

INTERPRETACIÓN DE ALGUNOS RESULTADOS

En cuanto a la interpretación: El ejercicio Nº 1 es el que mejor interpretación presenta, el 75,86 % de alumnos fueron capaces de interpretar el problema como una sola ecuación matricial del tipo A.X = B, donde X es una incógnita a despejar. El porcentaje más bajo (20,68%) de ejercicios bien hechos corresponde al Nº 2, en el que deben interpretar la letra como número generalizado para expresar el desarrollo de Laplace o algún otro método de cálculo de determinante en forma genérica. - El porcentaje más alto de no contestados (72,38%) también corresponde al Nº 2. En los ejercicios 3 y 5 se observa que un importante porcentaje de alumnos (34,48%) interpretan mal cuando se trabaja con parámetros y variables en relación funcional.

En cuanto a la simbolización: El ejercicio Nº 4 presenta el mayor porcentaje (72,38 %) de bien, de los cuales un 44,82 % corresponde al tema B en el que se solicita un sistema de ecuaciones con una solución única, y el porcentaje es bastante menor (27,58%) para el tema A en el que se solicita un sistema de ecuaciones con infinitas soluciones. El porcentaje más bajo (20,68%) para simbolizar bien se presenta en el ejercicio Nº 2, en el que deben utilizar letras como números generales en el método de Laplace. Solo 6 alumnos lo realizaron correctamente y son parte de los 14 alumnos que simbolizaron bien la generalización de Sarrus. El más alto porcentaje de vacíos (72,38%) también corresponde al ejercicio Nº2 (Laplace). El ejercicio Nº 3 también presenta un porcentaje alto (65,51%) de vacíos.

En cuanto a la manipulación: En el ejercicio Nº1 se presenta un 58,62% de alumnos que hacen una buena aplicación del método de resolución (Gauss y operaciones entre filas), sin embargo puede considerarse alto el porcentaje de alumnos que cometen errores o lo hacen mal (34,48%), teniendo en cuenta que se trabajó bastante en este sentido en los trabajos prácticos. En el ejercicio Nº 5, el 55,17 % de alumnos manipula bien las variables, y el 27,58% lo hace mal.

En cuanto a la expresión del conjunto solución: En el ejercicio Nº 1 expresan bien la solución el 34,48% y regular o mal el 48,28 %. - En el ejercicio Nº 5, lo hacen bien el 41,37 % y mal el 31,02 %. Es notable el bajo porcentaje (20,68%) de alumnos que justifican correctamente lo que hacen, como se ve en el ejercicio Nº 3. También es notable el bajo porcentaje (20,68%) de alumnos que realizan correctamente la verificación solicitada en el ejercicio Nº 2.

CONCLUSIONES

Pareciera que la mayor dificultad en los alumnos que cursan primer año de ingeniería en la Universidad Nacional de Salta, en cuanto al uso de las letras en álgebra, se presenta en primer lugar alrededor de las generalizaciones, cuando deben utilizar las letras como números generales (como se observa en el ejercicio Nº 2), y en segundo lugar cuando deben utilizar las letras como variables en relación funcional (Ejerc. Nº 3 y 5).

La interpretación y la resolución de problemas asociados a ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, se ve obstaculizada en los alumnos que estudian Ingeniería debido a: limitaciones en el manejo de propiedades de las operaciones en el campo de los números reales, lo que se manifiesta en los errores cometidos por los estudiantes al tratar de despejar una variable en una ecuación o sistema de ecuaciones; la falta de conocimientos acerca de la teoría de conjuntos, ya que complica al estudiante para poder expresar el conjunto solución de un sistema o de una ecuación, sobretodo en el caso de infinitas soluciones; el uso inadecuado de las letras, esto se manifiesta en la confusión de los roles que cumplen cada una de las letras en una ecuación y/o sistema, además también se

manifiesta en el momento que deben expresar el conjunto solución de una ecuación o de un sistema que tiene infinitas soluciones, en el que se debe visualizar el número de variables libres.

Por lo antes mencionado, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes se quedan en una **Acción**, es decir resuelve una ecuación por pasos análogos a otros ya realizados, o resuelve un sistema porque mecaniza un algoritmo de resolución, pero ante una situación nueva, no puede interpretarla y resolverla sin ver una analogía en los pasos a seguir, es decir no es capaz de interiorizar las acciones en un **Proceso**, lo que a su vez impide la reconstrucción de la ecuación o de sistema de ecuaciones como **Objetos** cognitivos, sin poder llegar a un **Esquema** para estos conceptos matemáticos. En resumen podría decirse que un porcentaje alto de estudiantes solo logran un proceso de Acción en estos temas.

Esto nos lleva al planteo de hipótesis provisorias para un nuevo trabajo, en cuanto a que existen algunas restricciones impuestas por el sistema de enseñanza, por un lado, el poco tiempo que se dispone en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los temas mencionados, la falta de conocimientos previos, lo que origina una acumulación de varios temas en un mismo práctico y por lo tanto un obligado aprendizaje rápido, y por otra parte la necesidad de evaluar, lo que lleva a tareas que pueden dividirse y estructurarse de manera flexible, lo que permite su atomización y las transforma en objetivos más fáciles de evaluar, que son características de la interpretación del álgebra como una aritmética generalizada y no como instrumento de modelización.

Si bien este análisis es solo una primera aproximación, sirve como inicio para realizar en un segundo trabajo, una investigación más profunda del tema a partir de encuestas y análisis de otras producciones de los alumnos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

-Asiala,M;Brown,A;Devries,D.J;DubinskyE.;Mathews D. & Thomas,K.1996A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education.CBMS 6,1-32.

-Alvarenga, K.B.(2003). “La Enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE”. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Relime. Vol.6.Nº3.pp.199-219

-De Vries,D. Publicación electrónica. RUMEC/APOS theory glossary. Obtenido en htpp:// www.cs.gsu.edu/ rumec/Papers/Glossary.html en junio de 2001

-Dubinsky,E. (1991 a).”Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking”, en D. Tall (ed), Advance Mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp .95-123.

-Dubinsky,E. (1991 b).”The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics”, en L.P.Steffe (ed), Epistemological Foundations of Mathematical Experiencies, Nueva York, Springer-Verlag. Advance Mathematical Thinking, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, pp .95-123.

-Dubinsky,E.y M.Mc. Donald (2001).”APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research”, en D. Holton (ed). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280.

- Dubinsky,E. (1996).”Aplicación de la Perspectiva Piagetiana a la Educación Matemática Universitaria” Educación Matemática, vol 8, Nº 3, 24-41

- Gimeno Sacristán, J. (1.994). “la Evaluación en la enseñanza”, en Gimeno sacristán, J. y Pérez Gómez, A. (Eds.) (1.994), Comprender y Transformar la enseñanza, (pp. 334-397). Madrid. Ediciones Morata.

- González Pérez, M. (2.000). “Las funciones y fines de la evaluación: por qué y para qué evaluar?, en González Pérez, M. (Ed.). (2.000), Evaluación del aprendizaje en la enseñanza universitaria, (pp. 40-52). CEPES. Universidad de La Habana. Cuba.

- Palou de Maté, M. (1.998) “La evaluación de las prácticas docentes y la autoevaluación”, en Camilloni, A; Celman, S; Litwin, E. Y Palou de Maté, M. (eds).(1.998). La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo”, (pp. 93-131).Bs. As. Paidós.

- Sanjurjo, L. (2.003). “La evaluación y la acreditación en el proceso de aprendizaje”, en Sanjurjo, L. Y Vera, M.T. (2.003).

- Socas, Martin. “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria”(1997), en “La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria”,ICE/HRSORI. Universitat de Barcelona. España.

- Trigueros, M. (2005).”La noción de esquema en la Investigación Matemática Educativa a Nivel Superior”. Educación matemática, abril, año/vol. 17, número 001. Santillana. Distrito Federal. México. p.p. 5-31

- Villagra, M.A. (1.998). “La problemática de la Evaluación, en “Modelo didáctico”. Segunda Parte. Instituto Coordinador de Programas de Capacitación, (pp. 85-115). Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

- Villalonga de García, P. Y Colombo de Cudmani, L. (2.003). “¿Cómo evaluar el conocimiento matemático de los alumnos?. Actas de la Décimo Tercera Reunión Nacional de Educación en Física. Volumen en soporte magnético. Río Cuarto, Córdoba. Argentina.