PERTURBACIÓN DE TEOREMAS EN LA INGENIERÍA

Fernando Acero, Marcela Martins
Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires, Argentina.
facero@fi.uba.ar , mmartins@fi.uba.ar

Palabras clave. Teorema. Perturbación. Estabilidad.

Resumen. En la enseñanza de la matemática en carreras de ingeniería, diversas razones han conducido a que las pruebas de la mayoría de los teoremas del cálculo sean omitidas, con la potencial pérdida de los niveles de comprensión de los conceptos matemáticos. ¿Puede esta pérdida ser neutralizada sin restituir la demostración misma? El presente trabajo tiene por objetivo probar que puede responderse afirmativamente, centrando el enfoque en las perturbaciones que ligeras alteraciones de las premisas provocan en los resultados. Fundado en la estructura lógica de la proposición condicional, se desarrolla y aplica el método sobre dos teoremas clásicos. El alcance del enfoque es extendido en la discusión de los resultados.

I. Introducción

Una parte esencial de la formación básica en la ingeniería está atravesada por teoremas centrales del análisis matemático. El dicho 'eso puede ser correcto en la teoría, pero no sirve para la práctica', es contestado por Kant con "*Nadie puede decirse prácticamente versado en una ciencia y a la vez despreciar la teoría, pues así mostraría simplemente que es un ignorante en su oficio*"[1]. Si se acepta este dictamen, debe también aceptarse que una carrera de ingeniería debiera extremar sus recursos para apreciar esos sustentos básicos de su disciplina

Sin, embargo, muchas de las demostraciones de los teoremas incluidos en el currículum de las carreras de ingeniería son omitidas, ya por su naturaleza técnica, ya por su extensión, restando sólo su enunciado, en el mejor de los casos; esta economía tiene un precio: la muy probable pérdida del *sentido*[2] del modo en que las hipótesis intervienen en la estructura misma de la proposición. La noción de *estabilidad* de un teorema, vista como el grado de sensibilidad a alteraciones de esas hipótesis, permite una aproximación intuitiva a un teorema como una estructura cuyo estado experimenta *perturbaciones* como respuesta a alteraciones en sus partes.

"*Una prueba o demostración lógica consiste en presentar una proposición como la consecuencia necesaria de otras, sin afirmar nada acerca de la verdad fáctica de las premisas o sus consecuencias*"[3]; esa es precisamente la estructura de un teorema, en el que se deducen de las premisas los resultados que no pueden sino ser aceptados, *si* se aceptan aquéllas. Si la validez de un teorema es independiente de los modos en que un individuo puede llegar a comprobarlo, este no es el camino seguido por la comprensión del sentido del teorema. La historia de la matemática enseña que, en sus orígenes, su proceder no fue el de deducir de un conjunto de axiomas la validez de otro conjunto de resultados que llamamos teoremas sino que, por el contrario, los axiomas son cronológicamente posteriores a los teoremas, aunque lógicamente los precedan. Ya el mismo Aristóteles hacía un pequeño catálogo de actitudes, que no han perdido vigencia: "*hay hombres que no admiten otras demostraciones que las de las matemáticas; otros no quieren más que ejemplos...otros encuentran el rigor de las demostraciones insoportable*"[4].

En dos obras ya clásicas [*Les aspects intuitifs de la mathematique*, 1946; *La causalité des théories mathématiques*[5], 1934], Georges Bouligand, vincula la intuición en matemática y la idea de causalidad; del muy amplio rango de contenidos de ambos textos son relevantes para este artículo, los que vinculan la causalidad con el condicional lógico, estableciendo una estrecha relación entre un teorema y la noción de causalidad, ya que, afirma, "*las conclusiones son interpretadas como efectos que resultan de la elección de las premisas... donde la idea de causa está en primer plano*"[6], lo que no difiere demasiado de las opiniones aristotélicas que consignáramos. Esta identificación entre causalidad y necesidad lógica de un teorema sólo se vería hoy como confusión del plano lógico y epistemológico: al decir de Mario Bunge, "*los textos de lógica no son el lugar adecuado para examinar el problema causal*"[7]. Sin embargo, la insistencia de Bouligand no deja lugar a dudas: *premisas e hipótesis desempeñan un papel causal*, dice, y es desde este punto de partida que surge la idea de las *teoremas inestables* (y estables), al asociar la causalidad con la continuidad; si de verdad se ve detrás de un teorema un *mecanismo de causalidad*, entonces resulta legítimo –afirma– hacerse una pregunta acerca de lo que se denomina la continuidad de tal mecanismo: "*si se ha establecido una cierta conclusión por medio de un sistema irreducible de hipótesis, en un campo de premisas fijado de antemano ¿qué ocurrirá si se modifica este*

[1] El nombre original del texto de la cita de Kant es Über de Gemeinspruch: Das mag in der Theorie richtig sein, taugt aber nicht für die Praxis, cuya traducción aproximada es, justamente: 'sobre el refrán: eso puede ser correcto en la teoría, pero no sirve para la práctica'. KANT, I. (2008): p. 11.
[2] Cf. FREGE, G. (1985): p. 53; u. i. § 4.
[3] COHEN, M. y NAGEL, E. (2000a): C. VII, § 1, p. 155.
[4] Cf. los diversos pasajes ARISTÓTELES (1967d): LIV, C. III, n. 2, p. 113; LII, C. III, p. 83; ARISTÓTELES (1967e): L I, Sección II, pp. 9-11.
[5] BOULIGAND, G. (1974); BOULIGAND, G. (1962).
[6] BOULIGAND, G. (1976): p. 70; BOULIGAND, G. (1962): p. 12.
[7] BUNGE, M (1997): P. IV, C. 9, § 9. 6. 1, p. 337.

sistema de hipótesis y se lo sustituye por otro que puede presentar con aquél un parentesco arbitrariamente estrecho?"[8].

Para el estudio de la estabilidad ante las deformaciones de los componentes de los teoremas, tal como se efectúa en este artículo, no es necesario adherir a la interpretación causal de Bouligand. El análisis que resulta, puede ser un inestimable modo de generar aprendizajes significativos en la enseñanza de teoremas cuya prueba es de una naturaleza técnica que actúa a menudo de obstáculo para una profunda comprensión del sentido, necesidad, o suficiencia de sus hipótesis; además, es claro el interés intrínseco que en el área misma de la matemática se desarrolla mediante un análisis de eta naturaleza; por último, estimula la imprescindible intuición que permita construir un juicio acerca de alguna norma de lo que habrá de entenderse por un *parentesco arbitrariamente estrecho* entre las hipótesis.

II. Fundamentación

Desde que la matemática se ha asentado en los fundamentos formales, se admite que el carácter de los términos en los enunciados es necesariamente sincategoremático, o como lo expresa enfáticamente Quine, "*tenemos que reconocer que son sincategoremáticos. No son definibles aisladamente sino en contexto...*sólo *inteligibles como fragmentos de términos mayores"*[9]. La pregunta inicial ¿cuál es el sentido de las hipótesis de un teorema para quien no recorre la demostración misma del teorema?, tiene entonces una respuesta inequívoca: ninguno, dado que son precisamente las relaciones entre las partes las que explican las partes mismas.

Y es precisamente ésta la función, que en este trabajo, se asigna al análisis de la estabilidad: dar la oportunidad de captar las relaciones establecidas, sin necesariamente efectuar la prueba del teorema mismo. Su eficacia se sigue lógicamente de que es imposible analizarse la estabilidad de un teorema sin, al mismo tiempo, establecer las conexiones implícitas en la estructura misma del teorema. En cualquier caso, la aprehensión del sentido a su vez reconfigura, como se sabe desde Piaget[10], las estructuras mediante las cuales se hacen posibles las *representaciones*, ahora dotadas de *sentido*.

El análisis de la estabilidad de un teorema ante las deformaciones de sus hipótesis tiene otro efecto. Si bien es claro que la demostración misma dota naturalmente de sentido a las hipótesis del teorema, se han hecho algunas advertencias en lo que hace al pensamiento matemático avanzado: las investigaciones demuestran que una prueba rigurosa y formal no necesariamente es al mismo tiempo una prueba convincente que comunique la *comprensión de por qué el resultado es verdadero* ni engendra en el alumno la visión de que es un paso inherente a la disciplina y "*no sólo una respuesta dada por el texto a una cuestión que el estudiante no se preguntó"*[11]. El análisis de la estabilidad de un teorema, no siendo una demostración, obliga al mismo estudiante a formular los términos de la pregunta acerca de la intensidad o calidad de las perturbaciones que sobre la tesis tienen la 'ligeras' deformaciones de las hipótesis.

Dado que cualquier análisis de la estabilidad de un teorema se fundamenta en la implicación lógica, es conveniente un sumario de su estructura. *La lógica, vieja o nueva, investiga implicaciones*[12], decía un autor ya clásico que preferiría distinguir entre *implicación* y *condicional*, para reconocer las diferencias entre la posibilidad de que mediante técnicas legítimas pueda decirse un enunciado *se sigue lógicamente* de otro, de modo que una expresión como $p \rightarrow q$ no es sino un condicional, en tanto que la implicación sería la validez del condicional, esto es que no existiera ninguna interpretación o asignación de valores veritativos a p y q para los que el condicional resultase falso; dicho brevemente por Quine *la implicación es la validez del condicional*, y es de lamentar que el símbolo $\rightarrow$ sea leído como *implica* cuando debiera leerse *sólo si*. Lamentable o no, lo cierto es que tal distinción sólo se halla en escasos libros de texto, y no se distinguirá en este trabajo.

En su origen, la implicación, tal como la define la lógica moderna, aparece con Filón de Megara, que la caracteriza como "*verdadera si y sólo si no comienza con verdad y termina con falsedad*"[13]. En la lógica moderna, la implicación fue reintroducida por Gottlob Frege (1879) y Peirce (1885), y para pesar su importancia basta recordar la declaración de Russell: *la matemática pura es la clase de todas las proposiciones 'p implica q'*[14]; en *Principia Mathematica* se declara que si "*una proposición q se sigue de una proposición p, de forma que si p es verdadera, q debe ser también verdadera, decimos que p implica q*", y es en virtud de esta propiedad de 'retención de la verdad' que se logran las pruebas. Los autores definen, pues, la implicación $p \rightarrow q$ como determinando que no puede darse el caso que p sea verdadero y q falso, o lo que es lo mismo, que debe darse el caso de que p sea falso o q sea verdadero, lo que les permite caracterizarla a través de la disyunción y la negación, tal como se define en la expresión [1][15].

[1] $p \rightarrow q \,.=.\, \sim p \vee q$ Df. [También se escribe $(p \rightarrow q) \stackrel{\text{def}}{=} (\sim p \vee q)$]

[8] BOULIGAND, G. (1976): pp. 73, 75; BOULIGAND, G. (1962): p. 17.
[9] QUINE, W. V. (1986): § 7, pp. 90, 92.
[10] PIAGET, J. (2001): Parte I, § 2, p. 37; PIAGET, J. (1995): Parte II, § 4. 1, pp. 128-129, § 3, I, pp. 112-115.
[11] ALIBERT, D. y THOMAS, M. (1991): pp. 216-217, y los citados LERON, U. (1983a): pp. 174-184; LERON, U. (1985b): pp. 674-676; LERON, U. (1985): pp. 7-13; LERON, U. (1985b): pp. 321-325; GRENIER, D., et al (1984); LEGRAND, M. y RICHARDS, F. (1984).
[12] QUINE, W. V. (1986): § 16, 166.
[13] LUKASIEWICZ. J. en DEAÑO, A. (1985): pp. 38-45.
[14] Cf. QUINE, W. V. (1993): P. I, § 3, p. 43; FREGE, G. (1972); FREGE, G. (1985).RUSSELL, B. (1982): p. 3.
[15] WHITEHEAD, A. N. y RUSSELL, B. (1981): P. I, S. A, pp. 150; *1, *1.01, p. 154.

Según la definición, cuando se tiene como válido que $p \rightarrow q$, entonces o p es falso o q es verdadero; *por lo tanto*, si p es verdadero, q es verdadero, que la característica básica de retención de la verdad, ahora deducida como una consecuencia de [1]. El signo '=' tiene aquí el sentido de una definición (esto es dejando a izquierda el definiendum y el definiens a derecha), de lo que se da cuenta con el término 'Df.' a la derecha de la expresión completa.

También, pertinente a este trabajo, es la distinción introducida en *Principia Mathematica* entre una proposición que está aseverada (esto es' $\vdash$ p') o solamente considerada (esto es 'p'), resultando así que la inferencia es en realidad [2a] o [2b][16], dos expresiones que hablando estrictamente son diferentes, ya que la primera asegura que dadas como verdaderas la implicación y el antecedente, se concluye como verdadero el consecuente, en tanto que la segunda sólo enuncia una proposición compuesta (en este caso verdadera para todos los valores veritativos de las componentes); un modo menos estricto (y más corriente) de expresar [2a] es [2c], llamada *modus ponendo ponens* expresión derivada de la palabra latina *ponere* (afirmar, sostener una posición) y que significa que, afirmando (cuando afirmamos p), afirmamos (cuando concluimos q)[17].

[2a] $\vdash p \,.\, \vdash p \rightarrow q \,.\rightarrow.\, \vdash q$

[2b] $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

[2c] $p \rightarrow q;\ p;\ \therefore q$

Una distinción entre inferencia e implicación imputa la primera al proceso mediante el cual es válido concluir una proposición de otra, mientras que la última es la relación objetiva entre las premisas que hace válida la inferencia; también se ha propuesto, bien que vanamente, reservar el nombre de *prueba* para el proceso que está esquematizado en [2a], y *demostración* para el habitual de exhibir la conexión de implicación entre dos proposiciones p y q sin preguntarnos de a veracidad de ninguna de ellas, lo que correspondería más bien a la expresión [2c]. En este trabajo, y siguiendo el uso corriente, no se distinguirá entre *demostración* y *prueba*[18].

Así caracterizada la estructura de la implicación, se comprende la dificultad para precisar lo que pueda entenderse como el 'impacto sobre la tesis de las deformaciones de las hipótesis', puesto que si se tiene el teorema $p \rightarrow q$, no resulta de manera alguna que una alteración de p a p' (y en la lógica bivalente una alteración de p es una negación de p) conduzca a una determinación de una nueva q', dada la conocida tautología *ex falso sequitur quodlibet* materializada por la expresión [3].

[3] $\sim p \rightarrow [p \rightarrow q]$ (*ex falso sequitur quodlibet*)

El siguiente apartado desarrolla cómo precisar lo que puede entenderse por 'parentesco estrecho' entre hipótesis, esto es qué sentido adjudicar a expresiones como 'pequeñas deformaciones de las hipótesis conducen a pequeñas alteraciones de la tesis', lo que se escribirá de modo sugestivo como la expresión [4].

[4] $\cong p \rightarrow \cong q$

La expresión anterior debe entenderse, en algún sentido que es precisado en el apartado siguiente, como la posibilidad de mantener la alteración de la proposición q pequeña, a condición de hacer suficientemente pequeña la alteración introducida en la proposición p.

III. Desarrollo

Se desarrolla en este apartado el detalle del análisis de las perturbaciones de un teorema del cálculo integral de funciones de varias variables y se presentan las líneas gruesas del correspondiente análisis de un teorema del cálculo diferencial de una variable.

Sea el teorema clásico del cambio de variables en el cálculo de integrales dobles, por primera vez presentado por Euler para espacios euclídeos bidimensionales hacia 1769 [De formulis integralibus duplicatis, Novi comn. acad. scient. Petrop. 14, Opera 17, p. 303][19].

[5] Sea el campo escalar $f: A \rightarrow R$, el campo vectorial $g: B \rightarrow R^2$, con $A \subset R^2$, $B \subset R^2$, f continua en A, g de clase C^1 en B, A = g (B), B y A conjuntos compactos en R^2, con fronteras ∂A, ∂B conjuntos de contenido nulo, g inyectivo en B (excepto, posiblemente, en un conjunto de contenido nulo en R^2); entonces se verifica:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B f(g(u,v))\left|\det g'(u,v)\right| du\,dv$$

Se puede observar que, en realidad, la hipótesis es una conjunción de proposiciones, de modo que el teorema [5] tiene la forma lógica de una proposición condicional del tipo [1], con el antecedente p compuesto de una conjunción lógica $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5$, esto es $p .=. p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5$.

[6] $p \rightarrow q, \quad p = p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge p_5$

[16] WHITEHEAD, A. N. y RUSSELL, B. (1981): Int., C. I, p. 62.
[17] COHEN, M y NAGEL, E. (2000b): V, § 1, p.120.
[18] COHEN, M y NAGEL, E. (2000b): Int., § 2, p.18.
[19] HAIRER, E. y WANNER, G. (1997): Chap. IV, § 5, 5.25, p. 338.

p_1: A = g(B), p_2: A, B son compactos, p_3: ∂A, ∂A son de contenido nulo en R^2
p_4: $f \in C^0$ (A), $g \in C^1$ (B), p_5: g es inyectiva en B – N, con N de contenido nulo en R^2
q: $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B f(g(u,v))\left|\det g'(u,v)\right| du\,dv$

Para definir lo que significa que una proposición p' tenga con p un *parentesco arbitrariamente estrecho* debería preguntarse (y aquí es nuevamente necesario definir una medida) cuán lejos queda una nueva q' (que no sería ya el consecuente de p') de la condición q (esto el consecuente de p). Suponiendo que en el teorema [6] se modifica uno de los componentes de la hipótesis, el que exige la inyectividad del campo vectorial g ¿qué significa un campo vectorial que está próximo a ser inyectivo? Y todavía más, ¿cómo asegurarse una definición que se mantenga con sentido para todos los objetos del teorema? Se procede en este apartado a fijar cuatro objetos específicos: el campo escalar f y el conjunto A definidos por [7], el campo vectorial g y su correspondiente dominio definidos por [8].

[7] f: $A \subset R^2 \to R$ tal que $f(x, y) \stackrel{def}{=} 1$
$A = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = 1\}$
[8] g: $B \subset R^2 \to R^2$ tal que $g(u, v) \stackrel{def}{=} (v \cos u, v \operatorname{sen} u)$
$B = \{(u, v) \in R^2: 0 \le u \le 2\pi + \delta, 0 \le v \le 1, \text{con } \delta > 0\}$

Las hipótesis de [6] que se cumplen con esta selección son inmediatas: el círculo A es la imagen a través del campo vectorial g del rectángulo B, esto es que se verifica la componente de la hipótesis p_1 expresada por [9].

[9] p_1: A = g(B)

Se debe además verificar la componente llamada p_2, esto es que los conjuntos A y B resulten compactos; conforme a la definición estricta, se debería probar que tanto para A como para B se verifica que de cualquier cubrimiento abierto puede extraerse un subcubrimiento finito; sin embargo, a partir del lema de Heine–Borel puede simplificarnos la tarea, en tanto asegura que todo conjunto acotado y cerrado en el espacio euclídeo (con la topología inducida por su métrica), es compacto[20]; pues bien, resulta inmediatamente que tanto el círculo A como el rectángulo B son conjuntos acotados y cerrados, de modo que queda verificada la condición [10]. No se deja de observar, que en esta verificación, se ha utilizado a su vez *otro* teorema que sí estamos admitiendo sin ninguna merma ni deformación de hipótesis.

[10] p_2: A, B son compactos

En cuanto a la condición acerca de las fronteras de los conjuntos A y B se observa que ∂A es la circunferencia unitaria centrada en el origen, en tanto que ∂A está dada por los lados del rectángulo cuya base mide $2\pi + \delta$ mientras que su altura es 1; aquí, nuevamente, no se verifica la nulidad del contenido de estos conjuntos cubriéndolos con una sucesión de conjuntos cuya medida total resulte nula, sino que se hace indirectamente mediante una condición suficiente que, para estas fronteras rectificables, asegura la nulidad de su contenido[21]; se puede, pues, escribir [11].

[11] p_3: ∂A, ∂A son de contenido nulo en R^2

Por otra parte, f es claramente continua (es de hecho de clase C^∞) en A, en tanto que g es clase C^1 en B, (es de hecho de clase C^∞); entonces, se puede legítimamente escribir [12].

[12] p_4: $f \in C^0$ (A), $g \in C^1$ (B)

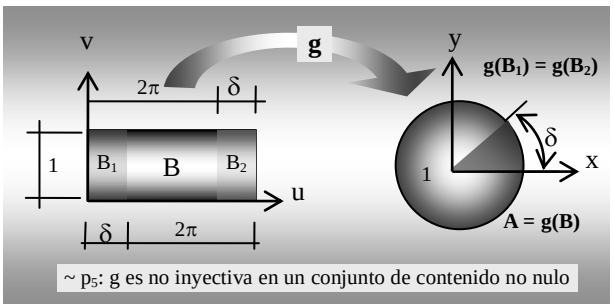


Ilustración 1. La no inyectividad del campo vectorial g en el dominio $B = \{(u, v) \in R^2: 0 \le u \le 2\pi + \delta, 0 \le v \le 1, \text{con } \delta > 0\}$

Sin embargo, se observa que no se puede predicar la inyectividad del campo vectorial g en su dominio B, puesto que se puede decir que el conjunto $B_2 = \{(u, v) \in R^2: 2\pi \le u \le 2\pi + \delta, 0 \le v \le 1\}$, y el conjunto $B_1 = \{(u, v) \in R^2: 0 \le u \le \delta, 0 \le v \le 1\}$ son tales que $B_1 \ne B_2$, $B_1 \subset B$, $B_2 \subset B$, $g(B_1) = g(B_2)$, de modo que g pierde su

[20] Cf. ARMSTRONG, M. A. (1991): Chap. 3, §3.1, Theorem 3.1, p. 44; KOLMOGOROV, A. y FOMIN, S. (1975): C. II, § 6, Teorema 2; REY PASTOR, J. et al. (1965c): C. XXIV, § 94, 2, d, teorema 7, p. 9; REY PASTOR, J. et al. (1965a): C. VI, Nota III, p. 403; REY PASTOR, J. et al. (1968): C. XVIII, Nota II, pp. 181-182, § 64.4, nota 3, p. 114.
[21] Cf. LANG, S. (1976): C. XIII. § 2, pp. 275-277; REY PASTOR, J. et al. (1968): C. XXI, § 82.2, Def. 1-2, teoremas 1- 3, notas 1-2, pp. 404-406.

inyectividad en el conjunto B_2, que ciertamente no es de contenido nulo, dado que, de hecho, su medida es $\mu(B_2) = \delta$, siendo $\delta > 0$. Esto es, se ha probado [13].

[13] $\sim p_5$: no es el caso que g es inyectiva en el conjunto B – N, con N de contenido nulo.

La situación es ahora la siguiente: la proposición p ha sido deformada, de modo que es ahora una nueva proposición que se designa por p' y que, para las funciones f y g que se están considerando, y los específicos conjuntos A y B sobre las que las han sido definidas, puede caracterizarse por [14].

[14] $p' \overset{\text{def}}{=} p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge p_4 \wedge (\sim p_5)$

Una forma de asignar una distancia entre las proposiciones p y p´, considerando por [14] que sólo difieren en la no nulidad de la medida del conjunto donde se pierde la inyectividad, podría ser definida a través de la medida de ese conjunto, según [15].

[15] $d(p, p') \overset{\text{def}}{=} \mu(B_2) = \delta$

Ahora bien ¿qué ha sucedido con la proposición q? La igualdad ya no se sostiene, de modo que q' es en este caso no otra cosa que ~ q, esto es [16].

[16] $$q': \iint_A f(x,y)\,dx\,dy \neq \iint_B f(g(u,v))\left|\det g'(u,v)\right| du\,dv$$

Se podría, entonces, asignar una medida a la distancia d* (q, q') entre q y q' a través del módulo de la diferencia entre los dos miembros de la desigualdad, esto es por medio de la expresión [17].

[17] $$d^*(q,q') = \left| \iint_A f(x,y)\,dx\,dy - \iint_B f(g(u,v))\left|\det g'(u,v)\right| du\,dv \right|$$

Ahora bien, siendo f (x, y) = 1, es también f (g (u, v)) = 1, y como de [8] se tiene que det (g' (u, v)) = v, resulta así [18a] y [18b].

[18a] $$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A dx\,dy = \pi$$

[18b] $$\iint_B f(g(u,v))\left|\det g'(u,v)\right| du\,dv = \int_0^{2\pi+\delta} du \int_0^1 v\,dv = \pi + \frac{\delta}{2}$$

Así, por [17], [18a], [18b] resulta la expresión de la distancia entre las proposiciones q, q', dada por la expresión [19].

[19] $d^*(q, q') = \frac{1}{2}\delta$

Se observa que la anterior no es sino el área del sector circular obtenido de transformar el rectángulo B_2 a través del campo vectorial g; es aquí donde se habla de la continuidad del teorema T definido por $p \rightarrow q$, que puede escribirse en una notación más sugerente a través de la expresión [20], que puede leerse en un lenguaje de transformaciones en el espacio de las proposiciones: el teorema T transforma la proposición p en la proposición q, pudiéndose aseverar q toda vez que se asevera p.

[20] $T(p) = q$

La pregunta, entonces, de si se verifica la condición de continuidad[22] [21a] del teorema T, para la hipótesis p, con p' definido por [14], queda expresada de modo compacto mediante las expresiones [21b] o coloquialmente por [21c].

[21a] $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall p': d(p', p) < \delta \rightarrow d^*(T(p'), T(p)) < \varepsilon$
[21b] $\cong p \rightarrow \cong q \mathrel{.=.} \forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall p': d(p', p) < \delta \rightarrow d^*(q', q) < \varepsilon$ Df.
[21c] $p \rightarrow q$ es estable

[22] Cf. KOLMOGOROV, A. y FOMIN, S. (1975): C. II, § 1. 2, p. 59.

Es inmediato por [15] y [19] que bastaría tomar para cada ε el valor $\delta = \varepsilon$, para tener cumplida [20a], ya que si $d(p', p) < \varepsilon$, entonces por [17], [19] y [20] se tiene que $d^*(T(p'), T(p)) = d^*(q, q') = ½\ \varepsilon < \varepsilon$, de donde se concluye la continuidad en p del teorema [6], simbolizado por T. O también, si se acepta el lenguaje de la estabilidad, se dirá que *T es un teorema estable* en p, respecto a la componente de la inyectividad, esto es que pequeñas pérdidas de inyectividad sólo se propagan, en pequeñas desviaciones, de la igualdad entre las integrales (de hecho, puede decirse mucho más, y es un resultado que no estaba incluido en el enunciado del teorema original: se atenúan en el factor ½).

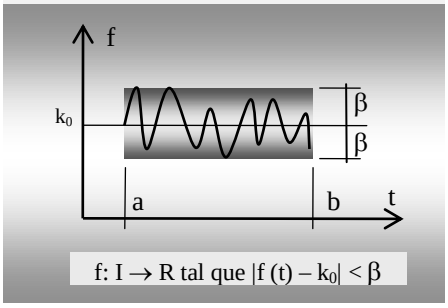
Sea ahora el teorema [22], que tiene la característica singular de la inestabilidad de una implicación y la estabilidad de su recíproca[23].

[22] Sea $f: I \to R$ una función C^1 definida en el intervalo real dado por $I = [a, b] \subset R$; f es constante en el intervalo I si y sólo si su función derivada es nula.

Atendiendo a la estructura lógica, se puede escribir el teorema como la conjunción de las dos implicaciones, esto es que podemos escribir la estructura del teorema como en [23].

[23] $p \leftrightarrow q$ **.=.** $(p \to q) \wedge (q \to p)$, siendo la proposición p dada por $p: f: I \to R$ tal que $f(t) = k \in R$, $q: f: I \to R$ tal que $f'(t) = 0$

Ilustración 2. Una función 'casi constante'



Interesa examinar lo que resultaría de una 'ligera' variación de p y q, para preguntarse, de un modo informal en qué medida se puede afirmar que una función es 'casi constante' si y sólo si su función derivada es 'casi nula'. A diferencia del tratamiento formal en el teorema anterior, se muestran ilustraciones que permiten conjeturar el resultado. En la Ilustración 2, con una función 'casi constante' en que el número positivo β puede hacerse tan pequeño como se quiera, sin por ello obligar a la función f a que su derivada sea también pequeña, lo que sugiere que el teorema es inestable ante pequeñas desviaciones de la constancia de la función. En la ilustración 3, en cambio, las funciones tienen en el intervalo derivadas 'casi nulas', pues se les exige que a lo sumo tengan un valor absoluto de valor menor que un número positivo δ arbitrariamente pequeño, obligando a su gráfico que emana del punto (a, f(a)), a apartarse del valor f(a) a lo sumo un múltiplo de ese número, por lo que puede visualizarse que el teorema es estable a las pequeñas perturbaciones de pendiente [La prueba formal es casi evidente, para cualquier número positivo ε se puede siempre escoger $\delta = \varepsilon / (b—a)$ tal que los valores de la función f no pueden diferir de f(a) en más que el prefijado ε, supuesto conocido el teorema del valor medio del cálculo diferencial]. Este es entonces un teorema en el que la estabilidad no es bidireccional, la extrema sensibilidad de la derivada a la modificación de los valores, por pequeños que sean, convierte al teorema en inestable en esa implicación, mientras que la acotada sensibilidad de los valores de la función a pequeñas variaciones de la pendiente, permiten la estabilidad del teorema en la implicación recíproca de la anterior. Es en este sentido que puede hablarse de la inestabilidad asimétrica del teorema.

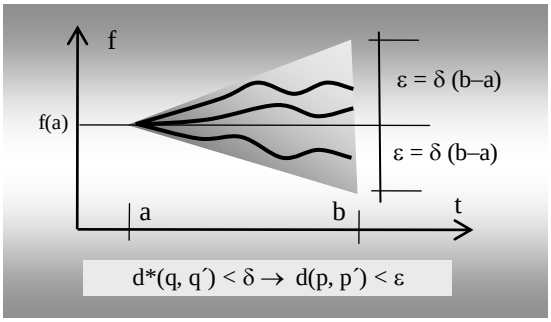


Ilustración 3. Pequeñas variaciones de la pendiente sólo conducen a pequeñas variaciones de los valores

IV. Resultados

El desarrollo precedente permite apreciar el modo en que el análisis del efectos de las perturbaciones introducidas en el teorema [5], interviene para dotar de significado una de las componentes (en el caso analizado, la inyectividad) de la hipótesis del teorema; es necesario observar, sin embargo, que ha sido hecho para un dado recinto y para un par de campos específicos. Podría hacerse un análisis similar respecto de cada una de las componentes y también, aunque ya sería posiblemente más costoso que la misma demostración, respecto de la conjunción de componentes que configuran la hipótesis.

Tanto el argumento del teorema escogido como objeto material para presentar la evidencia de la eficacia del método, como el resultado *matemático* específico obtenido (esto es la estabilidad del teorema ante la pérdida de inyectividad), son en realidad insumos del objetivo de este trabajo, esto es la presentación de la estrategia general con la que enfrentar la pérdida del sentido que pudiera traer aparejada la eliminación de las pruebas formales de los teoremas que son fundamentales en las carreras de ingeniería. El caso estudiado es un ejemplar, en el que se manifiesta de qué manera es posible dotar de significado a una cualquiera de las componentes de la hipótesis, bastando para ello introducir una métrica entre la hipótesis original y la hipótesis alterada, para examinar a continuación el modo en que la estructura del teorema se ve alterada por esa modificación.

[23] Cf. BOULIGAND, G. (1976): pp. 73, 75; REY PASTOR, J. et al. (1965a): Cap. IX, § 35. 3; KUDRIÁVTSEV, L. D. (1981a): § 11. 2, p. 218.

Si bien la introducción y construcción de tales métricas requiere de una habilidad mínima y una madurez matemática que posiblemente no sea exigible al aprendiz, es un asunto sencillo en manos del profesor, preocupado por la imposibilidad de efectuar las demostraciones de los teoremas, generalmente apremiado por la escasez del recurso tiempo en el desarrollo de las asignaturas de ingeniería.

Aunque el resultado de la estabilidad del teorema [5] se ha llevado a cabo en el apartado anterior con la formalidad propia de las pruebas que serían admitidas como válidas por la comunidad científica, detallando con cierto nivel de detalle cada una de las expresiones y exhibiendo el modo en que cada proposición se sigue necesariamente de otras, tal formalidad no es de manera alguna imprescindible, dado que el interés no es brindar una prueba de la estabilidad de un dado teorema, sino *utilizarla* para poner en evidencia en qué medida la alteración de una hipótesis perturba el resultado del teorema completo. Esto reduce todavía más la demanda del recurso temporal, pues basta con mostrar las líneas maestras por las que una deformación de la hipótesis altera las afirmaciones centrales del teorema. La diferencia sustancial se aprecia con un vistazo a las demandas que implicarían las pruebas formales en un libro de texto representativo cualquiera: seis páginas para una prueba incompleta con detalles a cargo del lector se encuentra en el texto de Hairer y Wanner[24].

Con el teorema [22], se ha preferido precisamente situar el análisis de la estabilidad en el registro gráfico, que da una descripción persuasiva[25] de la inestabilidad asimétrica del teorema, lo que en símbolos podría resumirse con [24].

[24] $p \leftrightarrow q$ es tal que $\sim [\cong p \rightarrow \cong q], \quad \cong q \rightarrow \cong p$

V. Conclusiones

El análisis de las perturbaciones que se originan en los teoremas por alteraciones de las hipótesis puede resultar una estrategia puntual que permita recuperar el sentido de algún aspecto específico de las hipótesis que resulta esencial para la comprensión del teorema.

El análisis no necesita llevarse a cabo de modo formal, como se ha procedido en el teorema [5], sino que bien puede efectuarse en un registro informal que resulte más atractivo, como se ha procedido en el caso del teorema [22], dado que no es la prueba de del tipo de estabilidad del teorema el fin último (aunque fuera de interés propio) perseguido en este trabajo.

La estrategia es especialmente apropiada en los teoremas cuyas pruebas son de una naturaleza técnica tal que exigirían demasiado tiempo para ser tratadas de modo significativo en las clases. El teorema [5] pertenece a esta clase. Cuando la prueba del teorema es, en cambio, sencilla, podría todavía ventajoso el análisis de la estabilidad, si produce una penetración del significado que no se alcanzara con la prueba formal, como es el caso del teorema [24].

Este trabajo constituye, pues, una vía practicable para que los significados profundos de los conceptos implicados en esas construcciones denominadas teoremas, no queden fuera del alcance de los estudiantes de carreras de ingeniería, a la vez que permite obtener resultados intrínsecamente valiosos en el seno mismo de la disciplina. Los análisis son, en principio, practicables sobre cualquier teorema. Por último, se hallan en sintonía con la práctica ingenieril, en la que constantemente es necesario hacer estimaciones acerca de las consecuencias de las desviaciones que inevitablemente deben preverse en la ejecución de los modelos.

VI. Referencias Bibliográficas

ALIBERT, D. y THOMAS, M. (1991): Research on mathematical prrof. En Tall, D. (Ed.). Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers: 215–230.

APOSTOL, T. (1976): Calculus. Volume I. One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

ARMSTRONG, M. A. (1991): Basic Topology. Barcelona: Springer-Verlag.

BIRKHOFF, G. & ROTA, G. C. (1989): Ordinary differential equations. New York: John Wiley & Sons.

BOCHENSKI, I. M. (1967): Historia de la lógica formal. Madrid: Gredos.

BOULIGAND, G. (1962): [La] causalité des théories mathématiques. Numérisation BnF de l'édition de Paris : Hermann, 1934 (Actualités scientifiques et industrielles ; 184 Exposés de philosophie des sciences, 3). Consultado el 04.12.2007 en [http://math-doc.ujf-grenoble.fr/].

BOULIGAND, G. (1974): Les aspects intuitifs de la mathématique. Paris: Gallimard, Collection L'Avenir de la Science.

BOULIGAND, G. (1976): Caminos intuitivos. En Le Lionnais, F., Las grandes corrientes del pensamiento matemático. Buenos Aires: Eudeba

BUNGE, M (1997): La Causalidad. El principio de causalidad en la ciencia moderna. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

COHEN, M. y NAGEL, E. (2000a): Introducción a la lógica y al método científico I. Buenos Aires: Amorrortu Editores.

[24] HAIRER, E. y WANNER, G. (1997): Chap. IV, § 5, 5.25, p. 338 ss.

[25] La persuasión a la que se hace referencia pretende ser la del tipo que genera una intuición de la validez de una afirmación como consistente con la lógica del problema, para distinguirla de una persuasión que produce creencia sin ciencia [Cf. PLATÓN (2007): §454e].

COHEN, M. y NAGEL, E. (2000b): Introducción a la lógica y al método científico II. Buenos Aires: Amorrortu Editores.
DEAÑO, A. (1985): Para la historia de la lógica de proposiciones. Traducción del artículo de JAN LUKASIEWICZ: Zür Geschichteder Aussagenlogik, Erkenntnis, Vol. 5, (1935-1936), pp. 111-131. Madrid: Revista de Occidente.
FREGE, G. (1972): Conceptografía. México: Universidad Autónoma de Máexico.
FREGE, G. (1985): Estudios sobre semántica. Madrid: Orbis.
GRENIER, D., LEGRAND, M. y RICHARD, F. (1984): L' Introduction du débat scientifique à l'intérieur du cours pour provoquer chez l'étudiants un processus du découverte et de prouve. Grenoble : Séminaire de didactique.
HAIRER, E. y WANNER, G. (1997): Analysis by its History. New York: Springer Verlag.
KANT, I. (2008): Teoría y Praxis. Buenos Aires: Leviatán.
KOLMOGOROV, A. y FOMIN, S. (1975): Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional. Barcelona: Editorial Mir Moscú.
KUDRIÁVTSEV, L. D. (1981a): Curso de análisis matemático. T. I. Moscú: Editorial Mir Moscú.
KUDRIÁVTSEV, L. D. (1981b): Curso de análisis matemático. T. II. Moscú: Editorial Mir Moscú.
LANG, S. (1976): Cálculo II. México: Fondo educativo interamericano.
LEEW, K. (1984): Calculus. Cuarta Edición. Buenos Aires: Eudeba.
LEGRAND, M. y RICHARD, F. (1984): Mathématiques expérimentales o une approche de la conjecture et de la preuve par l´étudiant. Paris : Colloque Ingénierie pédagogique dans l'enseignement supérieur.
LERON, U. (1983a): Structuring mathematical proofs. The american mathematical monthly, 90 (3), pp. 174-184.
LERON, U. (1985b): The diagonal method. Mathematics teacher, 76 (9), pp. 674-676.
LERON, U. (1985): Heuristics prentations: the role the structuring. For the lerning of mathematics, 5 (3), pp. 7-13.
LERON, U. (1985b): A direct approach to indirect prrofs. Educational studies in mathematics, 16, pp. 321-325.
LÓPEZ, C. (2007): La intuición y la matemática. Buenos Aires: Universidad de Palermo.
PEIRCE, C. S. (1986): La ciencia de la semiótica. Buenos Aires: Nueva visión.
PEIRCE, C. S. (1986): El hombre, un signo. (El pragmatismo de Peirce). Barcelona: Crítica.
PIAGET, J. (1995): Seis estudios de psicología; Colombia: Labor.
PIAGET, J. (2001): Psicología y pedagogía. Barcelona: Aique.
PLATÓN (2007): Gorgias. Madrid: Edaf.
QUINE, W. V. (1986): teorías y cosas. México: Universidad Autónoma de México.
QUINE, W. V. (1993): Los métodos de la lógica. Buenos Aires: Planeta.
REY PASTOR, J. PI CALLEJA, P. y TREJO, C. (1965a): Análisis Matemático, T. I. Buenos Aires: Kapelusz.
REY PASTOR, J. PI CALLEJA, P. y TREJO, C. (1968): Análisis Matemático, T. II. Buenos Aires: Kapelusz.
RÍBNIKOV, K. (1991): Historia de las matemáticas. Madrid: Editorial Mir Moscú.
RUSSELL, B. (1982): Los principios de las matemáticas. Madrid: Espasa Calpe.
SOBOLIEV, V. y LUSTERNIK, L. (1999): Précis d'analyse fonctionnelle. Paris : Editorial Mir Moscú.
WHITEHEAD, A. N. y RUSSELL, B. (1981): Principia Mathematica (hasta *56). Madrid: Paraninfo.