REVISIÓN CRÍTICA DE LA CONTEXTUALIZACIÓN MATEMÁTICA QUE INVOLUCRA CONCEPTOS "FÍSICOS"

Analía Zabala; Ivonne Esteybar; María del Carmen Berenguer; Analía Moyano
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de San Juan, Argentina
azabala@unsj.edu.ar ; iesteybar@unsj.edu.ar ; mcberenguer@unsj.edu.ar ; anamyo75@yahoo.com.ar

Área temática: Articulación y extensión
Palabras Claves: Articulación; Contextualización; Validación de modelos.

Resumen

En este trabajo se realiza un análisis crítico de algunas situaciones problemáticas que se presentan en los libros de texto para contextualizar conceptos matemáticos que involucran conceptos físicos erróneos.
El modelaje matemático es un recurso que contribuye a facilitar el proceso de aprendizaje del alumno; sin embargo, para que el mismo promueva el conocimiento perenne es preciso una contextualización adecuada que permita al alumno realizar una validación del modelo; caso contrario, se fomenta el hecho de que los estudiantes se aíslen del contexto y busquen la solución de la situación problemática planteada haciendo uso de conceptos sin significado y de técnicas memorizadas que nunca comprendieron.

Introducción

En general, los resultados en las evaluaciones de Matemática muestran que el mayor porcentaje de errores está asociado a la interpretación de gráficos y análisis crítico de los valores numéricos obtenidos al resolver una situación problemática.
La situación refleja una dificultad en la situación de enseñanza-aprendizaje de la matemática; que se da en la escuela media y en el ciclo básico universitario.
En la enseñanza de la matemática, hay que propiciar un aprendizaje basado en los significados por sobre las técnicas, otorgando un sentido al conocimiento matemático, en donde se establezca un lazo con los usos de la Matemática.
La enseñanza de la Matemática a través de problemas contextualizados es un recurso que, como ya se ha demostrado en el trabajo de numerosos investigadores, contribuye en gran manera a facilitar el proceso de aprendizaje del alumno. Sin embargo, para que el mismo promueva el conocimiento perenne es preciso que el proceso de traducción esté formulado correctamente; solo así el alumno puede extender a la realidad las conclusiones obtenidas mediante su análisis y/u operación.
Para el desarrollo de una "convivencia simbiótica" de las matemáticas con otros saberes se precisa del desarrollo de un lenguaje común que haga posible el mutuo entendimiento y la comunicación.
Ya que la construcción de los modelos físicos plantea la inclusión de parámetros y constantes que reflejan la dimensión de las relaciones entre las variables del modelo; es necesario una contextualización adecuada que permita al alumno realizar una validación del modelo comparando el sistema modelo con el real; caso contrario, el aprendizaje se reduce a una memorización de fórmulas y algoritmos que con el tiempo se olvidan. El docente de matemática debe procurar reducir en sus clases el desarrollo de ejercicios de memoria en forma mecánica sin la debida comprensión. Si realmente quiere contribuir a un aprendizaje significativo de sus alumnos, debe realizar un uso adecuado de los Fundamentos de Física involucrados en la contextualización de conceptos matemáticos.
Por todo lo dicho se hace necesario un mecanismo de articulación entre las distintas asignaturas del Ciclo Básico Universitario, que permita mejorar la enseñanza de la matemática a través de una construcción colaborativa en la que participen todos los actores involucrados, que conduzca a rediseñar estrategias de enseñanza que beneficien el aprendizaje significativo de nuestros estudiantes, lo que se traducirá, tal vez, en un paliativo del grave problema de deserción y desgranamiento que afecta a los primeros años en las carreras de ingeniería.
La principal meta del grupo de Investigación-Acción conformado en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de San Juan es formular propuestas de mejora que faciliten el ingreso y desempeño de los alumnos, en el ciclo básico universitario.
En ese sentido la articulación entre las distintas asignaturas del ciclo básico universitario aparece como un importante recurso estratégico que puede disminuir el desgranamiento, por razones académicas, de los alumnos, durante el primer año de la carrera elegida.
Con este propósito, en una primera etapa de trabajo, se realizó un análisis crítico de los problemas contextualizados con conceptos físicos presentes en los libros de texto de Matemática usados en el primer año de la carrera.
En este trabajo se presentan algunos ejemplos de problemas que por su inadecuada contextualización no permiten que el alumno realice una validación del modelo; pudiendo fomentar el hecho de que los estudiantes se aíslen del contexto y tiendan a buscar la solución en forma mecánica de cualquier situación problemática que se les plantee, perjudicando así el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Fundamentación

Mancipar de Katz (2009, Abril 22) opina que: La "Matemática que se enseña" es ese cúmulo procedimental, algorítmico, lógico formal, cargado de ejercicios irrelevantes y soporíferos (…)

(….) hay que propiciar un aprendizaje basado en los significados por sobre las técnicas, otorgando un sentido al conocimiento matemático, en donde se establezca un lazo con los usos de la Matemática (...).
(….) La modelización matemática, en tanto estrategia didáctica y pedagógica, asume a la actividad matemática como un proceso continuo de resolución de problemas encuadrados en contextos reales permitiendo, a su vez, la combinación de diferentes tareas, según las necesidades de aprendizaje de los estudiantes.
Por otra parte, Camarena (2008) afirma que: “Los estudiantes no tienen en claro por qué estudiar matemáticas y esto demerita la motivación hacia esta ciencia (…)” (p. 83).
Resulta importante que los estudiantes de los cursos de Matemática sepan y conozcan que la matemática es y ha sido un valioso instrumento a través del cual muchas disciplinas, técnicas y ciencias se van estructurando y o perfeccionando, y que muchas de sus funciones no serían factibles sin la utilización de ideas, conceptos, ejercicios y aplicaciones de matemática.
“La desarticulación que existe entre los cursos de matemáticas y las demás asignaturas que cursa el estudiante se convierte en un conflicto cotidiano para los alumnos” (Camarena, 2008, p. 83), lo que fomenta el hecho de que los estudiantes se aíslen del contexto y busquen la solución de la situación problemática planteada haciendo uso de conceptos sin significado y de técnicas memorizadas que nunca comprendieron.
El aprendizaje no es una simple reproducción de contenidos sino que implica un proceso de construcción o reconstrucción en el que cobran especial importancia los aportes de los alumnos, en este marco el papel del profesor es más complejo. El profesor pasa de ser un mero transmisor de conocimientos a ser un orientador o guía que también tiene como misión conectar los procesos de construcción de los alumnos con los significados colectivos culturalmente organizados.
Es por todo ello que en la actualidad hay un cierto consenso en que las competencias profesionales que los profesores de matemática tendrían que intentar desarrollar son las siguientes (Font, 2005):
a) Competencia en el domino de los contenidos matemáticos. Para ello, las matemáticas que debe saber el profesor no se pueden limitar a contenidos formales y descontextualizados organizados de manera deductiva. El profesor necesita saber también cuáles son las aplicaciones de las matemáticas al mundo real.
b) Competencia en la planificación y diseño de secuencias didácticas. El diseño de las unidades didácticas debe basarse, entre otros, en los siguientes aspectos:
- La información disponible sobre los contenidos del currículo.
- Los tipos de problemas que son el campo de aplicación de los contenidos matemáticos seleccionados.
- El conjunto organizado de prácticas institucionales, operativas y discursivas, que proporcionan la solución a los tipos de problemas seleccionados (contenidos procedimentales, conceptuales y formas de representación).

Con relación a las actividades diseñadas hay que tener presente que la naturaleza de la actividad de los alumnos en clase de matemáticas es una cuestión central en su enseñanza puesto que el aprendizaje es siempre el producto de la actividad, y si esta se reduce, por ejemplo, a la resolución repetitiva de ejercicios para aplicar ciertas fórmulas esto es lo que se aprende. Hay que procurar incorporar actividades que permitan superar el aprendizaje pasivo, como el uso de problemas contextualizados en contextos reales, uso de diferentes representaciones.
c) La capacidad de gestión de las secuencias didácticas en el aula. La gestión de la unidad puede llegar a ser más importante que las propias actividades que la componen ya que una actividad "rica", mal gestionada, normalmente termina siendo una actividad “pobre”. Las actividades didácticas se deben adaptar, ampliar o variar para tratar la diversidad de errores y dificultades que pueden presentar los alumnos.
Para ser competente en la planificación, diseño y gestión de secuencias didácticas tal como se ha formulado en los párrafos anteriores es necesario que el profesor sea competente en:
d) El análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos de los alumnos.
Estas cuatro competencias profesionales de los docentes de matemáticas tienen implicaciones importantes para su formación. Una formación matemática adecuada debe tener en cuenta las aplicaciones de las matemáticas al mundo real y a otras ciencias.
La necesidad de realizar la revisión crítica de problemas que involucran conceptos básicos de Física usados frecuentemente en la bibliografía para contextualizar algunos temas matemáticos, surgió ante las dificultades manifestadas por los docentes de matemática de los primeros cursos universitarios:

- Al orientar al alumno para que pueda realizar una validación del modelo o el análisis de de los resultados obtenidos si los mismas involucraban conceptos físicos.
- Para reconocer si la situación problemática propuesta corresponde a una “transposición didáctica” que muestra un significado sesgado o incorrecto.
- Conseguir la emergencia de los objetos matemáticos a partir de los contextos que involucran modelos estudiados en Física.
- Seleccionar los problemas contextualizados adecuados para promover un aprendizaje significativo.

Por ello, Godino (2003) recomienda que “(…) el profesor debe ser cuidadoso y hacer un uso crítico de los libros de texto. (….) Más allá de que la presentación sea agradable, que los ejercicios y problemas sean interesantes hay que cuidar que el contenido sea adecuado…” (p. 129).
Tanto en la enseñanza como en la investigación o las aplicaciones, las matemáticas conviven e interactúan con otros saberes, lo que ha dado lugar a fenómenos de adaptación. Entre estas adaptaciones, en ocasiones, surgen "deformaciones" o empleos incorrectos. Otro aspecto conflictivo se refiere a la dificultad de comunicación entre el matemático y el especialista en otras ciencias, de cara a la realización de trabajos en cooperación, debido al

empleo de lenguajes científicos diferentes en cada especialidad. Los usuarios de las matemáticas son los que plantean los problemas, pero es el matemático quien tiene las herramientas para su solución. En los procesos de planteamiento del problema al matemático por parte del usuario y de comunicación de las soluciones alcanzadas por el matemático, aparece un doble proceso de transposición didáctica de una a otra materia, en el cual pueden producirse desajustes que perturben la adecuada utilización de las herramientas matemáticas. (Godino, 2003).

Para el desarrollo de una "convivencia simbiótica" de las matemáticas con otros saberes se precisa del desarrollo de un lenguaje común que haga posible el mutuo entendimiento y la comunicación.

De acuerdo con Brousseau (1986) el trabajo intelectual del alumno debe ser en ciertos momentos comparable al de los propios matemáticos: el alumno debería tener oportunidad de investigar sobre problemas a su alcance, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiar sus ideas con otros, reconocer las que son conformes con la cultura matemática, adoptar las ideas que le sean útiles. Por el contrario, el trabajo del profesor es en cierta medida inverso del trabajo de matemático profesional: debe producir una re contextualización y una re personalización de los conocimientos, ya que debe buscar las mejores situaciones que den sentido a dichos conocimientos y ayudar al alumno en la búsqueda de las soluciones, las cuales serán sus propios conocimientos.

El fin primordial de la acción del profesor en el aula es ayudar a los alumnos a desarrollar el razonamiento matemático, la capacidad de resolución de problemas, de formulación y comunicación de ideas matemáticas y el establecimiento de relaciones entre las distintas partes de las matemáticas y restantes disciplinas. . (Carmen Batanero, Juan D. Godino y Virginia Navarro-Pelayo).

Si realmente quiere contribuir a un aprendizaje significativo de sus alumnos, el docente de matemática debe realizar una selección adecuada de las situaciones problemáticas que involucren conceptos de Física al contextualizar conceptos matemáticos.

Desarrollo

Contextualización

Nos referimos a contextualización como el proceso a través del cual se proporciona un ejemplo particular de un objeto matemático, proceso que va del objeto matemático a la realidad.

En la actualidad se observa una tendencia a la sustitución de las matemáticas formalistas por unas matemáticas más empíricas (contextualizadas, realistas, inductivas, etc.). Es decir, una concepción que considera que las matemáticas son (o se pueden enseñar como) generalizaciones de la experiencia; una concepción de las matemáticas que supone que, al aprender matemáticas, recurrimos a nuestro bagaje de experiencias sobre el comportamiento de los objetos materiales. (Vicenç Font, 2008).

La investigación en Didáctica de las Matemáticas ha resaltado la importancia que se debe dar a la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas a los contextos extra matemáticos. Algunas de estas investigaciones concluyen que la enseñanza de la Matemática a través de problemas contextualizados es un recurso que contribuye a facilitar el proceso de aprendizaje del alumno, sólo si están diseñados de manera que permitan al estudiante:

- Hacer uso de su experiencia real.
- La verificación lógica y matemática de los resultados, frente a la visión del profesor como única fuente de respuestas correctas.
- El razonamiento matemático, más que los procedimientos de simple memorización.
- La formulación de conjeturas y la oportunidad de reinventar los conceptos matemáticos, descartando el énfasis de la búsqueda mecánica de respuestas.
- La conexión de las ideas matemáticas y sus aplicaciones, frente a la visión de las matemáticas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.
- Comprensión de lo que ellos conocen y necesitan aprender.

Modelización

Es el proceso en el que se interpreta de forma abstracta, simplificada e idealizada un objeto, un sistema de relaciones o un proceso evolutivo que surge de la descripción de la realidad. (Font, V.) La modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto. (Camarena, 2008)

Las fases de este proceso cognitivo son: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo matemático. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad.

En ocasiones se espera que la respuesta a un problema matemático sea inmediata, que se responda sobre la marcha, sin una reflexión creativa (Barnett, 1988). En la educación formal de la matemática, cada problema tiene una solución, con frecuencia única, y, en todo caso, el profesor conoce esta solución. Esto es irreal e impide un "cultivo" idóneo de las matemáticas. Usualmente hay diversas técnicas matemáticas adaptadas para un problema dado. Además, cada una de ellas está basada en una serie de hipótesis de carácter teórico sobre los datos que en la realidad nunca se cumplen de forma exacta. El profesional matemático debe valorar, entre los diversos métodos disponibles, el grado de ajuste entre las hipótesis y los datos disponibles. La modelización matemática es con frecuencia altamente compleja y precisa de una destreza técnica sofisticada, así como un cierto nivel de

creatividad. Esto sólo se puede conseguir en sujetos con un cierto nivel de especialización y dedicación profesional. (Godino, 2003)
Al hacer uso de Modelos físicos para contextualizar objetos matemáticos se debe tener en cuenta:

- El uso adecuado de los conceptos y nomenclatura de las magnitudes físicas involucradas.
- La adecuada inclusión de parámetros y constantes que reflejan la dimensión de las relaciones entre las variables del modelo
- Debe ser factible realizar una validación del modelo comparando el sistema modelo con el real; caso contrario, el aprendizaje se reduce a una memorización de fórmulas y algoritmos que con el tiempo se olvidan.

Clasificación de situaciones problemáticas según el contexto

- **Contexto intra-matemático (Problemas Descontextualizados):** Formulación abstracta. Lo que se pide averiguar no permite activar ningún proceso mental.

Ejemplos:
- ***Aerodinámica automotriz.*** La potencia H, en caballos de fuerza, que requiere cierto automóvil para vencer la resistencia del viento viene dada aproximadamente por

$$H(x) = 0.002\,x^2 + 0.005x - 0.029, \quad 10 \le x \le 100$$

Donde x es la velocidad del automóvil en millas por hora.
a) Representar gráficamente H con una calculadora gráfica.
b) Reescribir la función de potencia de tal modo que x represente la velocidad en kilómetros por hora [Encontrar H(x/1.6)]
(Ejercicios Propuestos Pág. 30 Sección P.4 Ajuste de modelos a colecciones de datos. Larson, Hostetler, Edwards Cálculo I, 8ª ed., Mc Graw Hill, China, 2006)
Breve análisis crítico: Frente al ejercicio, el alumno se limita a cumplir con las consignas aislándose del contexto ya que no lo necesita ni tiene forma de confrontar los resultados obtenidos para validar o no el modelo propuesto.

- Dos partículas se mueven a lo largo de la línea coordenada. Al final de *t* segundos sus distancias dirigidas desde el origen, en pies, están dadas por $s_1 = 4t - 3t^2$ y $s_2 = t^2 - 2t$, respectivamente.
(a) ¿Cuándo tienen la misma velocidad?
(b) ¿Cuándo tienen la misma rapidez? (La rapidez de una partícula es el **valor absoluto** de su velocidad)
(c) ¿Cuándo tienen la misma posición?
Rta: (a) $t = \frac{3}{4}$ (b) $t = \frac{1}{2}$; $t = \frac{3}{4}$ (c) $t = 0$; $t = \frac{3}{2}$
(Problemas Propuestos Pág. 139 Sección 3.7 Derivadas de orden superior. La derivada. Edwin J. Purcell, Dale Varberg, Cálculo con Geometría Analítica 6ª ed., Pearson, Prentice Hall, México)
Breve análisis crítico: El lenguaje utilizado al redactar el problema no se corresponde con el usado en la asignatura Física, en la cuál el alumno supuestamente adquirió los conocimientos previos necesarios para realmente aprovechar el problema a fin de lograr un aprendizaje significativo del objeto matemático.
Se propone la siguiente **reformulación**:
Dos partículas se mueven a lo largo de una línea recta. Respecto del mismo sistema de referencia, sus posiciones (medidas en m) en función del tiempo (medido en segundos) están dadas por $x_1 = 4t - 3t^2$ y $x_2 = t^2 - 2t$, respectivamente.
(a) ¿Cuándo tienen la misma velocidad? Indique la posición y el sentido de movimiento de cada partícula en ese instante.
(b) ¿Cuándo tienen la misma rapidez? (La rapidez de una partícula es el módulo de su velocidad). Indique la posición y el sentido de movimiento de cada partícula en ese instante.
(c) ¿Cuándo ocupan la misma posición? ¿Cuál es la velocidad en ese instante de cada una de las partículas?

- **Contexto real:** refiere a la práctica real de las matemáticas, al entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar.
    - **Contexto simulado:** tiene su origen o fuente en el contexto real, es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características.
    - **Contexto evocado:** refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho.

Clasificación de los problemas de contexto evocado (Font, 2007)
- **Según su complejidad:**

- Problemas contextualizados que se han diseñado para activar procesos complejos de modelización (un extremo).
- Problemas relativamente sencillos cuyo objetivo es la aplicación de los conceptos matemáticos previamente estudiados. (otro extremo).

- Entre estos dos extremos hay una línea continua en la que podemos situar a la mayoría de los problemas contextualizados propuestos en los libros de textos.

- En función del momento

- A continuación de un proceso de instrucción: El objetivo es que sirvan, por una parte, como problemas de consolidación de los conocimientos matemáticos adquiridos y, por otra parte, para que los alumnos vean las aplicaciones de las matemáticas al mundo real.
- Al inicio de un tema o unidad didáctica con el objetivo de que sirvan para la construcción de los objetos matemáticos. Se proponen al inicio de un tema matemático y se han diseñado para que queden dentro de la zona de desarrollo próximo (en términos de Vygotsky).

- De acuerdo a la situación evocada:

- **Contextualizados Artificialmente**: imposibles como tales o por los datos; posibles pero insensatos (sea por la acción o por lo que se pide).

Ejemplos:

- En un partido de vóley un jugador salta al lado de la red y le pega a la pelota. Ésta recorre una trayectoria **recta** de 6m de longitud. La trayectoria de la pelota y el piso forman un ángulo de 25°. Si el jugador mide 2,10 m de altura con el brazo extendido, ¿cuánto saltó? (Pág. 153 Haciendo Números 9 Marina Andrés y Pablo Kaczor 1° ed. Ed. Santillana. Buenos Aires, Argentina, 2004)

Breve análisis crítico: Si el partido de vóley se juega en el planeta Tierra, la pelota (sometida a la aceleración de la gravedad) nunca describirá una trayectoria rectilínea si al llegar al piso la velocidad forma un ángulo de 25º con la horizontal. En conclusión: el alumno debe resolver la situación problemática aislándose del contexto porque el mismo contradice los resultados experimentales. Observando el texto del cual se extrajo este ejemplo se concluye que, lamentablemente, desde el nivel medio el alumno se encuentra con situaciones problemáticas imposibles como tales que fomentan el aislamiento entre lo que conoce y el estudio de la matemática.

- Si **en la luna se dispara una flecha** hacia arriba con una velocidad de 58m/s, su altura (en metros) después de t segundos se expresa con $H = 58\,t - 0.83\,t^2$

(a) Encuentre la velocidad de la flecha después de 1s.
(b) Halle la velocidad de la flecha cuando t=a.
(c) ¿Cuándo chocará la flecha contra la Luna?
(d) ¿Con qué velocidad chocará contra la Luna?

(Ejercicios Propuestos Pág. 146 - Sección 2.6 – Tangentes, velocidades y otras razones de cambio. Límites y derivadas. James Stewart, Cálculo. Conceptos y Contextos, 3ª ed., Ed. Thomson, México, 2006)

Breve análisis crítico: El ejercicio presenta una situación muy irreal: Disparar una flecha en la luna con una rapidez inicial de 208,8km/h. Por otra parte, después de haber encontrado la respuesta (a), el ítem (b) puede producir confusión en el alumno, ya que t=a no tiene ningún significado físico en particular.

- Un automovilista entra a una autopista y recibe un talón marcado a la 1:15 P.M., 60 millas más adelante, cuando el automovilista paga el peaje a las 2:15 P.M, recibe también una boleta de infracción. **Explique esto por medio del teorema del valor medio**. Suponga que el límite de velocidad es 55 mi/h.

Rta: Puesto que la velocidad media en el intervalo de tiempo es de 60mph, el teorema del valor medio implica que debe haber algún instante en el intervalo en el cual la velocidad sea exactamente igual a 60mph. Esto excede el límite de velocidad legal.

(Pág. 209 – Ejercicios propuestos – Sección 4.4: Teorema de Rolle y teorema del valor medio – Aplicaciones de la derivada. Dennis G. Zill, Cálculo con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica México)

Breve análisis crítico: Este ejercicio induce al alumno a usar un mecanismo de resolución particular cuando la respuesta es intuitivamente obvia.

- **Realmente Contextualizados** (posibles y sensatos): El escenario tiene que ver con situaciones reales; la acción y los datos, son razonables para la situación.

Rigor de conceptos físicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Siendo la resolución de problemas un aspecto esencial de la matemática, la intuición y el rigor deben estar presentes al resolver problemas. Es tarea de los docentes estimular la interacción entre intuición y rigor, de modo que haya una retroalimentación positiva. Una primera aproximación intuitiva puede ser potenciada con un adecuado nivel de formalización y la búsqueda del rigor en las afirmaciones; y éstas, a su vez, pueden inducir a intuir la solución de otras partes del problema, de otras formas de resolverlo, o llevar al convencimiento de que la conjetura inicial, basada en una mirada intuitiva, no es la correcta. (Uldarico Malaspina, 2008)

Ejemplos de algunas "aclaraciones" extraídas de textos de matemática que inducen a interpretar erróneamente los conceptos físicos involucrados, reafirmando, en algunos casos, los preconceptos de los estudiantes:

- "Algo más….: **En general se logra que la velocidad sea constante luego de un periodo de aceleración**. Solamente podemos hablar de velocidad constante todo el tiempo cuando modelizamos situaciones ideales en un laboratorio. Sin embargo, los aviones tienen un sistema que les permite, a partir de un cierto momento, ir a determinada velocidad constante fija, este sistema se utiliza cuando se manejan con piloto automático". (Altman,

Silvia y otras. Matemática/Polimodal – Funciones I – Ed. Longseller S. A. Ciudad de Buenos Aires, Argentina, 2002).
Breve análisis crítico: En realidad, cualquier cuerpo en equilibrio (la resultante de fuerzas es nula) puede trasladarse con velocidad constante.

- "¿Sabían que…?: Galileo tiró desde la torre de Pisa dos cuerpos de distinto peso y observó que caían al piso simultáneamente y que aumentaban su velocidad a medida que iban cayendo. No pudo medir este cambio en la velocidad de caída debido a la poca precisión de los instrumentos que poseía – no existía el cronómetro -, pero dedujo que lo mismo debía pasar en un plano inclinado, donde pudo trabajar con **unidades de tiempo que podía medi**r. Demostró, así, que la **velocidad aumentaba en razón al cuadrado del tiempo: $v = k: t^2$**". (Altman, Silvia y otras. Matemática/Polimodal – Funciones I – Ed. Longseller S.A. Ciudad de Buenos Aires, Argentina, 2002).
Breve análisis crítico: La función de velocidad en función del tiempo corresponde a una función lineal, no cuadrática. Por otra parte, la argumentación no es válida, si se utiliza el mismo instrumento de medición, es mayor la incerteza relativa asociada con mediciones de menores intervalos de tiempo.

- "El área bajo la curva aceleración **es la velocidad** alcanzada" – (Pág. 324 Integral Definida - De Guzmán, M. & Colera, J. – Matemáticas I – C.O.U: Ed. Anaya- España – 1998).
Breve análisis crítico: Debería decir: "En un movimiento unidimensional el área bajo la curva de la aceleración en función del tiempo es numéricamente igual al cambio experimentado en ese intervalo de tiempo de la proyección, en la dirección del movimiento, del vector velocidad".

- "La velocidad de una partícula es la razón de **cambio de desplazamiento** con respecto al tiempo. Los físicos también se interesan en otras razones de cambio; por ejemplo, la **razón de cambio del trabajo** con respecto al tiempo (lo que se conoce como potencia)". (Pág. 145 - Sección 2.6 – Tangentes, velocidades y otras razones de cambio. Límites y derivadas. James Stewart - Cálculo. Conceptos y Contextos – 3ª ed.- Ed. Thomson – México – 2006)
Breve análisis crítico: Están incorrectamente definidos los conceptos físicos de velocidad instantánea y potencia.

- "Si una varilla o un trozo de alambre son homogéneos, entonces su densidad lineal es uniforme y se define como la masa por unidad de longitud ($\rho = m/l$) y se mide en kilogramo por metro. Pero suponga que la varilla no es homogénea sino que su masa medida desde su extremo izquierdo hasta un punto x es **$m = f(x)$**………la densidad lineal es la razón de cambio de la masa con respecto a la longitud. Así entonces, **la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa con respecto a la longitud**.
(Pág. 202 – Ejemplo 2 – Sección 3.3: Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales. Reglas de derivación. James Stewart, Cálculo. Conceptos y Contextos, 3ª ed., Ed. Thomson, México, 2006)
Breve análisis crítico: Físicamente es incorrecto decir que la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa con respecto a la longitud.

Ejemplos de Situaciones Problemáticas contextualizadas extraídos de Textos de Matemática para el Nivel Básico Universitario
A continuación se exponen algunos ejemplos concretos de problemas contextualizados, que involucran conceptos físicos, para ilustrar que la preocupación por la formalización matemática y el rigor científico no siempre es adecuadamente orientado, desfavoreciendo el proceso de enseñanza- aprendizaje.

► ***Desempeño de un automóvil***. Se acopla un **dinamómetro** a un motor de automóvil V8 y se **mide su potencia** en caballos y a diferentes **velocidades** (**en miles de revoluciones por minuto**) En la siguiente tabla se muestran los resultados.

x	1	2	3	4	5	6
y	40	85	140	200	225	245

a) Utilizar las funciones de cálculo de regresión de una calculadora para encontrar el modelo cúbico para los datos.
b) Utilizar la calculadora para representar gráficamente los datos y el modelo.
c) Utilizar el modelo para estimar la potencia cuando el motor gira a 4 500 revoluciones por minuto.

Rta: a) $y = -1.806\,x^3 + 14.58\,x^2 + 16.4x + 10$; c) 214

(Ejercicios Propuestos Pág. 36 Sección P.4 Ajuste de modelos a colecciones de datos. Larson, Hostetler, Edwards Cálculo I, 8ª ed., Mc Graw Hill, China, 2006))
Breve análisis crítico de los conceptos físicos involucrados:

- Un dinamómetro es el instrumento utilizado para medir el módulo de una fuerza, no para medir la potencia instantánea desarrollada por el motor del automóvil.
- Revoluciones por minuto es una unidad de medida de frecuencia de rotación, no de velocidad (aunque existe una proporcionalidad entre ambas magnitudes)
- Llamando x e y a las variables independiente y dependiente, respectivamente, el alumno tiende a buscar la solución del problema aislándose del contexto.

- El alumno no puede corroborar la validez del modelo propuesto.

► Una rueda cuyo borde tiene ecuación $x^2 + (y-6)^2 = 25$ gira rápidamente en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Una partícula de lodo sale del borde en el punto (3, 2) y vuela hacia la pared *x*=11. ¿Aproximadamente a qué altura pegará en la pared?
Rta: ***y* = 8**
(Problemas Propuestos Pág. 33 Sección 1.7 Gráficas de ecuaciones. Edwin J. Purcell, Dale Varberg, Cálculo con Geometría Analítica 6ª ed., Pearson, Prentice Hall, México)
Breve análisis crítico: La respuesta proporcionada por el autor es válida si se considera que la partícula de lodo después de desprenderse de la rueda describe una trayectoria rectilínea, lo que es imposible en la presencia del campo gravitatorio terrestre.

► El **desplazamiento** (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por
$s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos
(a) Encuentre la **velocidad promedio** sobre cada lapso: (i) [3,4]; (ii) [3.5, 4]; (iii) [4,5]; (iv) [4,4.5]
(b) Halle la velocidad instantánea cuando t=4.
(c) Dibuje la gráfica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedios del inciso (a) y la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea del inciso (b).
(Ejercicios Propuestos Pág. 146 - Sección 2.6 – Tangentes, velocidades y otras razones de cambio. Límites y derivadas. James Stewart, Cálculo. Conceptos y Contextos, 3ª ed., Ed. Thomson, México, 2006)
Breve análisis crítico: El enunciado del ejercicio tiende a provocar confusión en los alumnos entre los conceptos físicos de posición y desplazamiento, velocidad media y velocidad promedio.

► Si se empuja una pelota de modo que tiene una velocidad inicial de 5m/s hacia abajo a lo largo de cierto plano inclinado, entonces la **distancia que ha rodado** después de t segundos es $s = 5t + 3t^2$
(a) Encuentre la velocidad una vez que transcurren 2s.
(b) ¿Cuánto tiempo tarda para que la velocidad alcance 35m/s?
(Ejercicios Propuestos Pág. 210 - Sección 3.3: Razones de cambio en las ciencias naturales y sociales. Reglas de derivación. James Stewart, Cálculo. Conceptos y Contextos, 3ª ed., Ed. Thomson, México, 2006)
Breve análisis crítico: Frente al enunciado del ejercicio, el alumno puede pensar que los movimientos de traslación pura y rodadura son equivalentes.

► En la página 431 de Physics: Calculus, 2ª. Edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), mientras se deriva la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ para el periodo de un **péndulo de duración L**, el autor obtiene la ecuación $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial del **breve movimiento** del péndulo. Luego dice "para ángulos pequeños, el valor de **q** en radianes está muy cerca del valor de $\operatorname{sen} \theta$; difieren menos que 2% hasta alrededor de 20º".
(a) Compruebe la aproximación lineal en θ para la función seno: $\operatorname{sen} x \approx x$
(b) Use un dispositivo graficador para determinar los valores de *x* para los cuales *sen x* y *x* difieren menos de 2%. Enseguida compruebe la afirmación de Hecht convirtiendo de radianes a grados. (Ejercicios Propuestos Pág. 253 - Sección 3.8 – Aproximaciones lineales y diferenciales. Reglas de derivación. James Stewart - Cálculo. Conceptos y Contextos, 3ª ed.- Ed. Thomson, México, 2006)
Breve análisis crítico: Los errores tipográficos en el nombre de las variables involucradas (L y q) provocan que necesariamente el alumno se aísle del contexto para poder resolver las consignas. Por otra parte, no tiene sentido físico calificar el movimiento oscilatorio de un péndulo como un breve movimiento.

► ***Diseño de autopistas.*** En cierta autopista, la trayectoria de los automóviles es un arco circular de radio *r*. Con el fin de no depender totalmente de la fricción **para compensar la fuerza centrífuga**, se construye un peralte con un ángulo de inclinación θ sobre la horizontal. Este ángulo satisface la ecuación $r g \tan \theta = v^2$, donde *v* es la velocidad de los automóviles y *g* =32 pies por segundo al cuadrado es la aceleración de la gravedad. Encontrar la relación que existe entre los **ritmos relacionados *dv/dt* y *dθ/dt*.**
(Ejercicios Propuestos Pág. 156 Sección 2.6 Ritmos o velocidades relacionados. Derivación. Larson, Hostetler, Edwards Cálculo I, 8ª ed., Mc Graw Hill, China, 2006)
Breve análisis crítico: Debería decir: Con el fin de no depender exclusivamente de la fuerza de fricción estática para proporcionar la **fuerza centrípeta** necesaria para describir el arco de trayectoria circular.

► ***Movimiento horizontal.*** La función de posición de una partícula que se mueve a lo largo del eje *x* es:

$$s(t) = t^2 - 3t + 2 \quad \text{para} \quad -\infty < t < \infty$$

a) Calcular la velocidad de la partícula.
b) Encontrar el o los **intervalos *t* abiertos** en los que la partícula se mueve hacia la izquierda

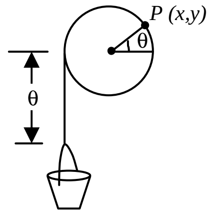
c) Determinar la posición de la partícula cuando la velocidad es 0.
d) Encontrar la velocidad de la partícula cuando la posición es 0.

Rta: a) $x'(t) = 2\,t - 3$; b) $(-\infty, 1.5)$; c) $x = -\frac{1}{4}$; d) 1

(Ejercicios Propuestos Pág. 159 Ejercicios de repaso. Derivación. Larson, Hostetler, Edwards Cálculo I, 8ª ed., Mc Graw Hill, China, 2006)

Breve análisis crítico: No tiene sentido físico el dominio de la función s(t); ya que la variable t (tiempo en el contexto del ejercicio) no está definida para valores negativos.

► Una cubeta atada a la cuerda de un torno circular, se deja caer en línea recta bajo la influencia de la gravedad. Si la **distancia que desciende** la cubeta **es igual a la medida en radianes del ángulo** indicado en la figura, entonces $\theta = \frac{1}{2} g\, t^2$, en donde g = 32 pie/s^2 es la aceleración de la gravedad. Obtenga la razón de cambio de la coordenada *y* de un punto *P* de la circunferencia del torno cuando $t = \sqrt{\pi}/4$ segundos. Interprete el resultado.



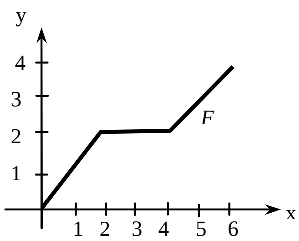
Rta: $-8\sqrt{\pi}$ pie/s; la coordenada *y* está disminuyendo

(Pág. 187 – Ejercicios propuestos – Sección 4.1: Movimiento rectilíneo y la derivada – Aplicaciones de la derivada. Dennis G. Zill, Cálculo con Geometría Analítica, Grupo Editorial Iberoamérica México)

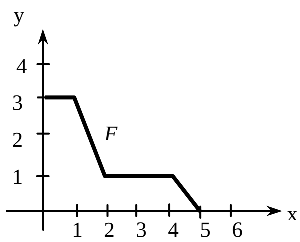
Breve análisis crítico: No es posible considerar el arco igual al ángulo barrido. La ecuación propuesta para calcular la distancia que desciende la cubeta no es válida físicamente.

► Encontrar el trabajo realizado por cada fuerza F

a)



b)



Rta: a) 12; b) 7.5

(Ejercicio propuesto Pág. 516 Solución de problemas Aplicaciones de la integral. Larson, Hostetler, Edwards Cálculo I, 8ª ed., Mc Graw Hill, China, 2006)

Breve análisis crítico: Si la función graficada es y=y(x) es imposible que el alumno resuelva el ejercicio teniendo en cuenta el contexto formulado.

Conclusiones

El docente de matemática puede propiciar un aprendizaje significativo usando problemas contextualizados con conceptos físicos, sólo si están formulados correctamente, si están encuadrados en contextos reales, redactados con una transposición didáctica adecuada, sin perder la rigurosidad científica.

Para hacer un análisis crítico de los libros de texto, seleccionando aquellos ejercicios y problemas cuyo contenido sea adecuado, creemos que es muy importante activar los mecanismos que permitan una articulación efectiva, con una metodología de trabajo colaborativa, entre los docentes de las distintas asignaturas del nivel básico universitario.

Referencias bibliográficas

- Camarena Gallardo, P. (2008). *La Matemática en el Contexto de las Ciencias*. Trabajo presentado en el III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, Lima, Perú.
- Font, Vicenç. *Enseñanza de la Matemática. Tendencias y perspectivas*. Texto de la conferencia inaugural del III Coloquio Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, Lima, 2008.
- Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Matemática y su didáctica para maestros. Manual para el estudiante*. Granada: Proyecto Edumat-Maestros. Extraído el 20 de Marzo de 2008 desde: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/
- Godino, J. *La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática*. Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática Granada, 2003
- Malaspina; Uldarico. Intuición y rigor en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Actas III Coloquio Internacional sobre enseñanza de las matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima. Editora: Cecilia Gaita Lima. Febrero del 2008
- Mancipar de Katz, S. (2009, 22 de Abril) *Modelización: Una forma de encontrar el sentido de la Matemática*. Extraído el 15 de julio de 2009 desde http://www.ellitoral.com/index.php/diarios/2009/04/22/medioambiente/MED-02.html
- De Guzmán, M. y Colera, J. (1998). *Matemáticas II. C.O.U*. España: Anaya.
- Larson, Hostetler & Edwards. *Cálculo I*. Octava Edición. Mc Graw Hill. China, 2006.
- Purcell, Edwin & Varberg, Dale. *Cálculo con geometría analítica*. Sexta Edición. Pearson.
- Stewart, J - *Cálculo. Conceptos y Contextos*. 3ª ed. Thomson. México, 2006.
- Thomas, George B. *Cálculo una variable*. Undécima Edición. Pearson Addison Wesley. México, 2006.
- Zill, Dennis G. *Cálculo con geometría analítica*- Grupo Editorial Iberoamericana.