PARTICIONES ORDENADAS DE ENTEROS CON AUXILIO DE CAS

José Luis Aguado
Facultad de Ciencias Exactas. UNICEN. Argentina
jaguado@exa.unicen.edu.ar

Área Temática: Experiencias de Cátedra
Palabras Claves: Enteros, Particiones ordenadas, Matemática Discreta, Principio de Inclusión y Exclusión

Resumen En este trabajo exponemos el desarrollo de una clase teórica de un tema de Matemática Discreta con el auxilio de un CAS (Computer Algebra System) gratuito. El objetivo es lograr que, con los mismos elementos teóricos elementales y la motivación de un problema, más el auxilio de algún CAS, usado en forma interactiva, los alumnos *comprendan el problema* de manera conceptual. Esta experiencia se enmarca en el proyecto FORMULACIÓN Y PRUEBA DE HIPÓTESIS CON AUXILIO DE CAS. Este proyecto incluye la búsqueda de perspectivas teóricas adecuadas para implementar una metodología de enseñanza basada en problemas, en cuestiones de Álgebra.

INTRODUCCIÓN

El alumno de la carrera de Ingeniería de Sistemas, Profesorado o Licenciatura en Matemática o en Física de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN, se enfrenta a lo largo de sus estudios con requerimientos de rigor en el lenguaje y esquemas de argumentación propios de la matemática. Posiblemente esto contribuye a la reputación de "ciencia dura" de la que gozan este tipo de disciplinas. Además de las clásicas, la informática ya considerada "dura" convoca a un gran número de estudiantes en la actualidad. Un área que se ha revelado como indispensable en la formación matemática de científicos e ingenieros es la matemática discreta, que incluye temas de combinatoria y teoría de números entre otros. Mencionamos expresamente estos dos temas pues presentan una dificultad en común: la complejidad computacional. Sin una profusa ejemplificación, no es dable esperar que los alumnos adquieran la madurez suficiente para comprender las técnicas utilizadas en las dos ramas que mencionamos. Reforcemos que son precisamente estas dos ramas de las que requerirá el alumno en años subsiguientes cuando se enfrente a complejidad de algoritmos, teoría de códigos o criptografía.

FUNDAMENTACIÓN

La actividad está enmarcada en el proyecto FORMULACIÓN Y PRUEBA DE HIPÓTESIS CON AUXILIO DE CAS (03/C221-SECAT-UNICEN).
La concepción metodológica de la cual partimos en el proyecto, en lo referente a la resolución de problemas, es la conocida como "el aprendizaje basado en problemas" y desarrollada en [5].
Sus componentes estratégicas son:
Problema: No estructurado. Presentado como una situación en la que aún debe definirse un problema estimulante.
Rol del docente: Muestra un problema.
Rol del estudiante: Como participante. Se esfuerza por ponderar la complejidad de la situación.
Foco cognitivo: El alumno integra y construye el conocimiento necesario para dar una solución de modo que satisface las condiciones impuestas por él mismo.
Foco meta-cognitivo: El docente muestra y prepara el camino para objetivos cercanos más elaborados.
Rol en el problema: Los alumnos se sumergen en el problema, y aprenden sobre eventos cercanos.
Información: Solamente se registra la generada por los alumnos.
El criterio en el que nos basamos para elegir los problemas es que las aplicaciones más importantes de los CAS no son para computar fórmulas como tales, sino para ayudar a formular y probar hipótesis. Este criterio se inspira en el famoso aforismo de R. W. Hamming:

"El propósito de la informática es visión (insight), no los números"

(R. W. Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers 2nd ed., McGraw Hill 1973).
Esta estrategia didáctica asistida por computadoras permite derivar técnicas que refuerzan la potencia del alumno para comprender ciertos métodos utilizados en la investigación matemática, pura o aplicada (en particular en computación). Mínimamente, el dominio de estas técnicas lo proveen de un auxiliar muy versátil que lo ayuda a abordar el estudio de los temas de su currícula matemática (la que en un principio, resulta excesivamente abstracta para muchos).
En la Facultad de Ciencias Exactas de la UNICEN, la carga horaria de la materia Matemática Discreta es de 3T-3P horas semanales (en el segundo cuatrimestre de un primer año). La cursan alumnos de la carrera de Ingeniería de Sistemas, Profesorado de Matemática y Licenciatura en Matemática. El escaso tiempo de dictado y la densidad de contenidos constituyen un desafío a la creatividad, si se desea mantener el ritmo académico y permanencia en una concentración de más de 150 alumnos. Restricciones universalmente conocidas aconsejan mantener el esquema clásico de teorías magistrales por un lado y practicas por el otro.
Excepto el ítem *Información* de las componentes estratégicas anteriores, las otras son perfectamente asimilables la hora de diseñar una clase teórica de tres horas, en el marco de la concepción metodológica de la cual partimos en el proyecto. El CAS elegido es MAXIMA (Ver. 5.20- Interfaz wxMaxima 0.8.4).

DESARROLLO

Pasamos a describir el desarrollo de la clase teórica.

El problema de Galileo En la época de Galileo (1564-1642) era de actualidad el juego de dados llamado el pasadiez. El juego consiste en lanzar tres dados a la vez y sumar los puntos resultantes: el jugador gana si esta suma resulta superior a 10 y pierde en el caso contrario.

Cuenta la historia que el Príncipe de Toscana, un aficionado a este juego, se extrañaba y no sabía explicarse la razón por la cual en la suma de los puntos de los tres dados, el número 11 salía con más frecuencia que el 12 y el 10 con más frecuencia que el 9. El Príncipe acudió a Galileo, el matemático más famoso de su época, para consultarle su opinión sobre este fenómeno.

La explicación de Galileo fue simple. Basta tener en cuenta que todas las combinaciones no son igualmente posibles; la combinación (3,3,3) por ejemplo, únicamente puede presentarse de una sola manera, mientras que la (1,2,6) se puede presentar de seis maneras, permutando los números 1,2,3 entre los tres dados. Cada combinación equivale por tanto a un cierto número de casos, que son los efectivos casos posibles que hay que tener en cuenta para hallar la probabilidad.

¿Cómo podemos averiguar el número de descomposiciones de cada uno de los números de 3 a 18 usando un CAS?

Recordemos que al multiplicar dos polinomios se suman las potencias de las variables. Así, vamos a multiplicar el polinomio $p(x) := x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ tres veces por sí mismo. Cada potencia x^m en el producto se obtiene como $x^i x^j x^k$ donde x^i proviene del primer factor x^j proviene del segundo y x^k proviene del tercero, así que el coeficiente de x^m nos dará todas las posibles descomposiciones $m = i + j + k$ con $0 \le i, j, k \le 6$.

Entonces el polinomio p^3 es la *función generadora de todas las distribuciones posibles* (según las condiciones del problema).

Podemos interactuar con MAXIMA, ejecutando los siguientes comandos:

```
(%i1) p:x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6;
```

(%o1) $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x$

```
(%i2) expand(p^3);
```

(%o2) $x^{18}+3\,x^{17}+6\,x^{16}+10\,x^{15}+15\,x^{14}+21\,x^{13}+25\,x^{12}+27\,x^{11}+27\,x^{10}+25\,x^9+21\,x^8+15\,x^7+10\,x^6+6\,x^5+3\,x^4+x^3$

Aquí vemos entonces que hay por ejemplo 25 descomposiciones para 9 y para 12 en tanto que 27 para 10 y 11.

Ahora podemos calcular el número de elementos del espacio muestral:

```
(%i8) (subst(1,x,p^3));
```

(%o8) 216

Y las probabilidades de cada uno de los sucesos:

```
(%i11) expand((1/216)*p^3);
```

(%o11) $\frac{x^{18}}{216}+\frac{x^{17}}{72}+\frac{x^{16}}{36}+\frac{5\,x^{15}}{108}+\frac{5\,x^{14}}{72}+\frac{7\,x^{13}}{72}+\frac{25\,x^{12}}{216}+\frac{x^{11}}{8}+\frac{x^{10}}{8}+\frac{25\,x^9}{216}+\frac{7\,x^8}{72}+\frac{5\,x^7}{72}+\frac{5\,x^6}{108}+\frac{x^5}{36}+\frac{x^4}{72}+\frac{x^3}{216}$

Para mejor visualización, presentemos estas probabilidades en formato de punto flotante.

```
(%i12) float(%o11);
```

(%o12) $0.004629629629629\,x^{18}+0.013888888888889\,x^{17}+0.027777777777778\,x^{16}+0.046296296296296\,x^{15}+0.069444444444444\,x^{14}+0.097222222222222\,x^{13}+0.11574074074074\,x^{12}+0.125\,x^{11}+0.125\,x^{10}+0.11574074074074\,x^9+0.097222222222222\,x^8+0.069444444444444\,x^7+0.046296296296296\,x^6+0.027777777777778\,x^5+0.013888888888889\,x^4+0.004629629629629\,x^3$

Es posible experimentar con otro número de dados, o incluso con dados de 20 caras que se han puesto de moda por su uso en ciertos juegos.

Hasta aquí, en la resolución del problema hemos usado una técnica de funciones generadoras, que si bien es un tema de la currícula de la materia, no es el objetivo en este momento. Como es innegable, el ejemplo será reutilizado como introductorio de tal tema en su oportunidad.

Proseguimos con el tratamiento de particiones ordenadas de enteros. El caso que nos ocupa es, en realidad, *particiones ordenadas con restricciones*. Veamos ahora su tratamiento combinatorio comenzando por el caso más general.

Queremos calcular el número de soluciones en enteros no negativos de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \tag{1}$$

Aquí dos soluciones se consideran distintas si difieren en el orden, por ejemplo (3+5+4) y (3+4+5) se consideran distintas, es decir una solución es cualquier terna de enteros no negativos que verifique (1).

Recordemos el llamado *modelo de los bosones*. Este modelo combinatorio es también conocido en Física estadística como *distribución de Bose-Einstein*, ya que consiste en calcular las maneras en que n partículas indistinguibles pueden ocupar k niveles de energía distintos.

Una manera simple de pensar en la distribución de Bose-Einstein es considerar las n partículas como bolitas idénticas y las k cajas como espacios entre $k-1$ marcas.

$$\circ\circ\cdots \underset{1}{*} \circ\circ\cdots \underset{2}{*} \circ\circ\cdots \underset{k-2}{*} \circ\circ\cdots \underset{k-1}{*}$$

Algunas cajas pueden estar vacías. Tenemos $n+(k-1)$ lugares de los cuales hemos de elegir $k-1$ para colocar las marcas $*$ y esto puede hacerse de $\binom{n+(k-1)}{k-1}$ maneras.

Esto da todas las maneras diferentes de colocar los bosones en los diferentes niveles de energía.

Esto nos lleva directamente al

Teorema 1 *Dados naturales* n,k, *el número de particiones ordenadas* (*importa el orden en la escritura*) $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ *con* x_i *enteros no negativos es* $\binom{n+(k-1)}{k-1}$.

Demostración. Aplicamos el modelo de los bosones pensando que tenemos k cajas (las variables) y n bolitas indistinguibles (los 1 's) y la respuesta es el combinatorio.

Para resolver (1), tenemos 3 cajas y 12 bolitas indistinguibles (los 1 's) y la respuesta es el combinatorio

```
(%i13) binomial(12+3-1,2);
(%o13) 91
```

En nuestra notación $\binom{12+3-1}{2} = 91$

También, si ahora pedimos que las soluciones sean números naturales, es decir $x_i \geq 1$ para todo $i = 1,2,3$, colocamos una bolita en cada caja y después razonamos como arriba y el resultado es:

```
(%i14) binomial(9+3-1,2);
(%o14) 55
```

En nuestra notación $\binom{9+3-1}{2} = 55$

En general, si pedimos soluciones donde cada $x_i \geq a_i \geq 0$, el razonamiento es igual, se colocan primero a_i bolitas en la caja *i* y se aplica el modelo de bosones con el resto.

En particular, podemos establecer el siguiente

Teorema 2 *Dados naturales* n,k, *con* $k \leq n$ *el número de particiones ordenadas* (*importa el orden en la escritura*) $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ *con* x_i *números naturales es* $\binom{n-1}{k-1}$.

Demostración. Primero colocamos una bolita en cada caja y aplicamos el modelo de los bosones pensando que tenemos k cajas (las variables) y $n-k$ bolitas indistinguibles (los 1 's) y la respuesta es el combinatorio $\binom{(n-k)+(k-1)}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$.

Corolario 3 *Dados un naturales* n, *el número de todas las particiones ordenadas* (*importa el orden en la escritura*) $n = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ *con* x_i *números naturales y con* $1 \leq k \leq n$ *es* 2^{n-1}.

Demostración. Todas la particiones se obtienen contando todas las de longitud 1, luego todas las de longitud 2, etc. Luego la cantidad de todas estas particiones es:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}$$

Supongamos ahora que estamos buscando las soluciones de (1), pero con la restricción que $1 \leq x_i \leq 6$ para *i*=1, 2, 3. Es decir queremos calcular el coeficiente de x^{12} en p^3.

Recordemos en este momento, la fórmula del Principio de Inclusión y Exclusión (PIE), tema ya desarrollado. Por simplicidad, lo enunciamos para tres subconjuntos tal como lo usaremos aquí:

PIE *Sea U un conjunto de objetos, y tres propiedades* 1, 2, y 3. *Sea* A_i *el subconjunto de U que tiene la propiedad i para* i=1, 2, 3. *Entonces en número de los elementos de U que no tiene ninguna de las tres propiedades es*:

$$\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| = |U| - \left(|A_1| + |A_2| + |A_3|\right) + \left(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|\right) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \qquad (2)$$

Veamos cómo usar el PIE en nuestro problema.

Sea U el conjunto de todas las soluciones con (x_1, x_2, x_3) con x_i naturales. Entonces, como ya vimos, $|U|$=55.

Sea $A_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in U : x_i > 6\}$ para i=1, 2, 3.

Entonces (x_1, x_2, x_3) es solución de (1) con la restricción $x_i \leq 6$ para i=1, 2, 3, si y sólo si $(x_1, x_2, x_3) \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3$

Luego, usando la fórmula (2) del PIE, podemos calcular el cardinal de este conjunto.

Ahora para calcular $|A_1|$ ponemos 6 bolitas en la caja 1, es decir, sumamos 7 a x_1. Recordemos que ya hay una bolita en cada una de las cajas, por lo que en total hemos gastado 9, y entonces debemos calcular todas las soluciones con enteros no negativos de $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

Luego $|A_1| = \binom{3+3-1}{2} = 10$. Evidentemente $|A_1| = |A_2| = |A_3|$.

Pero $|A_i \cap A_j| = 0$ para i, j =1, 2, 3, porque no podemos poner 7 bolitas en más de una caja.

Entonces $\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right| = 55 - 3 \times 10 = 25$. Como ya lo habíamos calculado antes con el programa.

No vamos a escribir una fórmula abstracta para este problema de particiones ordenadas con cotas inferiores y superiores en los sumandos debido a que presentaría una escritura demasiado confusa. En este caso nos interesa la comprensión de la técnica a utilizar. Se invita al alumno interesado a efectuarla para 3 y 4 sumandos. Es ocioso comentar que un tal ejercicio aparecerá en los trabajos prácticos correspondientes.

Las particiones no ordenadas de enteros (donde no importa el orden), no figuran en los contenidos y no se tratan en el curso.

RESULTADOS

Como puede observarse, la experiencia anterior sigue las estrategias enunciadas más arriba, comienza con la presentación de un problema no estructurado, y estimula el rol del estudiante como participante (aún en el marco de una clase teórica). El rápido desenlace brindado por la utilización del programa simbólico de computación define el Foco cognitivo.

En lo referente al Foco meta-cognitivo, los tres Eventos cercanos siguiente fueron surgiendo sin dificultad.

a) Generalización a varios dados y análisis de la distribución de valores.

b) Cálculo del número de elementos del espacio muestral (evaluar el polinomio generador en x=1)

c) Cálculo de la probabilidad de aparición de un valor dado.

Luego aparece como otro evento cercano el concepto objetivo de la clase: Particiones ordenadas con restricciones. Aquí no puede obviarse el rigor en la argumentación. Si bien no creemos necesario abundar en demostraciones rigurosas, es posible elegir algunas esenciales para anclar los resultados sobresalientes del tema.

Aunque no es fácil cuantificar la experiencia en términos de “número de alumnos que …”, se observa una buena participación en términos de preguntas, comentarios y sugerencias. La predisposición general a continuar con el hilo lógico de la clase es tangible. Y la receptividad para seguir una discusión teórica más elaborada es notable.

CONCLUSIONES

Cuando es posible agregar un CAS a la metodología de enseñanza basada en la resolución de problemas, se espera un refuerzo en la Comprensión Conceptual, ya que el alumno analiza fenómenos matemáticos en su estructura lógica intrínseca, dejando a la lógica interna del procesador los elementos secundarios que podrían distraer (como cálculos tediosos). Paralelamente, el alumno comprende el significado de un concepto matemático al verse forzado a “instruir” al procesador de manera rigurosa y con sintaxis impecable (“una máquina hará solamente lo que usted le enseñe”). En la experiencia que hemos relatado, el alumno observa efectuar esta tarea al docente, de ahí la importancia de poder interactuar con el programa. Nos hemos convencido que esta actividad ejecutada en el momento tiene el sabor del *reality show* tan caro a todas las generaciones de humanos. El método de exposición tradicional con cálculos pre-elaborados resulta, comparativamente, más estático.

También se espera reforzar el desarrollo de la auto-confianza en la comprensión-resolución de problemas.

Con los mismos elementos teóricos elementales y la motivación de un problema, más el auxilio de algún CAS los alumnos traspasan la barrera de la comprensión del problema, y se improvisan técnicas para construir otros ejemplos de la misma familia de problemas. Es decir, *comprenden el problema* de manera conceptual.

Por último se espera un refuerzo en la construcción de conexiones lógicas (razonamientos). Este punto es muy importante en la formación de Licenciados y Profesores en Matemáticas y Ciencias de la Computación y está directamente ligado a la compresión conceptual.

El área de Matemática Discreta es fecunda en problemas, aún al nivel muy elemental. Los enunciados suelen requerir un mínimo de lenguaje matemático, en contraposición con las soluciones que pueden presentar insospechados niveles de complejidad. La búsqueda de enfoques teóricos con vistas a la resolución de problemas es apasionante y muy instructiva. Un libro muy interesante para tal fin es [2].

En la actualidad, es cada vez más fácil acceder a la tecnología necesaria que es mínima, un procesador con un software simbólico instalado y un SO multitarea. El programa MAXIMA es gratuito y puede instalarse en un par de minutos, si fuese necesario. Posiblemente requiere permisos de administrador. En [6] está la dirección de la interfaz wxMaxima, pero desde donde puede descargarse todo el paquete.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Gavrilov, G. P., Saposhenko, A. A., *Problemas de Matemática Discreta*. Editorial MIR, 1980.

[2] Grahan R.L., Knuth D.E., Patashnik O., *Concrete Mathematics*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1988.

[3] Grimaldi, Ralph P., *Matemáticas, discreta y combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana. 1989.

[4] Niven, Ivan, *Matemática de las Opciones o cómo contar sin contar*. Red Olímpica 1995.

[5] Pérez Pantaleón, Gillermo A. *La Enseñanza y el Aprendizaje de la Formulación y la Resolución de Problemas Matemáticos*. Editorial FAU-UNT. 2009.

[6] http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page