UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DEL LÍMITE

Clarisa Noemí Berman, Ana María Narvaez, Marcela Rodríguez, Carlos Bello
Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional. Argentina.
bercla@gmail.com, ana.narvaez@frm.utn.edu.ar, iqborbollon@speedy.com.ar, cab@frm.utn.edu.ar
Área temática: Investigación educativa
Palabras Clave: Límite funcional finito. Teoría APOE

Resumen
El objetivo de esta investigación es entender la problemática que se presenta con los estudiantes de primer año de Ingeniería de la Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional, en el tema Límite Funcional, para diseñar un material didáctico apropiado que les permita superar obstáculos cognitivos (en el sentido de Verignon). El marco teórico privilegiado es la Teoría APOE, (Dubinsky 1991,1996). Las conclusiones en esta etapa son: la ausencia de concepciones cognitivas en los estudiantes para comprender el Límite al nivel de *esquema*; la necesidad de la *interiorización* de los conceptos previos y la necesidad del replanteo del tratamiento didáctico que como docentes le estamos imprimiendo al objeto matemático.

Introducción

La enseñanza universitaria de Matemáticas en carreras de ingeniería tiene como eje central en Análisis Matemático I, el tema Límite Funcional. Es bien conocido el hecho de la dificultad de comprensión de este concepto en los estudiantes, tópico investigado por numerosos autores, entre los que destacamos a Sierpinska (1985, 1987), Cornu (1986, 1991), Cottrill y colaboradores (1996), Asiala y colaboradores (1996,1997), Artigue (1998) entre otros.

El propósito del presente trabajo es entender la problemática que presentan los estudiantes de primer año de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional en este tema, para diseñar un material didáctico que les permita superar obstáculos cognitivos (en el sentido de Verignon).

Fundamentación

Para lograr el objetivo, el marco teórico privilegiado en esta investigación-acción es la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) o APOS (Action-Process-Objet-Schema) que permite modelar la construcción mental matemática, se debe a Ed Dubinsky (RUMEC, Research in Undergraduate Mathematics Education Community), quien a partir del constructivismo de Piaget intenta explicar la forma en la que se construyen o se aprenden conceptos matemáticos.

El principio de aprendizaje en esta teoría es que un individuo no aprende los conceptos matemáticos directamente; si tiene las estructuras apropiadas, aprender es fácil, casi automático; si no las tiene, es casi imposible. Por lo tanto, la meta de la enseñanza debe ser ayudar a los estudiantes a construir las estructuras de mejor manera, y a conectar los conceptos matemáticos. Esta teoría está en continuo desarrollo (DeVries, 2001)

La siguiente proposición muestra la base de la Teoría APOE "*El conocimiento matemático es una tendencia individual a la respuesta, en un contexto social y construyendo y reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones"* (Dubinsky, 1996, p.32-33)

En este trabajo se considera que esta teoría cognitiva ofrece un soporte adecuado para la Didáctica de la Matemática universitaria, en el sentido que es un marco teórico en el cual es posible buscar soluciones o estrategias pedagógicas para la aprehensión del tema en cuestión.

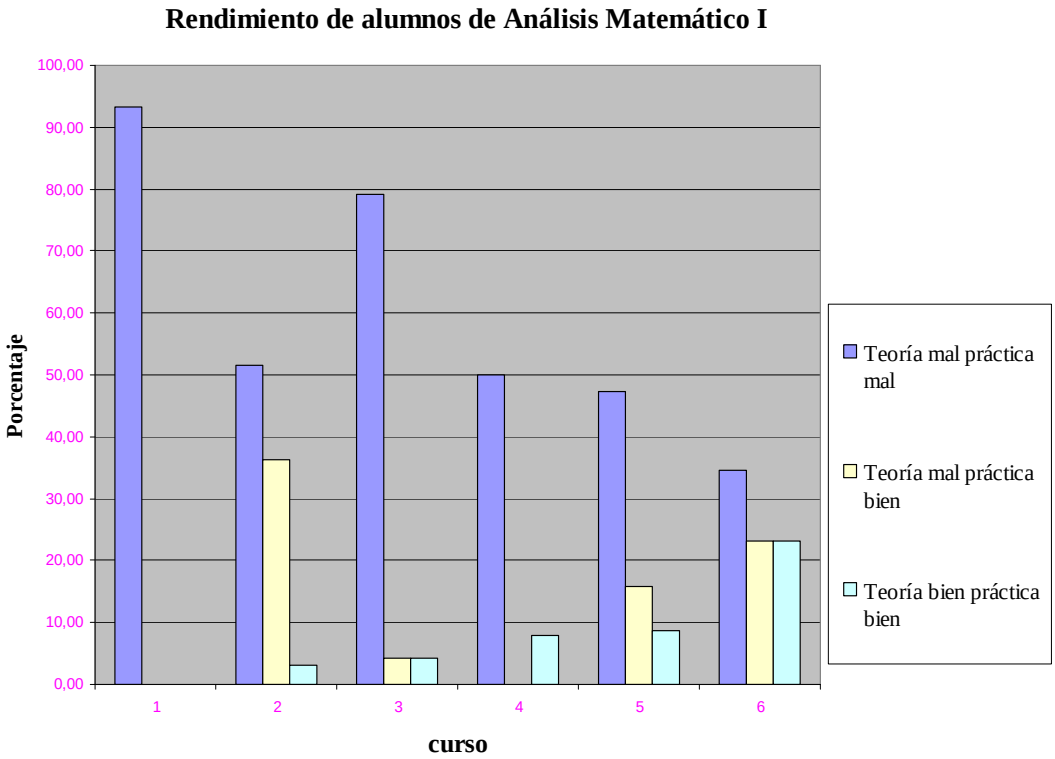
Desarrollo

La investigación comenzó analizando la evaluación denominada institucionalmente *primera evaluación global* realizada en 2009. Los estudiantes mostraron dificultad en dar una definición precisa de límite y una comprensión clara del mismo. Más aún, no se vio la coordinación entre el concepto y la aplicación propuesta que solicitaba determinar el valor δ que verifica la definición de límite para la función $f(x) = x^3-7$ en $x = 2$, con $\varepsilon = 0{,}6$ (en el otro tema, $f(x) = x^3-26$ en $x = 2$, con $\varepsilon = 0{,}4$).

Diagnóstico

El problema señalado ha sido detectado en el análisis de una muestra de exámenes de alumnos correspondientes a 6 cursos (180 alumnos) de Análisis Matemático I de una población de aproximadamente 500 alumnos distribuidos en 17 cursos.

Los resultados cuantitativos obtenidos en la muestra se observan en el siguiente diagrama:



Análisis de los resultados y posibles explicaciones

Los errores más comunes en la definición de límite son: ausencia del signo $\Rightarrow$; en lugar del signo $\Rightarrow$, escriben el signo $\Leftrightarrow$; no escriben los cuantificadores, solamente se observa la expresión $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$; además no pueden escribir en lenguaje semántico la definición de límite.

Los errores más comunes en el ejercicio son: no aplicar correctamente propiedades de valor absoluto; resolver la inecuación con valor absoluto, pero no llegar a obtener el valor δ; calcular los dos valores δ_1 y δ_2 correctamente pero no expresar conclusiones y/o interpretaciones; escribir $\delta = \ldots$ ó $\delta < \ldots$, en lugar de $\delta \leq \ldots$ para dar la respuesta. Cabe destacar la gran cantidad de definiciones incorrectas o no contestadas y ejemplos bien hechos, lo que estaría indicando la memorización del algoritmo de cálculo y/o la tarea rutinaria, dado que este trabajo había sido realizado en las clases ordinarias por todos los docentes, tanto en las llamadas clases teóricas como en las prácticas. A continuación se presentan tres producciones textuales de estudiantes que son revisadas a la luz de la Teoría APOE.

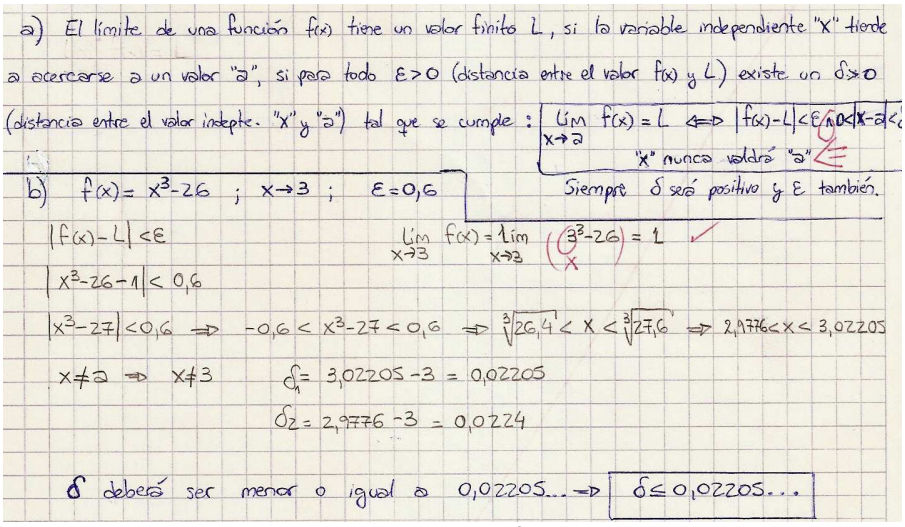


Imagen Nº 1: Foto de la producción del estudiante Luis

El examen de Luis muestra deficiencias en el tema en cuestión. Se observa que no realiza representación gráfica alguna, ni siquiera de la función, a pesar de ser muy sencilla (polinómica); no utiliza correctamente la simbología lógica y no aparecen verificaciones en ninguna representación semiótica.

Las siguientes son las producciones de Juan y Pedro, respectivamente.

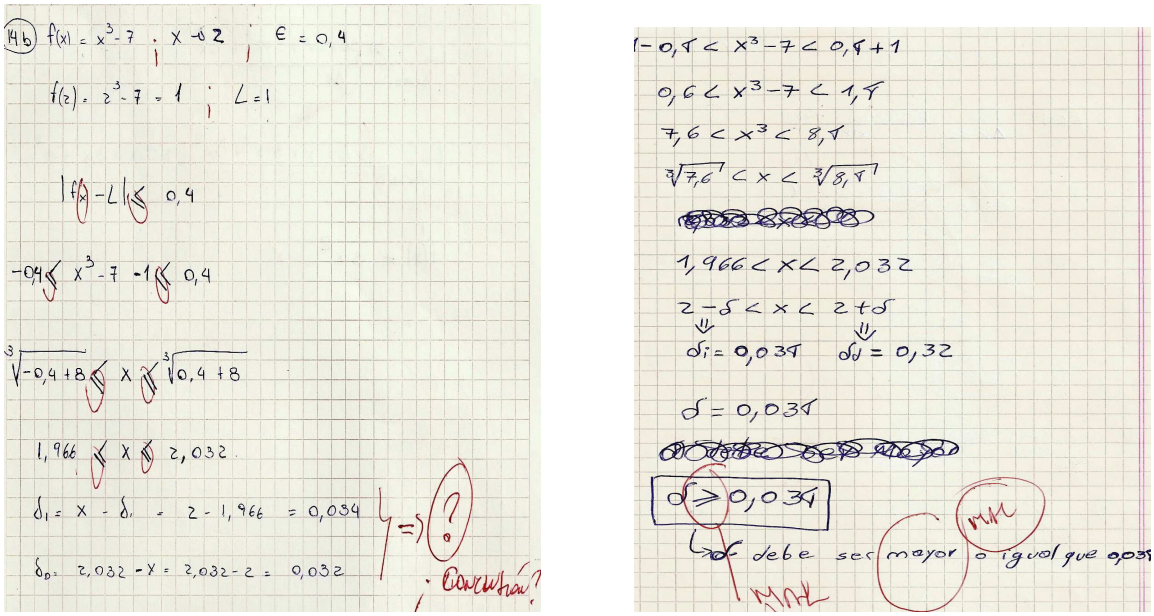


Imagen Nº 2: Fotos de la producción de Juan (izquierda) y Pedro (derecha)

El examen de Juan no contiene la definición de límite finito en ningún registro de representación, no se observa ninguna expresión en símbolos conteniendo el límite l. Se observa que está en la etapa de *acción* pues realiza los cálculos algebraicos, no pudiendo concluir respecto del valor adecuado δ. Parecería que, como dice Contreras, este estudiante ha enfrentado el conflicto semiótico "considerar que el entorno es siempre simétrico".

En el escrito de Pedro se observa que no aparece la definición de límite, que realiza un cálculo carente de sentido pues recuadra la expresión que considera δ mayor o igual que 0,034; no se observan gráficos ni verificaciones.

Hipótesis de trabajo

A partir del diagnóstico realizado y habiéndose revisado, a partir de la Teoría APOE, los trabajos prácticos de Funciones y Límites de Análisis Matemático I correspondientes al año 2009, la bibliografía de la asignatura y el cuadernillo del Seminario Universitario, se elaboran las siguientes hipótesis de trabajo.

H1) En el material de estudio correspondiente al curso de ingreso solo aparecen ejercicios rutinarios y no se observa una red de problemas que le otorguen significación a los conceptos matemáticos básicos para lograr la internalización de los mismos.

H2) En el material de estudio de la cátedra referido a los temas que son prerrequisitos para el estudio del Límite Funcional (conjuntos numéricos, distancia, inecuaciones, entornos y funciones) aparecen ejercicios que son utilizados, en general, sólo en las fases de acción y proceso (estadíos cognitivos de menor nivel desde el punto de vista de la teoría APOE).

Objetivo de investigación

Diseñar un material didáctico que permita superar a los estudiantes la insuficiente comprensión del concepto de límite funcional.

Ahora bien ¿cómo se realiza el diseño?

Metodología

La metodología de investigación es la Ingeniería Didáctica ya que la misma se caracteriza por un esquema experimental basado en "realizaciones didácticas" en clase (Artigue, 1995).

Diseño del Material de estudio

Para diseñar este material, se tienen en cuenta: la Teoría de Registros y Representación Semiótica (Duval, 1991), la teoría cognitiva APOE, el estudio histórico epistemológico del concepto involucrado y nuestra práctica docente.

A modo de ejemplo se presenta la siguiente actividad

Un fabricante diseña una pelota que tiene un volumen de 268 cm^3.
a) ¿Cuál es el radio de la pelota?
b) Si el volumen puede variar entre 266 y 270 cm^3 ¿cuánto puede variar su radio?
Utilice la definición ε - δ de límite para describir esta situación. Identifique ε y δ. Interprete gráficamente.

Nota: El enunciado se encuentra en libros de textos usuales y es utilizado en la enseñanza tradicional. ¿Qué se entiende por 'tradicional'?. Coincidimos con la respuesta de Barbosa Alvarenga, quien dice *entiéndase por enseñanza tradicional a un sistema pedagógico que no se fundamenta en una investigación científica en educación matemática y que, en general, no ha logrado avances en el aprendizaje de los conceptos matemáticos.* (Alvarenga, 2003, p. 199).

La actividad fue realizada en clase con alumnos de dos cursos durante el primer semestre de 2010. Se planteó el problema y se analizaron los distintos niveles de conocimiento alcanzado por los alumnos, los que fueron comparados con la descomposición genética realizada por Cotrill y colaboradores (Teoría APOE). Posteriormente, se indujo a los estudiantes a que avanzaran hasta alcanzar una concepción *objeto* del concepto definición de límite.

Los alumnos comenzaron a resolver el ejercicio de diferentes maneras. A continuación se muestra el orden del razonamiento utilizado por la mayoría de los alumnos. Comienzan utilizando la fórmula de volumen de una esfera y hallan el valor del radio correspondiente a 268, 266 y 270 cm^3, respectivamente, resolviendo algebraicamente la ecuación. Sin embargo, no pudieron interpretar gráficamente la misma, lo que implica que estaban en la fase *acción* del concepto función, puesto que obtenían algebraicamente valores en algunos puntos aislados pero sin interpretaban el concepto funcional gráficamente.

Cuando la mayoría de los estudiantes logró interpretar gráficamente la función volumen, se pasó a la segunda etapa, es decir utilizar los objetos matemáticos: inecuaciones y entorno, expresados mediante la notación de valor absoluto. Cabe destacar que si bien varios alumnos pudieron escribir la notación simbólica de límite funcional, otros tantos tenían dificultades en utilizarla, más aún en realizar los cambios de los distintos registros semióticos necesarios en el tratamiento.

Fue general la dificultad detectada en el pasaje del lenguaje semántico al sintáctico, es decir, en interpretar que el volumen que varía entre 266 y 270 cm^3 corresponde a la inecuación $|v(r) - 268| < 2$, donde $v(r)$ indica el volumen de la pelota en función del radio.

Frente a esta dificultad, el docente intervino induciendo a una primera expresión simbólica, la correspondiente a la inecuación $266 < v(r) < 270$. Posteriormente el docente expresó en lenguaje natural "la distancia de $v(r)$ a 268 debe ser menor de 2 unidades" para que los estudiantes escribieran simbólicamente la inecuación deseada.

No tuvieron dificultades en la resolución algebraica de la inecuación, pero persistía la dificultad de la interpretación gráfica de la solución de la inecuación como un subconjunto del dominio en la variable radio *r*. Es decir, estaban en la etapa *acción* del objeto matemático inecuación en sus dos concepciones: interpretación y resolución (Alvarenga).

Una vez alcanzada una concepción *objeto* de los conceptos ***inecuación*** y ***función*** se pasó a la tercera etapa, es decir la de elegir el valor δ que verifique la definición de límite. Aplicaron los pasos algebraicos en forma correcta y lograron interpretar la definición de límite gráficamente, puesto que habían realizado varios cambios en los registros de representación semiótica y tratamientos en cada uno de ellos.

A partir de la respuesta observada en los estudiantes frente a la actividad anterior, se ha realizado una descomposición genética, considerada como preliminar y que permitirá confeccionar el material didáctico deseado.

Resultado: Una Descomposición Genética

Como es bien conocido, parte de la teoría APOE consiste en analizar cada unidad de enseñanza para producir lo que se conoce como "descomposición genética del concepto", esta es una descripción de las *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas* involucrados en la enseñanza del concepto y de la manera en que se interrelacionan.

La descomposición propuesta es la siguiente:

1. la *acción* de evaluar *f* en puntos *x próximos y no tan próximos* a *a*.
2. la *acción* de evaluar la variable *x* para valores *próximos* de *f* a un cierto valor de la función (inversión según la teoría).
3. interiorización del paso (1) y (2) para construir un *proceso* – rango con radios variables en entornos con centro en l.
4. construcción de un *proceso*-dominio en el cual se observe la dependencia del entorno de *x* a partir del entorno en y. Observar la posibilidad de la asimetría del entorno con centro en *a*.
5. construcción del objeto "para todo ε existe por lo menos un valor δ".
6. coordinación de (3) y (4) a través de *f*. Es decir, la función *f* se aplica al *proceso* '*x* aproximándose a *a*' para obtener el proceso '*f*(x) aproximándose a l'.

7. reconstruir el *proceso* (6) en términos de desigualdades e intervalos
8. aplicar el *esquema* de cuantificación para vincular (5) y (7) y obtener una definición formal de límite.
9. encapsular (8) el objeto "definición de límite finito".

Conclusiones

Las conclusiones en esta etapa son: la ausencia de concepciones cognitivas en los estudiantes para comprender el Límite funcional al nivel de *esquema*; la necesidad de la *interiorización* de los conceptos previos, la insuficiencia del material de enseñanza y aprendizaje en cuanto a la calidad de las situaciones didácticas planteadas para promover la aprehensión del concepto y el replanteo general del tratamiento didáctico que como docentes le estamos imprimiendo al objeto matemático.

Se coincide con Cottrill, Dubinsky et al. (1996) que presentan como sugerencia didáctica fundamental concentrarse en la construcción de los procesos dominio y rango y en la aplicación de la función para lograr el vínculo entre ambos. Los estudiantes deben tener un manejo fluido de los cuantificadores.

En el artículo *Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas?* Artigue (1996) realiza un interesante resumen de las investigaciones y aportes que sobre el tema se podían recoger hasta la fecha. Reporta entonces las dificultades de los estudiantes con el campo conceptual del Análisis, clasificándolas en tres categorías no independientes: las ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos –números reales, funciones y sucesiones –, las ligadas a la conceptualización de la noción de límite y a su dominio técnico y las ligadas a la necesaria ruptura con los modos característicos de pensamiento algebraico.

En la primera categoría distingue las dificultades relacionadas con los ***números reales***: la consideración simultánea de que su orden es denso y de la existencia de un sucesor y un predecesor de un número real, o la falta de coherencia y convencimiento de la asociación entre los números reales y la recta real. También se refiere a las dificultades relacionadas al concepto de ***función:*** los conflictos que surgen de las diferencias entre la definición del concepto y la imagen conceptual que construyen los alumnos, la dificultad de sobrepasar una noción puramente de proceso del concepto para relacionar con flexibilidad sus dimensiones de proceso y objeto, las dificultades para relacionar los diferentes registros semióticos y elaborar traducciones adecuadas entre ellos y las dificultades presentes para trascender los modos de pensamiento numérico y algebraico.

El autor se basa en las investigaciones previas para afirmar que todos estos obstáculos se presentan también en el desarrollo histórico del concepto.

En segundo lugar, Artigue (1996) presenta como otra fuente de dificultades a la relacionada con la doble dimensión del concepto de límite: la de *proceso* y *objeto*. La posibilidad de manejar con eficacia estas dos dimensiones requiere del proceso cognitivo: *encapsulación* (según Dubinsky).

Por último, otra categoría importante de dificultades proviene de la complejidad lógica de la definición formal del concepto y el hecho de que necesita invertir la dirección del proceso función que va de la variable x a la imagen $f(x)$. Esta es una dimensión epistemológica del concepto cuya transposición didáctica en la enseñanza no es evidente.

Las reflexiones finales se refieren a la necesidad de realizar análisis didácticos continuos de los temas que se pretende sean aprehendidos por los estudiantes y la necesidad de investigar en Didáctica de la Matemática pues esta actividad elevará el nivel de los aprendizajes.

Referencias bibliográficas

Alvarenga, K. (2003) La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 6(3), 119-199.

Artigue, M., (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gomez (ed.) *Ingeniería Didáctica en Educación matemática. Un esquema para la investigación, la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* 33-59. Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1996). Learning and Teaching Elementary Analysis. En C. Alsina, M. Alvarez, M.Niss, A´erez, L.Rico, A.Sfard (Eds.), 8th International Congress on Mathematics Education – Selected Lectures, pp. 15-30. Sevilla: S.A.E.M. Thales.

Asiala, M.; Brown, N.; De Vries, D.; Dubinsky, E.; Mathews D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education. *Research in Collegiate Mathematics Education II. CBMS Issues in Mathematics Education 6*, 1-32.

Bergé, A. y Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(3), 163-197.

Contreras de la Fuente, A. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre sistemas de representación semiótica? XVIII JORNADASDEL SI- IDM, Castellón.

Cornu, B. (1983). Quelques obstacles á l'apprentissage des notion des limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques 4*, 236-268.

Cornu, B. (1991). Limits. En David Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking 1*, 153-166. Boston/London: Kluwer Academic Pres Dordrecht.

Cottrill, J.; Dubinsky, E.; Nichols D.; Schwingendorf K.; Thomas K. y Vidakovic D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema. *The Journal for Mathematical Behavior 15*, 167-192.
DeVries, D. Publicación electrónica. RUMEC/APOS theory glossary. Obtenido en http://www.cs.gsu.edu/rumec/Papers/Glossary.html en junio de 2002.
Dubinsky, E. (1991). The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics, en L. P. Steffe (ed.), *Epistemological Foundation of Mathematical Experience*. Nueva York: Springer-Verlag.
Dubinsky, E. (1996). Una aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática postsecundaria. *Educación Matemática 8*(3), 24-45.
Narvaez, Ana María (2006).*Una reflexión sobre los que fueron considerados inútiles, inservibles, imposibles, y ocultos números complejos.* Tesis de Maestría. Instituto de Matemática. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.
Sierpinka, A. (1985). La notion d'obstacle épistémologique dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de la 37e Rencontre CIEAEM*, 73-95. Leiden.
Sierpinka, A. (1987). Obstacles épistémologique relatifs á la notion de limite. *Recherches en Didactiqué des Mathématiques*, *6*(1), 5 -67.
Valdivé, C., Garbin, S. (2008). Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 11*(3), 413 - 450.