FUNCIONES, UNA REFLEXIÓN SOBRE SU ENSEÑANZA EN EL PERÍODO PREVIO AL PRIMER SEMENTRE EN CARRERAS DE CIENCIAS E INGENIERÍA.

Nélida Haydeé Pérez[1,2], **María Emilce Barrozo**[1,2], **Julio Benegas**[1,3],

Universidad Nacional de San Luis (UNSL). San Luis. Argentina

nperez@unsl.edu.ar ; mebarroz@unsl.edu.ar; jbenegas@unsl.edu.ar;

Eje temático: Dispositivos e institucionalización sistemática de apoyatura y gestión al Acceso y la Permanencia en los centros académicos.

Palabras clave: funciones, examen ingreso, comprensión de conceptos, aprendizaje significativo, enseñanza.

Resumen

El presente trabajo tiene como propósito analizar el comportamiento de los estudiantes en el tema de funciones, este análisis se orienta hacia una reflexión sobre la enseñanza de funciones que podría trascender como un aporte a los docentes responsables de los cursos de precálculo donde se aborda el tema.

Consideramos cinco preguntas de este tema; nuestra mirada abarca, dos universidades chilenas, una española y nuestra Universidad de San Luis, Argentina. Es un estudio descriptivo basado en la observación de la elección de las respuestas de los estudiantes a preguntas de opción múltiple.

Introducción:

Este trabajo forma parte de un estudio más amplio destinado a determinar el conocimiento matemático inicial y la capacidad de razonamiento científico de los alumnos ingresantes, y cómo estos factores inciden sobre el desempeño en las asignaturas Cálculo I y Álgebra I. (Barrozo, Pérez, Benegas, 2009)

El estudio mencionado, de tipo correlacional, mostró muy bajo nivel de conocimientos matemáticos de los alumnos ingresantes, con un rendimiento medio en el TCPM (Test de Conocimientos Previos en Matemática) de 42,3%. Este estudio se realizó con datos aportados por las evaluaciones tomadas a los estudiantes ingresantes a carreras de ciencias e ingeniería en la Facultad de Cs. Físico-Matemáticas y Naturales de la UNSL.

Teniendo en cuenta que los ítems utilizados eran de baja dificultad relativa, alcanzando sólo uno de ellos el nivel 4 de la escala de 1 a 6 utilizada por el relevamiento PISA 2003 (OECD PISA 2003b), el relevamiento confirmó, a nivel local, el bajo nivel de logro en matemáticas de los estudiantes argentinos no sólo en PISA 2003, donde un 75% estuvo ubicado en el nivel de logro bajo, sino también en el Operativo Nacional de Evaluación (ONE 2003).

Fundamentación:

El presente trabajo tiene como propósito analizar el comportamiento de los estudiantes en el tema de funciones, ya que numerosas investigaciones muestran que un tratamiento adecuado de contenidos relacionados con las funciones influye en el aprendizaje del cálculo diferencial.

Decidimos analizar más profundamente algunas preguntas del tema de funciones extendiendo nuestra mirada a otras regiones, para mejorar la construcción de los instrumentos de evaluación y especialmente hacer un aporte al grupo docente que tiene a cargo la enseñanza en los cursos de ingreso.

Este análisis se orienta hacia una reflexión sobre la enseñanza de funciones que podría trascender como aporte a los docentes responsables de los cursos de precálculo donde se aborda el tema.

Aspectos teóricos y metodológicos:

El concepto de función se puede mirar en diferentes marcos epistemológicos, es claro que no es suficiente con mirar a una función como una relación entre dos conjuntos, el concepto transita entre dos grandes contextos: algebraico y gráfico, además de la problemática central vinculada al concepto de función referida a los distintos registros de

[1] Centro para la Innovación Educativa en Ciencias Exactas y Naturales (CIECEyN)
[2] Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Física Matemáticas y Naturales.
[3] Instituto de Matemática Aplicada San Luis (IMASL)-Departamento de Física, UNSL/CONICET.

representación: fórmula, gráfico cartesiano, descripción verbal, tabla de valores. Duval (1995) plantea que una causa importante del fracaso escolar está relacionada con el pasaje entre las diferentes representaciones.
Si bien es importante el dominio de uno de los registros, Duval expresa: *"la comprensión (integradora) de un contenido conceptual reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión…la adquisición de los conceptos matemáticos es una aprehensión conceptual y la actividad con los conceptos matemáticos sólo se da a través de las representaciones semióticas, es decir un concepto matemático visto en sus distintas representaciones, proporcionará información específica, dando solidez al concepto"*. Duval R. (1993, p. 186)
Resulta importante aclarar qué entendemos por "comprender un concepto matemático". En nuestra concepción no quiere decir conocer la definición de tal concepto. Adoptamos aquí la postura de Anna Sierpisnka (1996) (y otros como J. Locke, Dewey y Hoyles & Noss por ella referenciados) los cuales consideran que intervienen en la comprensión cuatro operaciones mentales fundamentales, llamadas actos de comprensión:
Identificación, en el sentido de descubrimiento o reconocimiento, surge como objeto principal, como algo de interés y del cual se tiene la intención de comprender. *Discriminación*, se refiere a traer a nivel consciente la existencia de dos objetos distintos, notando no sólo la diferencia entre ellos, sino también sus propiedades relevantes. *Generalización*, este acto se refiere a la posibilidad de extender el rango de aplicaciones. *Síntesis*, es la percepción de enlaces entre hechos aislados: resultados, propiedades, relaciones, objetos, que permite organizarlos en un todo consistente.
Cualquier acto de comprensión concerniente a un concepto lo reduciremos al menos a una de estas categorías, este modelo comprende adicionalmente otra actividad: el uso. Usar no es un acto de comprensión, pero es ciertamente una condición necesaria para que un acto de comprensión ocurra.
La metodología usada es esencialmente cualitativa ya que a pesar que trabajamos con porcentajes, mediciones y datos precisos, el centro del análisis desde sus objetivos hasta sus conclusiones plantea como prioridad analizar los procesos subjetivos del aprendizaje, por otra parte, presentamos el estudio de tipo descriptivo basado en el análisis de la elección de las respuestas de los estudiantes. Tomamos como eje de comparación los aspectos cognitivos independientemente que se trabajó con test diferentes, dado que lo que nos interesa es analizar procesos de comprensión y dificultades identificables.
Desarrollo:
El análisis se realiza sobre una selección de cinco (5) preguntas sobre el tema funciones que estuvieron incluidas en diagnósticos aplicados a alumnos del primer semestre de carreras científicas en dos Universidades chilenas: Universidad de Santiago de Chile y Universidad Católica del Norte y otra española, Universidad de Alcalá y el Test de Conocimientos Previos en Matemática (TCPM) que consiste de 30 preguntas de opción múltiple que se toma a los ingresantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales después de un curso breve de Matemática.
Para la pertenencia sobre el nivel de dificultad de las preguntas, tomamos como referencia la escala del relevamiento PISA 2003 ("La evaluación de la Cultura Matemática", OECD 2003b) que propone 6 niveles. Observamos que en su mayoría los ítems de las pruebas corresponden a un nivel de dificultad medio–bajo, nivel 3.
Las pruebas de respuesta de opción múltiple son las recomendadas para evaluar poblaciones importantes de estudiantes en el área de Matemáticas (Luengo, 2001) pero entonces la confiabilidad del instrumento es relevante. Nuestro análisis se apoya en ítems que forman parte de instrumentos donde la confiabilidad y coherencia de los mismos ha sido reportada. (Mini, Pérez, Benegas, 2005)
El test utilizado en las Universidades de Chile y España constaba de 18 preguntas referidas a habilidades de razonamiento y conocimientos matemáticos considerados necesarios para cursar matemáticas y física en el primer año. El mismo fue aplicado a 636 alumnos de ingeniería en universidades chilenas y 57 de alumnos de biología en la universidad de España, en la primera semana de clase del primer semestre.
El test empleado en la UNSL es un prueba de 30 preguntas con respuestas de opción múltiple tomada al final del Curso de Ingreso 2008, a los 364 aspirantes de las carreras de Ingeniería, Física, Matemática y Computación.
Resultados:
Analizamos tres problemas sobre funciones lineales.
i) UNSL Ítem 28 Marzo08 – Nivel 3 PISA.

La ecuación de la recta que corta al eje y en -1 *y corta al eje x en* $\frac{1}{2}$ *es:*

A) $2x - y - 1 = 0$ *33%*

B) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$ *17%*

C) $\dfrac{x}{-\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{1}=0$ *17 %*

D) $\dfrac{x}{2}-y-1=0$ *27%*

No contesta 6%

Aquí podemos identificar un error conceptual: no relacionar que cada corte con los ejes coordenados es un punto *(x,y)* por el que pasa la recta. Más del 60% (suma de respuestas incorrectas) eligió las opciones que reflejan que tienen problema para trabajar con coordenadas; no identifican cuál es la primera componente del par y cuál la segunda. Además no se interpreta completamente la consigna, de acuerdo a las opciones elegidas y de los porcentajes obtenidos inferimos que les basta con que un punto pertenezca a ella, no consideran el dato de que la recta pedida debe pasar por dos puntos. Los examinados eligen como solución, la opción en que uno de los puntos dados pertenece a la recta y el otro no es considerado.

ii)UNSL *Ítem 29 Marzo08 – Nivel 3 PISA.*

La ecuación de la recta perpendicular a la recta ***r*** *y que pasa por el punto* $A(-2,2)$ *es:*

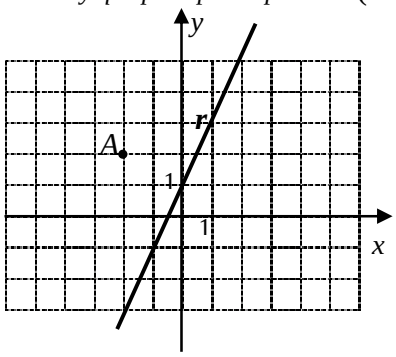
A) $y=-2x-2$ *20%*

B) $y=-\dfrac{1}{2}x$ *10%*

C) $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ *48%*

D) $y=2x+1$ *18%*

No contesta 4%



La opción A) fue la segunda más elegida, pero incorrecta, inferimos un error conceptual: desconocimiento de la relación existente entre las pendientes de rectas perpendiculares. La elección de la opción D) nos muestra problemas de interpretación, lectura rápida, se elige porque es la ecuación de la recta que aparece en el dibujo, pero no la que se pide. La elección de la opción B) refleja que el concepto de la relación entre pendientes de rectas perpendiculares se sabe, pero no se consideró el otro dato.

Ambos ítems, *28(i) y 29(ii)*, discriminan bien, con un coeficiente biserial alto, pero difieren bastante en el coeficiente de dificultad, 1,5 para el ítem 28 y 0,69 para el ítem 29, reflejando así la diferencia obtenida en el rendimiento.

	Ítem 28	
Opciones	Cantidad de estudiantes	%
A	**118**	**32**
B	61	17
C	63	17
D	98	27
N/C	24	7
	364	100

	Ítem 29	
Opciones	Cantidad de estudiantes	%
A	73	20
B	35	10
C	**176**	**48**
D	66	18
N/C	14	4
	364	100

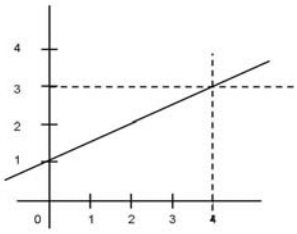
Nos parece interesante mostrar esta diferencia entre dos ejercicios del mismo tema, 32 % de respuestas correctas en el ítem 28 y 48 % en el ítem 29.

La principal diferencia entre estos, es la forma en que se presentan los datos. En el ítem 29 aparece un punto por el que pasa la recta pedida y, si bien no se explicita la pendiente, los alumnos parecen manejar las relaciones entre pendientes de rectas y perpendicularidad, además la presentación del gráfico ayuda a verificar la respuesta obtenida.

La dificultad del ítem 28 radicó probablemente en que no se daba como dato los puntos por los que pasaba la recta. Además las opciones presentan la ecuación general de la recta y no la ecuación canónica.

Por otra parte si bien en ambos ítems se está evaluando la construcción de la ecuación de una recta se incluye otro tópico, en un caso puntos de corte con ejes coordenados, y en el otro pendiente de recta perpendicular a una dada por un gráfico.

iii) Otras universidades (mencionadas en la introducción)



La ecuación de la recta de la figura es:

a)	y = ½ x +1	*68%*	b)	y = x + ½	*3%*
c)	y = 2 x + 1	*13%*	d)	x = ½ y + 1	*3%*
e)	ninguna de las anteriores	*7%*		no contesta *6%*	

Este problema (iii), tuvo un mejor porcentaje de rendimiento. Se trata de evaluar el paso del registro gráfico al algebraico, interpretar la gráfica dada y elegir la ecuación apropiada. Solamente pide identificar la gráfica con la ecuación.

El (ii) también requiere pasar de un registro gráfico a uno algebraico, pero se introduce un dato adicional, "perpendicular a la recta de la imagen", hay un proceso de comprensión del enunciado y de aplicación de conceptos y relaciones más complejo que el mostrado en el ejemplo (iii).

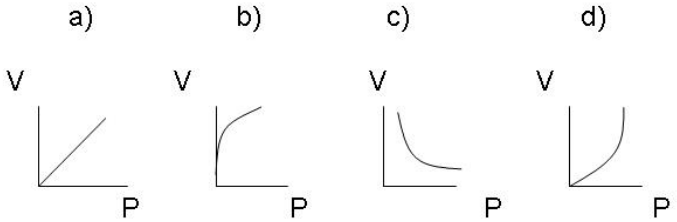
Sobre función de proporcionalidad inversa analizamos dos ejemplos de ejercicios tomados en universidades chilenas y la española mencionadas.

iv) Nivel 3 PISA

Ítem 6) En una clase de Física y Química se estudió la presión y el volumen con globos. Los estudiantes llevaron a cabo un experimento en el que cambiaban la presión ejercida sobre un globo y después medían su volumen. Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla:

Presión sobre el globo (N/cm^2)	*0,35*	*0,70*	*1,03*	*1,40*	*1,72*
Volumen del globo (ml)	*980*	*550*	*320*	*220*	*180*

¿Cuál de los siguientes gráficos representa correctamente los datos?



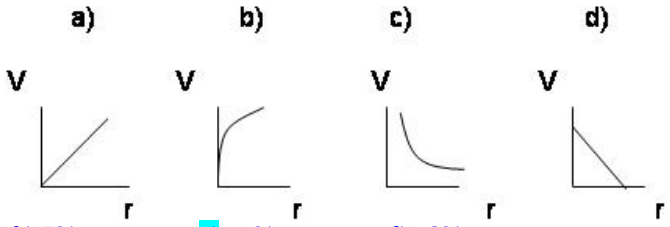
a) 1% *b)3%* *c) 87%* *d) 5%*
No contesta 4%

v) Nivel 4-5 PISA

Ítem 9) El valor del potencial eléctrico (V) a diversas distancias (r) de una carga puntual (Q) verifica la relación:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

¿Cuál de los siguientes gráficos correspondería a una relación de ese tipo?

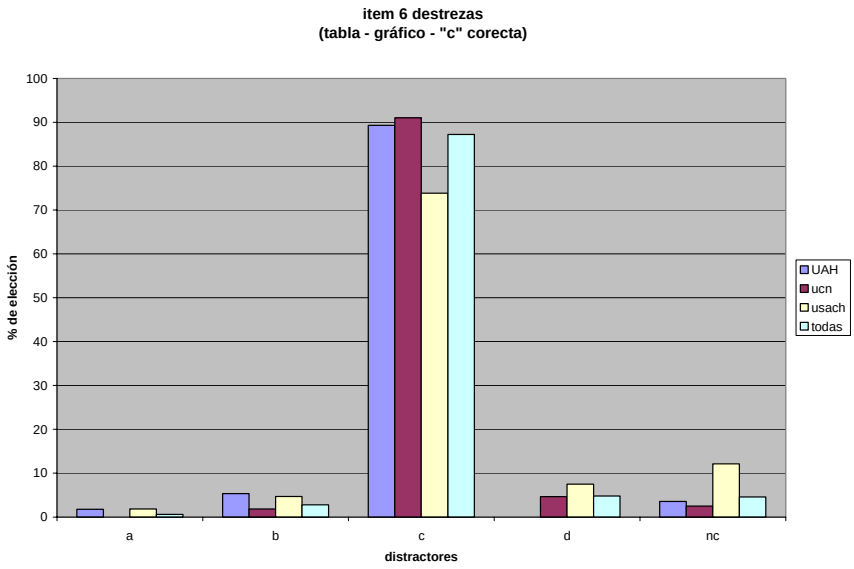


a) 7% *b) 7%* *c) 32%* *d) 18%*
no contesta 36%

Los dos ítems involucran la función de proporcionalidad inversa, pero la principal diferencia es la manera en que se presentan los datos, uno mediante una tabla de valores, y el otro a través de una fórmula.

El *ítem 6* (iv) exhibe una tabla de valores que muestra una relación de proporcionalidad inversa entre las variables presión y volumen, y a partir de ella los alumnos tienen que identificar cuál es el gráfico que representa dicha relación. El ítem tiene en general un muy buen rendimiento, el 87 % optó por la opción correcta, el resto de los distractores, prácticamente, no fueron tenidos en cuenta.

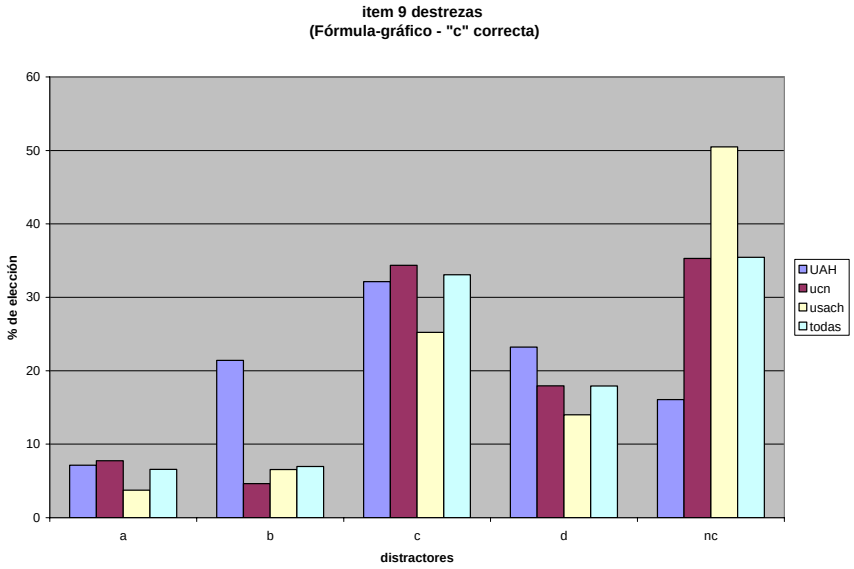
Sabemos que el primer acercamiento significativo de los estudiantes al concepto de función es sin duda mediante la construcción de tablas. Este método constituye una herramienta fuerte para elaborar conjeturas y especialmente se emplea para bosquejar gráficas.



Pensamos que esta familiaridad con el recurso ayudó a interpretar los datos numéricos y elegir la gráfica correcta, sin embargo del resultado favorable de este problema no podemos inferir la comprensión de la noción de proporcionalidad inversa. La presentación de los distractores no ofrecieron dificultades a los estudiantes, por ejemplo no figura una opción como la (d) del *ítem 9* (v), otra función decreciente.

Analizamos el *ítem 9*, el 32% de alumnos es capaz de reconocer el gráfico correspondiente a una relación inversa entre dos variables expresado a partir de una fórmula.

La dificultad principal probablemente radica en el hecho que aparece más de una letra en la expresión, lo cual muestra la falta de identificación y control de variables.



La elección de las opciones de respuesta estuvo más distribuida que en el caso anterior. El distractor más elegido (opción d con 18%) corresponde a una relación lineal con pendiente negativa, lo cual refleja que los alumnos desconocen funciones no lineales; sin embargo de la población que contesta, perciben que la relación es decreciente. Un 36% no responde, estimamos que no pudieron establecer ninguna vinculación entre fórmula y gráfico.

La fórmula involucrada es una relación de proporcionalidad inversa, sin embargo una dificultad clara es la presentación de la misma, aparecen varias letras, sólo una es la variable, la cuestión es que el estudiante debe relacionar el enunciado con el esquema cartesiano para deducir que la variable independiente es *r*. En la formula no está explícita la notación funcional $V(r)$.

Conclusiones

Respecto de los ejemplos (i) y (ii), observamos que para obtener la respuesta correcta se requería la concurrencia de

relacionar e identificar dos o más conceptos, posiblemente esta sea la razón del bajo rendimiento.
De todas formas pensamos que ítems del tipo (i) y (ii) deben formar parte de las evaluaciones, ya que permiten percibir "actos de comprensión". En vista de las dificultades observadas, deberíamos orientar la intervención pedagógica apuntando a la ejercitación de las operaciones mentales que se interponen en todo acto de comprender. La metodología de enseñanza debería ser un proceso de construcción de significados y uso de los conceptos de tal forma que la apropiación de estos conocimientos se de.
El mejor resultado del ejercicio (iii) es predecible, ya que en este caso solamente se requiere pasar del registro gráfico al algebraico y la presentación de las opciones de respuesta son del tipo $y = mx + b$, tiene menor complejidad que las preguntas (i) y (ii).
Siguiendo nuestro marco teórico (Sierpinska), comprender el concepto de función lineal y su representación, lo concebimos como el acto de captar su significado, este acto será de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares del concepto: recta que pasa por dos puntos, ecuación de la recta conocida pendiente y un punto, rectas perpendiculares, rectas paralelas, etc.-
Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión, de modo que se construya el significado de cada concepto y puedan identificarse y discriminarse en las preguntas de evaluación.
Compartimos lo que expresa Guzmán al referirse a registros de representación en una variable: *"las respuestas analizadas muestran deficiencias conceptuales y falta de coordinación entre los registros algebraicos, gráfico y lenguaje natural. Esto es una posible consecuencia de la enseñanza recibida por estos estudiantes". ... "La preparación es insuficiente en este tipo de tareas; estas traducciones y traslados requieren aprendizaje, como ya se ha mencionado; no surgen como acciones espontáneas del sujeto"*. (Guzmán I. 1998, p.20)
A partir de esta exploración se intentará exponer a los equipos docentes que intervienen en la organización de cursos preparatorios para el cálculo ciertas reflexiones y consideraciones surgidas de la investigación, que pueden aportar a desarrollar la comprensión de aspectos relativos a las funciones.
a) Recordar que la enseñanza del tema *funciones* debe acompañarse de la visualización que incluya la interpretación y comprensión de modelos gráficos y también desarrollar la habilidad para traducir en representaciones gráficas la información que es dada en forma simbólica o en otras formas como tablas, esquemas o lenguaje natural.
b) Considerar los distintos papeles que pueden jugar las variables y los parámetros, y las diferencias al hacer sustituciones, por ejemplo, en la expresión $y = ax + b$ tanto *x, y* (las variables) como *a,b* (los parámetros) representan números, pero los objetos matemáticos que se obtienen al efectuar la sustitución, son muy diferentes. En términos del plano cartesiano, sustituir valores para *x, y* fija un punto del conjunto de todos los puntos posibles, mientras que sustituir valores para *a,b* fija una recta del conjunto de todas las rectas posibles. Sugerimos que distinguir esta multiplicidad de significados que pueden tener los símbolos dependiendo del contexto y la capacidad de manejarlos es una componente del sentido de los símbolos que deben abordarse en la enseñanza. (Arcavi, 2008).
c) Exponer información, ejemplos, sobre la existencia de relaciones lineales y no lineales y analizar diferencias y semejanzas.
d) Crear las oportunidades durante el desarrollo de los temas para evaluar el grado de comprensión por parte de los estudiantes. La evaluación al final no ayuda a los estudiantes a mostrar sus desempeños de modo que puedan perfeccionar y retroalimentar su comprensión.
Como conclusión final, pensamos que debemos dirigir nuestra atención hacia las prácticas de aula. Desarrollar comprensión de conceptos, el sentido de propósito del uso de los símbolos y el poder que su uso y comprensión nos confiere sobre una gran cantidad de situaciones y problemas. Dar importancia a la visualización y reconocer que el aprendizaje de la matemática se favorece cuando se incorporan actividades que coordinen varios registros de representación.

Referencias Bibliográficas:

ARCAVI, A. 1994. "Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics". *For the Learning of Mathematics*. 14(3), pp. 24-35.
ARCAVI A. "El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos", conferencia dictada en Barcelona año 2008.
BARROZO E. – PEREZ N. – BENEGAS J. "Factores académicos que condicionan el aprendizaje de matemáticas en alumnos ingresantes a carreras de ciencias exactas e ingeniería" Memorias de 10º Simposio de Educación Matemática ISBN: 978-987-20239-6-6- Argentina (2009) (pág. 891 a 913).
BLYTHE**,** TINA. (1999) La enseñanza para la comprensión: guía para la docente. Buenos Aires. Edit. Paidós.
DUVAL, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa II. En F. Hitt (Ed.) (p.173 – 201). México: Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav.
FCFMyN (2008) Exámenes y ejercicios del TCPM: http://linux2adv.unsl.edu.ar/~webfmn/ingresantes/index.php?id=27
GUZMÁN, I. "Registros de Representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de los estudiantes". RELIME-1998-Nun.1.Pag. 5 – 21.

LUENGO M.A. Formación didáctica para profesores de Matemática . Edit. CCS. 2001. Madrid.
MINI M.A., PÉREZ N. y BENEGAS J.(2005) “Conocimientos algebraicos de los alumnos ingresantes a la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas y Naturales de la UNSL” *Actas de* Relme 19, p.101, Uruguay, http://www.clame.org.mx/documentos/alme19.pdf.
OCDE- PISA (2003b) La evaluación de la cultura matemática en Pisa 2003. Marco conceptual y actividades de la prueba. http://www.semur.edu.uy/index2.php?option=com_docman&task=doc_view&gid=36&Itemid=86.
OECD – PISA (2003a) Informe Nacional República Argentina PISA 2003 (Programme For International Student Assessment) http://diniece.me.gov.ar/index.php?option=com_content&task=view&id=10&Itemid=26.
ONE (2003) Operativo Nacional De Evaluación - DINIECE, Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación, 2003. http://diniece.me.gov.ar/index.php?option=com_content&task=view&id=7&Itemid=27
SIERPISNKA ANNA, Understanding in Mathematics, The Falmer Press,1996.
STONE WISKE M. La enseñanza para la Comprensión. Paidós. 2005.
Reconocimiento:
Este trabajo se realizó en el marco del Proyecto de Investigación "El rol del aprendizaje conceptual de la matemática y la física en el rendimiento de los alumnos de carreras de ciencias e ingeniería de la UNSL”, PROICO-3-2-0102, financiado por la Universidad Nacional de San Luis, JCB es miembro de la Carrera del Investigador de CONICET.