INTEGRALES: ALGO MÁS QUE RUTINA DE CÁLCULO

Marta G. Caligaris, María Elena Schivo y María Rosa Romiti

Grupo Ingeniería & Educación
Facultad Regional San Nicolás
Universidad Tecnológica Nacional
Colón 332 (2900) San Nicolás, Argentina
gie@frsn.utn.edu.ar

Área temática: Investigación educativa – Experiencias de cátedra
Palabras claves: integrales – visualización – software libre – registros semióticos

Resumen

En la enseñanza tradicional del Análisis Matemático, es común que se dedique mucho tiempo a fin de que los alumnos adquieran destreza en el cálculo de integrales. Se privilegia la rutina de cálculo, cuando son otras las actividades que propician la construcción de los conceptos matemáticos.

Así, es difícil creer que un alumno pueda entender el tema si no ha desarrollado la habilidad necesaria para cambiar naturalmente entre los distintos registros de representación semiótica.

En este trabajo se muestra material didáctico interactivo diseñado para trabajar algunos contenidos de integrales en cursos de Análisis Matemático I y se describe y analiza una experiencia piloto en la FRSN.

Introducción

En la enseñanza tradicional del Análisis Matemático, es común que se dedique mucho tiempo para lograr que los alumnos adquieran destreza y agilidad en el cálculo de integrales. Suele privilegiarse la rutina de cálculo, cuando son otras las actividades que propician la construcción de los conceptos matemáticos. Es difícil creer que un alumno pueda entender la materia sin haber desarrollado, por ejemplo, habilidades visuales relativas a la construcción de sus conceptos fundamentales [1].

La visualización matemática es el proceso de formación de imágenes, ya sea en la mente, con papel y lápiz, o con la ayuda de la tecnología, y su uso efectivo para la comprensión matemática [2].

El medio de transmisión comúnmente utilizado tanto en los apuntes como en los textos que manejan los estudiantes es, fundamentalmente, la letra escrita, un medio estático que no se adapta en absoluto a los procesos de visualización. En las presentaciones realizadas en el pizarrón, por ejemplo, los elementos van apareciendo poco a poco complementando una imagen que empieza siendo simple y termina muchas veces complicada. En un libro, en un artículo, se transmite normalmente sólo el producto final, la imagen última con todos los elementos acumulados en ella, lo que resulta muchas veces engorroso de interpretar [3]. La visualización que proponen los libros, o los gráficos que realiza el profesor en el pizarrón, es estática y requiere que la capacidad de imaginación de los alumnos esté convenientemente entrenada. Hay un creciente interés por impulsar el uso de herramientas de visualización en la computadora, para apoyar la exploración y el aprendizaje de conceptos matemáticos, porque se pueden hacer visualizaciones interactivas [4].

Para la enseñanza del Análisis Matemático se debe tener en cuenta que éste es dinámico: estudia el cambio y el movimiento; trata cantidades que se aproximan a otras cantidades. Esto hace que su enseñanza y su aprendizaje se dificulten si sólo se utilizan imágenes estáticas por mejores que éstas sean.

En la actualidad, la influencia sobre el quehacer matemático de la computadora se va dejando sentir en muchos aspectos y uno de ellos es la visualización. En lo que se refiere en particular al Análisis Matemático I, la existencia de programas de cálculo tales como MAPLE o MATHEMATICA, entre los programas comerciales y GEOGEBRA o SCILAB entre los programa gratuitos, con capacidades de representación extraordinariamente versátiles e interactivas, puede cambiar la presentación de los contenidos.

Además, para que el alumno pueda aprender de manera significativa el contenido propuesto, el pensamiento visual y las representaciones gráficas deben estar vinculados a otros modos de pensamiento matemático y otras formas o registros de representación. Se debe aprender cómo las ideas pueden ser representadas simbólica, numérica y gráficamente, y a moverse entre estos modos de representación [2].

Los procesos matemáticos se componen de dos clases de transformaciones de los registros de representación: el tratamiento y las conversiones. El tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro. Por ejemplo, calcular una integral indefinida de una determinada función, es una actividad de tratamiento que sólo demanda la utilización del método correspondiente. En cambio, la conversión requiere un cambio de registro. Así, si dadas las gráficas de funciones se pide explicar cuál o cuáles pueden ser las primitivas de una función determinada, se induce a cambiar del registro gráfico al coloquial.

Para los alumnos una representación puede funcionar verdaderamente como tal, es decir les permite el acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que disponga de al menos dos sistemas

semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso… y que "espontáneamente" puedan convertir de un sistema a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. Cuando no se cumplen estas condiciones, se confunde la representación con el objeto representado [5].

En este trabajo se muestra material didáctico interactivo diseñado para desarrollar los contenidos de integrales definidas y algunas aplicaciones. Se utilizó el software libre GeoGebra disponible en español, que permite una forma de trabajo muy amigable. Además, se describe y analiza una experiencia piloto en un curso de Análisis Matemático I de la FRSN, en el ciclo lectivo 2010, en que se trabajó el tema integrales en el marco de la teoría de los registros de representación semiótica [5]. Se muestra el estudio llevado a cabo junto con los resultados obtenidos en diferentes evaluaciones.

La oferta de los programas comerciales

Las versiones más nuevas de Maple ofrecen asistentes y tutoriales que permiten realizar diversas tareas. Los tutoriales están diseñados para ayudar a los estudiantes a comprender, entre otras cosas, los temas básicos de un curso de Análisis Matemático I favoreciendo los cambios de registro. Específicamente, dentro del paquete Calculus1, existen tutoriales que estimulan el trabajo interactivo, que contienen rutinas de visualización para ayudar a entender conceptos o teoremas y que ofrecen la posibilidad de hacer cálculos paso a paso. En la Figura 1 se muestran dos de estos tutoriales, que permiten trabajar los registros gráfico y simbólico. Se puede acceder a ellos desde el submenú **Tutors** (**Calculus – Single Variable**) del menú **Tools**.

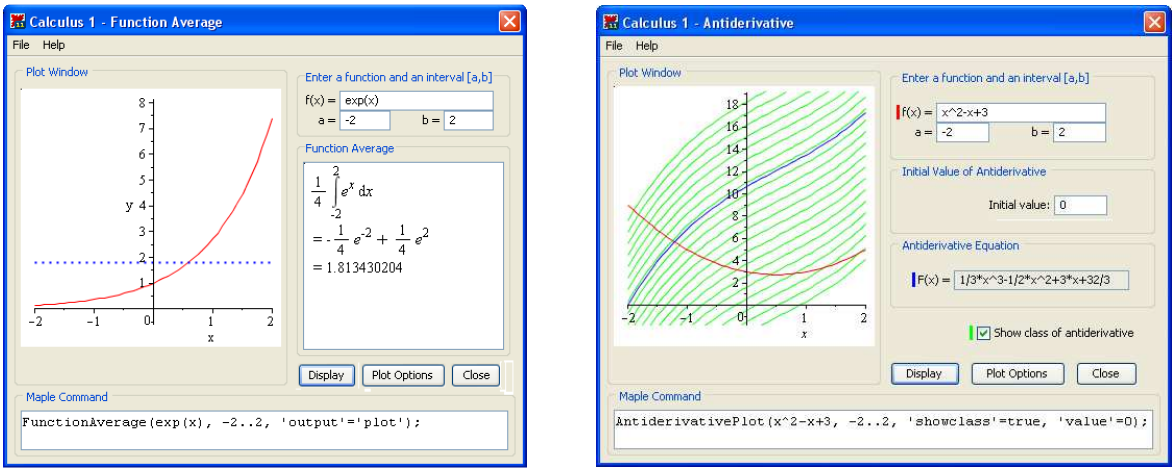


Figura 1. Distintos tutoriales ofrecidos por Maple para el estudio del concepto de integral.

Wolfram Demonstrations Project [6] es un recurso de código abierto que utiliza las capacidades de Mathematica para visualizar distintos conceptos. Su colección de aplicaciones interactivas es creada por usuarios todo el mundo, que participan aportando contribuciones innovadoras. Cualquiera puede previsualizar las demostraciones en línea e interactuar con ellas mediante el reproductor gratuito de Mathematica, pero como se observa en la Figura 2 [7, 8], algunas deben analizarse con mucho cuidado.

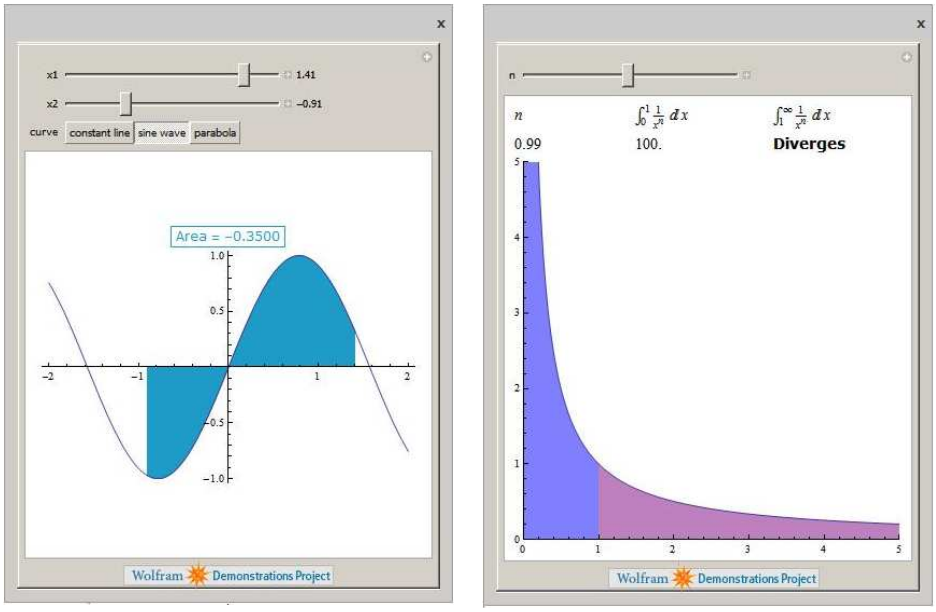


Figura 2. Algunos ejemplos ofrecidos en el sitio Wolfram Demonstrations Project

Las aplicaciones propias

Con la intención de trabajar en clase enfatizando en los cambios de registro de representación, se confeccionaron aplicaciones propias. Estas interfaces gráficas fueron realizadas con GeoGebra, un software libre, disponible en español, que permite una forma de trabajo muy sencilla. Se puede obtener desde www.geogebra.org.

GeoGebra es una herramienta práctica que permite al docente confeccionar su propio material didáctico que puede ir desde un simple gráfico estático hasta páginas web dinámicas, mediante applets. A su vez, es atractivo para los estudiantes ya que los ejemplos propuestos por el profesor pueden servir como base para que ellos fabriquen otros a partir de sus propias inquietudes. De esta forma tienen la posibilidad de "experimentar" enriqueciendo la metodología de trabajo en cuanto a la formación de conceptos y análisis de contenidos. La facilidad con la que pueden cambiar los objetos a través de deslizadores obligándolos a adquirir diferentes posiciones, permite la observación dinámica de lo que se quiere mostrar. Con estas herramientas puede trabajarse de manera interactiva, no necesariamente en clase.

En la Figura 3 se muestra la interpretación geométrica de la definición de integral definida. Ésta suele ser una de las más difíciles de abordar desde el punto de vista didáctico, por su complejidad. Por tal motivo, es habitual encontrar en los libros de texto una versión muy simplificada de la misma, presentando sólo el caso de una partición con intervalos de igual longitud [9, 10].

Si bien el desarrollo profundo de toda la teoría que involucra llegar a la definición completa excede al alcance de un curso de primer año de ingeniería, es conveniente presentar el caso más general de las sumas de Riemann, con una partición genérica del intervalo de integración y su interpretación geométrica para el caso en que la función sea positiva o nula en dicho intervalo [11, 12]. En la figura de la derecha se presenta la construcción de la suma integral para una partición cualquiera y se muestra mediante un deslizador cómo, a medida que la norma de la partición tiende a cero, la suma integral se aproxima geométricamente y por consiguiente en valor numérico mediante un texto dinámico, al área del recinto de ordenadas.

La pantalla de la izquierda está confeccionada para explicar gráficamente que para una función negativa, también se puede calcular la suma integral pero, mediante un texto dinámico, se muestra que, cuando la norma de la partición tiende a cero, la suma integral se aproxima al valor opuesto del área del recinto.

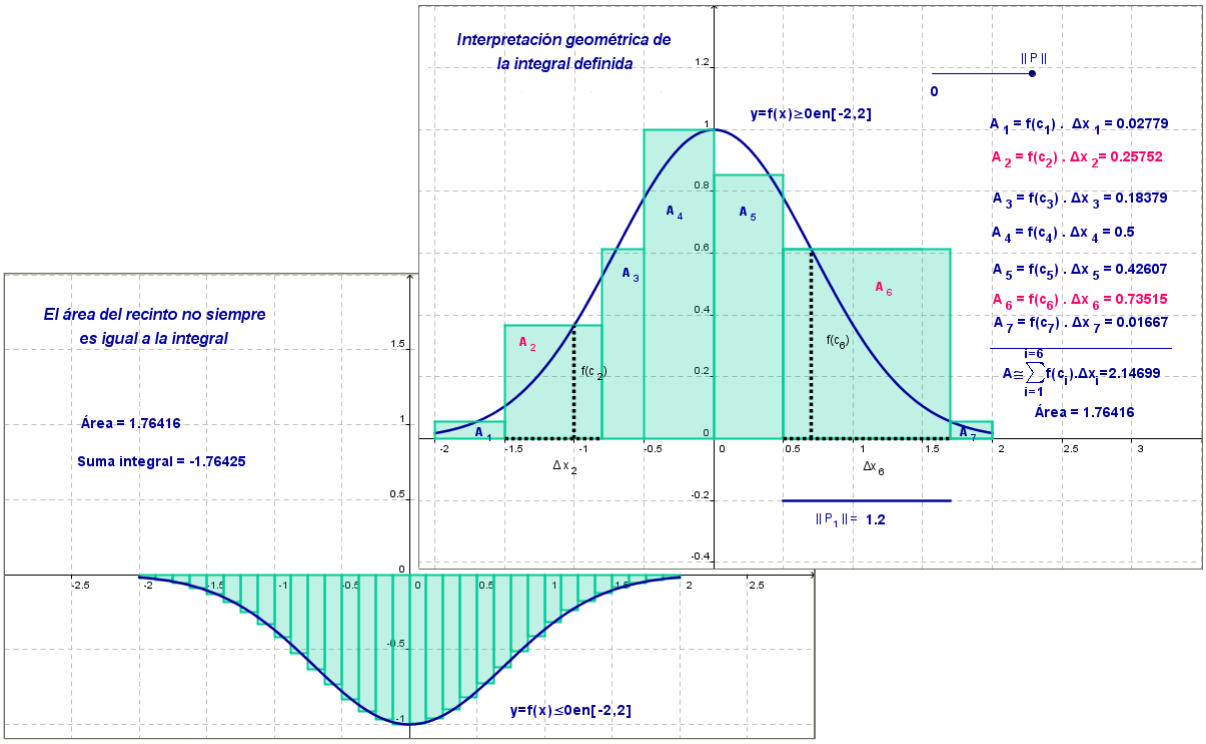


Figura 3. Interpretación geométrica de la integral definida

Otro de los conceptos que a los alumnos en general les resulta complicado es el de función integral. No es muy fácil de asimilar para ellos que la variable de la función se encuentre en el extremo superior de una integral.

En la Figura 4 se muestra una ventana interactiva que sirve para ilustrar que la función integral depende del extremo superior de la integral y cómo se va construyendo ésta a medida que va cambiando dicho extremo mediante el deslizador. También se utiliza para mostrar, a través de un texto interactivo que figura en la parte inferior, la relación entre la función integral y el área del recinto de ordenadas, para el caso en que la función del integrando es positiva.

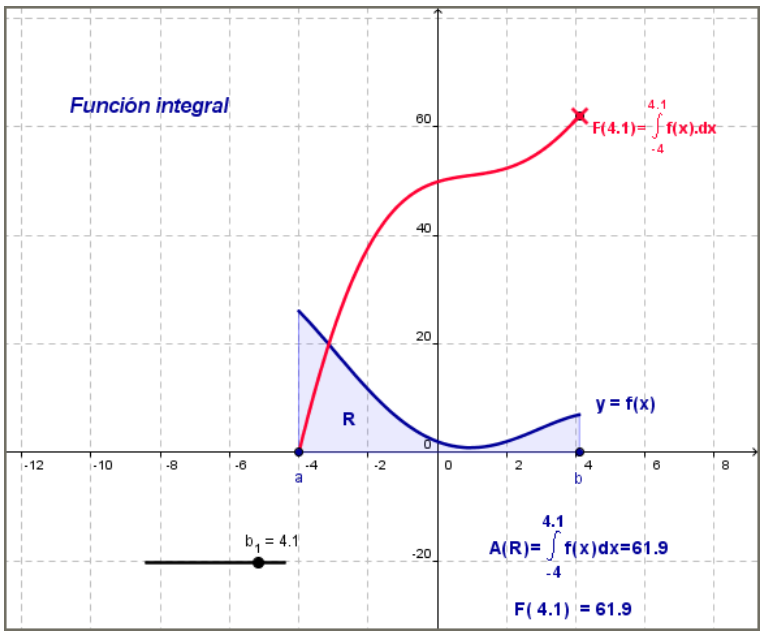


Figura 4. La función integral

La Figura 5 presenta dos ventanas interactivas. La de la derecha ilustra geométricamente el teorema del valor medio del cálculo integral, mostrando la existencia del punto intermedio "c" y la equivalencia entre el área del recinto de ordenadas y el área del rectángulo correspondiente, para las funciones positivas o nulas.

La ventana de la izquierda presenta interactivamente la aplicación del teorema del valor medio del cálculo integral para obtener el valor promedio de una función en un intervalo que va cambiando su extremo superior con el deslizador. También, mediante un texto dinámico, da dicho valor promedio.

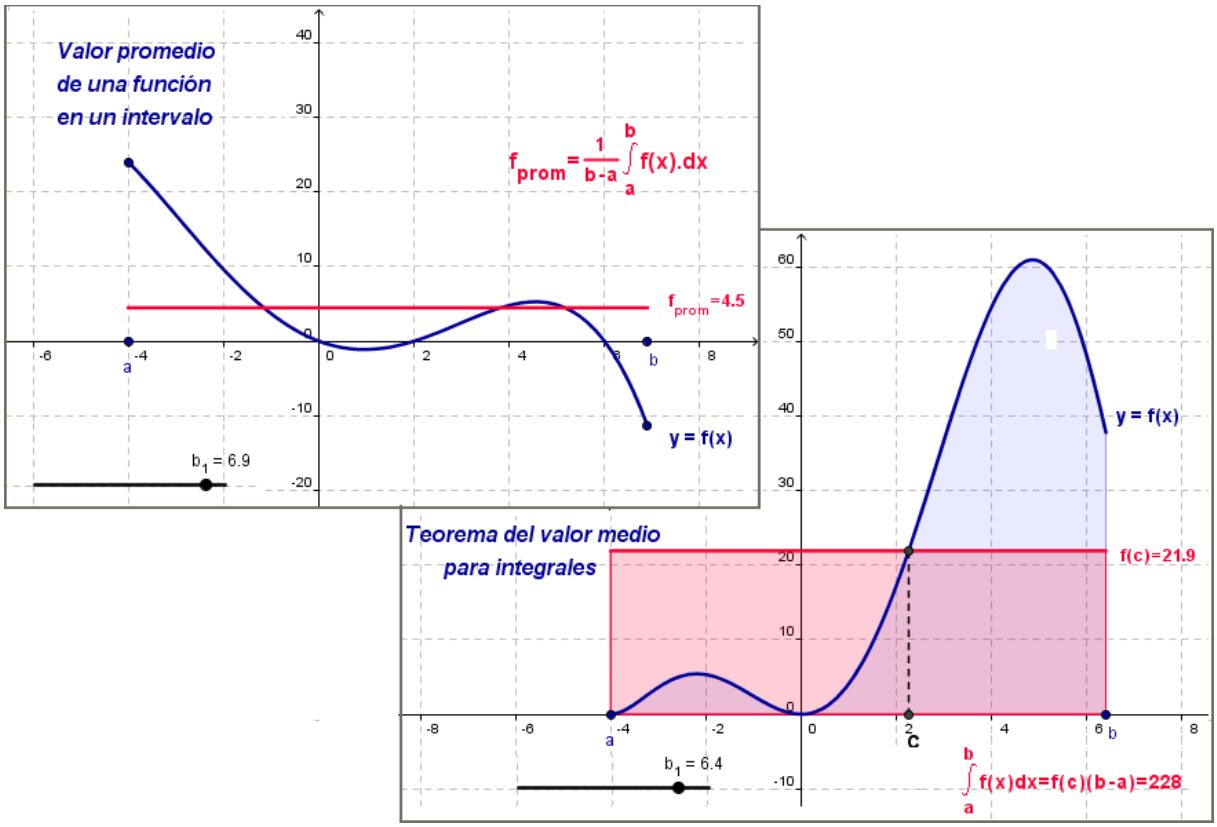


Figura 5. Teorema del valor medio del cálculo integral

Las ventanas anteriores fueron realizadas para trabajar en especial los cambios de registro que involucran al gráfico y al simbólico. En las figuras 6 y 7 se presentan aplicaciones para que los alumnos analicen en clase una serie de afirmaciones y señalen si son verdaderas o falsas. Con éstas se pretendió enfatizar los cambios de registro en los que interviene el coloquial. Al elegir una opción, V o F, se obtiene un cuadro de diálogo en el que se indica cuál es la respuesta correcta.

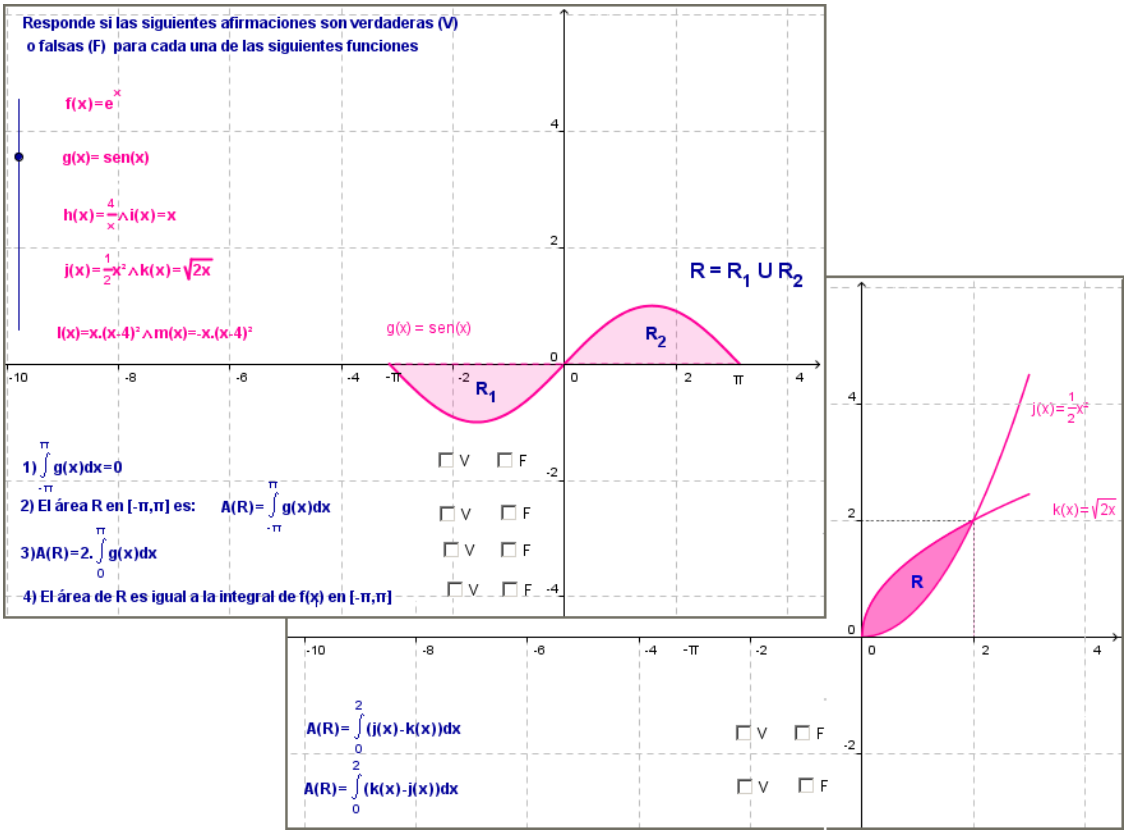


Figura 6. Actividades relacionadas con las integrales definidas y el área

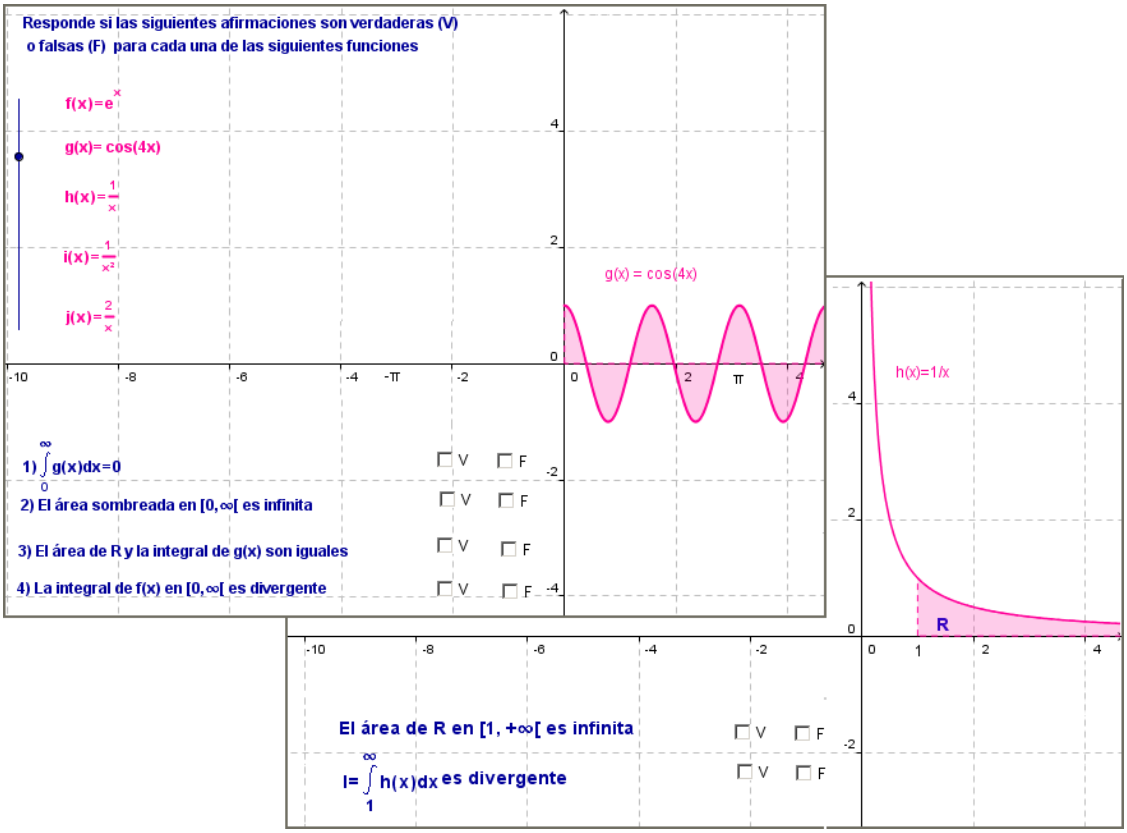


Figura 7. Actividades relacionadas con las integrales impropias

La experiencia en el aula

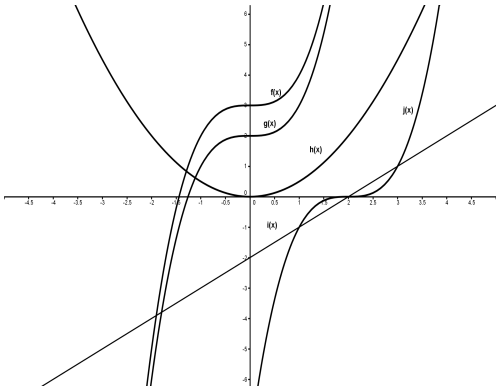
La población estudiada estuvo constituida por los 13 alumnos del primer nivel de Ingeniería Electrónica del año 2010 de la Facultad Regional San Nicolás.

En primera instancia se trabajó el tema integrales indefinidas de forma tradicional con la intención de comprobar luego si los alumnos pueden lograr por sí mismos la conversión entre las distintas representaciones. La secuencia de enseñanza se desarrolló de la siguiente manera: se definió primitiva de una función, se analizó su relación con el concepto de derivada, se definió integral indefinida de una función, se analizaron las propiedades de la integral, e inmediatamente se comenzó a trabajar con los métodos y técnicas para su resolución.

El desempeño de los alumnos para realizar las distintas conversiones, trabajando el tema de integrales indefinidas, fue evaluado en dos etapas. En la primera se utilizó como herramienta de evaluación un trabajo práctico obligatorio e individual, constituido por un cuestionario conceptual, a carpeta abierta y en la segunda etapa el parcial correspondiente de la asignatura.

En la Figura 8 se muestra parte del cuestionario conceptual.

1. Dada una función y = f (x), y sabiendo que F(x) es una de sus primitivas, se pide calcular la integral indefinida de y = f´(x) y relacionar el resultado con F(x).
2. Dadas las siguientes gráficas de funciones reales, se pide:



a) Señalar qué gráficas son primitivas de la función real k(x)= $3x^2$ .Justificar las respuestas.

b) Dada la integral indefinida: I= $\int \frac{x^2}{2} dx$, indicar en la gráfica qué función puede ser una de sus primitivas.

c) Escribir en símbolos una integral indefinida cuya primitiva sea i(x).

d) Explicar porqué la función j(x) no puede ser una primitiva de la función i(x).

3) Explicar cuál es la relación entre I(x)= $\int \sqrt{x} dx$ y $g(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}}$ + C

Figura 8: Parte del cuestionario conceptual

El análisis de los resultados obtenidos en las dos etapas de evaluación, teniendo en cuenta las diferentes conversiones, se presenta en la Figura 9. Tratándose de la penúltima unidad del programa y después de haber trabajado en las unidades anteriores insistiendo en las distintas formas de representación, se suponía que los alumnos lograrían solos las conversiones de registros en el tema de integrales indefinidas. Sin embargo, según los resultados obtenidos en el trabajo práctico conceptual, las únicas conversiones que fueron aprobadas por un porcentaje de alumnos superior al 50% fueron las del lenguaje gráfico al coloquial y del coloquial al gráfico. El resto está por debajo del 31% de alumnos aprobados. En el diálogo surgido con los alumnos mientras realizaban el trabajo, mencionaron su sorpresa por el tipo de problemas planteados, ya que esperaban ejercicios de cálculos para utilizar las técnicas vistas.

Luego del trabajo práctico se profundizó el trabajo de conversión de registros. Se dedicó una clase a revisar todos los problemas propuestos con el objetivo de discutir los errores cometidos. Se trabajó, además, con ejercitaciones extras en donde estuvieran presentes todas las conversiones.

A lo largo del curso, se utiliza la evaluación como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje. Álvarez Méndez [13], al referirse a una evaluación cualitativa, remarca que:

> *"La evaluación no es un apéndice de la enseñanza, sino parte integral del proceso en el que se dan la enseñanza y el aprendizaje, desempeñando funciones de diagnóstico, corrección, comprobación y prevención de necesidades, que no funciones de tasación sobre lo hecho, que ya es inevitable"*

Los temas siguientes, dentro de la misma unidad, se trabajaron reforzando los cambios de registro, utilizando las ventanas presentadas en la sección anterior, y se evaluaron de manera similar. El análisis de los

resultados obtenidos en el trabajo práctico sobre integrales definidas, se presenta en la Figura 10 donde se puede apreciar que son más alentadores.

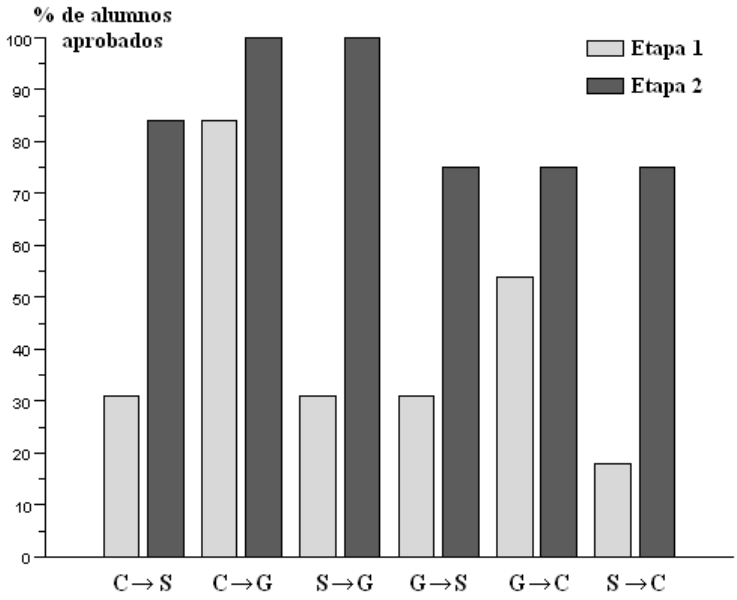


Figura 9: Resultados de las evaluaciones sobre integral indefinida
G: Lenguaje gráfico – C: Lenguaje coloquial – S: Lenguaje simbólico

Por último, se tomaron en el tercer parcial de la asignatura, las mismas conversiones que en el trabajo práctico conceptual sobre integrales indefinidas para analizar si mejoraban los resultados anteriormente obtenidos. Los resultados muestran que los ejercicios de conversiones fueron aprobadas por un porcentaje superior al 75% de los alumnos, cambiando por completo la situación anterior.

Se pudo observar una diferencia importante entre los resultados obtenidos en el trabajo práctico conceptual y los obtenidos en el parcial.

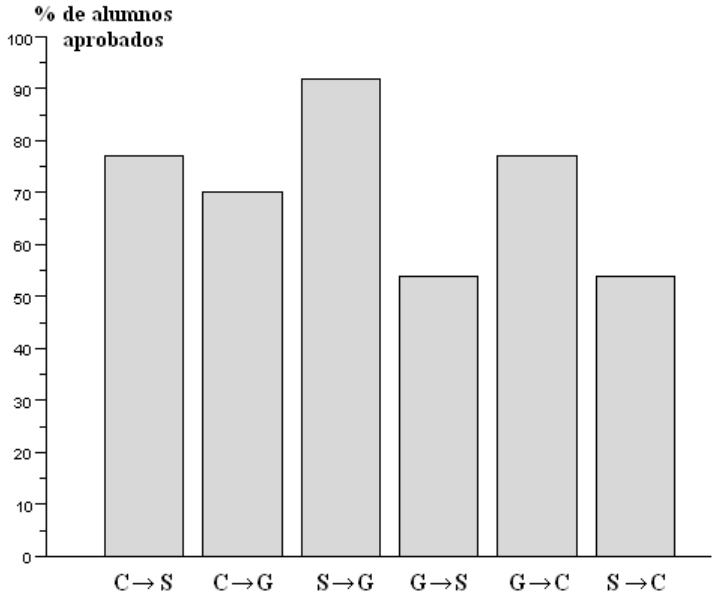


Figura 10: Resultados de las evaluaciones sobre integral definida
G: Lenguaje gráfico – C: Lenguaje coloquial – S: Lenguaje simbólico

Al terminar la unidad, con sus correspondientes evaluaciones, se entrevistó a los alumnos, con el fin de que los mismos relataran su experiencia en cuanto al aprendizaje del tema y dieran su opinión sobre el material utilizado. Las opiniones fueron muy favorables y en general manifestaron que las aplicaciones que más les habían gustado fueron las de actividades como las mostradas en las Figuras 6 y 7.

Se originó un diálogo muy interesante entre los docentes y los alumnos sobre los temas dados y la forma en que los estudian.

Conclusiones

Desde la práctica docente, se observa que los alumnos de primer año de ingeniería muestran dificultades en el aprendizaje de Análisis Matemático I. Además, su actitud hacia las disciplinas matemáticas suele ser, en general, de poco entusiasmo ya que no son el objetivo primordial de sus estudios.

La finalidad de este trabajo es contribuir a optimizar la formación matemática de los futuros ingenieros, incorporando la tecnología como recurso didáctico para favorecer la visualización dinámica de ciertos contenidos sobre integrales. Se pretende así, mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje tratando que los alumnos se formen representaciones mentales más adecuadas de los conceptos fundamentales y aumenten su interés por la materia. Se evidencia que los alumnos pueden lograr la conversión entre las distintas representaciones sólo cuando se insiste en esta actividad en el aula. Esto muestra la necesidad de trabajar de esta manera en todas las unidades didácticas de la asignatura en lugar de priorizar un solo registro.

La experiencia de uso de este material que se presenta fue muy productiva según la opinión de los propios alumnos y desde el punto de vista del docente. En las clases donde se utilizaron las animaciones como las expuestas en las figuras 3, 4 y 5, los alumnos se mostraron muy interesados no sólo en la explicación de los conceptos en sí, sino en preguntar sobre su confección ya que ellos, en general, tienen un manejo básico de GeoGebra.

En los parciales y finales de la materia se puede observar que muchos alumnos dan una respuesta imprecisa o errónea de la justificación a si una afirmación es verdadera o falsa. Las aplicaciones como las que se mostraron en las figuras 6 y 7 de este trabajo se confeccionaron con el objetivo de ejercitar este aspecto de la evaluación. Fueron utilizadas en clase como actividad de fijación sobre los cambios de registro luego de haber desarrollado los temas teóricos correspondientes. Esto generó una discusión grupal muy provechosa y motivó a los alumnos a realizar la sugerencia de extender esta forma de trabajo a otros contenidos de la asignatura.

Referencias

[1] Hitt, F. (2003) Dificultades en el aprendizaje del cálculo. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México.

[2] Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991) Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization? En Visualization in Teaching and Learning Mathematics. MAA Notes Number 19.

[3] de Guzmán, M. (1996). El Rincón de la Pizarra. El papel de la visualización. Capítulo 0. Pirámide, Madrid.

[4] Liang, H.N. & Sedig, K. (2010) Can interactive visualization tools engage and support pre-university students in exploring non-trivial mathematical concepts? Computers & Education, **54** 972–991.

[5] Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle Colombia. Traducción: Myriam Vega Restrepo.

[6] http://demonstrations.wolfram.com

[7] "Integration Is a Sum" from The Wolfram Demonstrations Project. Contributed by Daniel de Souza Carvalho http://demonstrations.wolfram.com/IntegrationIsASum/

[8] "Improper Integrals" from The Wolfram Demonstrations Project Contributed by Bruce Atwood http://demonstrations.wolfram.com/ImproperIntegrals/

[9] Stewart, J. (2002) Cálculo. Trascendentes tempranas. Editorial Thomson Learning. México.

[10] Larson, R., Hostetler, R. y Edwards, B. (1995) Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 1. Editorial Mc Graw Hill. Madrid.

[11] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. (1969) Análisis Matemático. Volumen I. Editorial Kapelusz. Buenos Aires. Argentina.

[12] Anton, H. (1991) Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 1. Editorial Limusa. México.

[13] Álvarez Méndez, J.M. (1987). Didáctica, Curriculum y Evaluación. Ensayos sobre cuestiones didácticas. Buenos Aires: Miño y Dávila. Perkins, D. (1992). La Escuela Inteligente. Del adiestramiento de la memoria a la educación de la mente. Barcelona: Gedisa.