TRES MÉTODOS MATEMÁTICOS PARA UN MODELO SIMPLE DEL GOLPE DE ARIETE.

Alicia E. Carbonell, Irma M. Benítez, Liliana E. Giménez, Mauricio C. Friedrich
Facultad Regional Paraná. Universidad Tecnológica Nacional. Argentina.

alielecarbo@gmail.com; manybenitez@hotmail.com ; lilianagimenez@yahoo.com.ar; mfriedrich@hotmail.com *Área Temática: 2 - Aplicaciones de la matemática*

***Palabras claves**: método de las características-golpe de ariete- trabajo interdisciplinario*

***Resumen**:*

El fenómeno del golpe de ariete se produce en conducciones cerradas cuando se altera bruscamente el caudal por cierre de una válvula. El efecto físico es muy conocido en mecánica de los fluidos y consiste en la aparición de movimiento oscilatorio del fluido con la correspondiente variación ondulatoria de la presión en gran magnitud. Se usa el modelo más simple posible proveniente de la teoría elástica que da lugar a una ecuación diferencial hiperbólica con condiciones iniciales y de frontera específicas. Se implementa el método de las características para simular computacionalmente el efecto y enseñar el tema de forma motivadora como integración de saberes desde distintas disciplinas.

Introducción:

El fenómeno del golpe de ariete, se produce ante el cierre brusco de un obturador o una válvula, la detención de una bomba o el arranque de una turbina. Es tan importante la solicitación producida sobre la instalación que han sido numerosos los casos que pueden citarse en los que la imprevisión acerca de su presencia ha determinado la inutilización definitiva de instalaciones muy importantes y muy costosas. Por tratarse de un caso extremo en cuanto a la magnitud de las consecuencias y porque es la referencia que se toma en los cálculos y proyectos como margen de seguridad, se analiza en este estudio lo que se define como "cierre instantáneo". Se supone que en una tubería de transporte, el obturador o válvula estrangula la corriente en un intervalo de tiempo tan pequeño que puede ser considerado "cero". En el análisis de este fenómeno participa una variada gama de aspectos, tanto propios de la dinámica de los fluidos como de la estática del sólido y de la resistencia de materiales, lo que lo convierte en un ejemplo típico de integración de conocimientos en el campo de la ingeniería. Además, las aplicaciones derivadas del desarrollo de sistemas de protección de las instalaciones, como de la optimización de recursos en los materiales utilizados ofrecen un campo tan vasto de posibilidades, que permiten lograr soluciones con nuevas metodologías de cálculo. Los resultados teóricos esperados de presión en función del tiempo, con un supuesto comportamiento elástico en la válvula y en el punto medio de la tubería se muestran en la Fig 1.

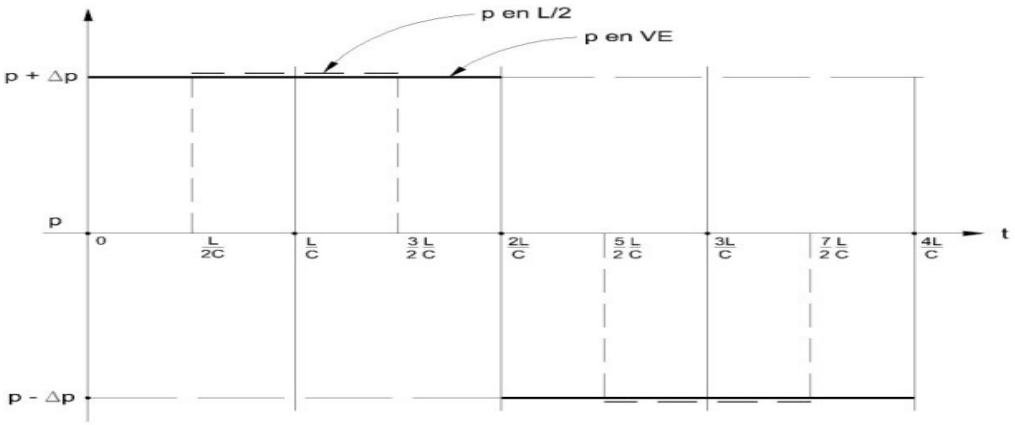

Fig. 1: Presión - Tiempo teórico

Fundamentación:

Dada la importancia de innovar en las metodologías de enseñanza del abordaje y resolución de los problemas que le son propios a los ingenieros se hace un trabajo interdisciplinario que permite mostrar la importancia de la integración de saberes al encarar el análisis de un problema definido.

Desarrollo:

Especificaciones del problema real que se trabaja:. el estudio se hace en un sistema elemental de un tanque con la libre circulación de un líquido de una densidad determinada, en el que se produce un fenómeno transitorio a partir de un cierre instantáneo de una válvula. En particular, el líquido contenido en el sistema es agua.

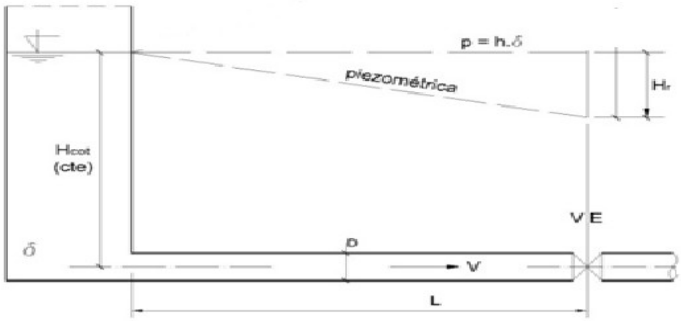

Fig.2: Tanque - cañería

La altura piezométrica especificada en la Fig. 2 es la altura que alcanzaría el líquido en una chimenea de equilibrio vertical colocada en la abscisa correspondiente de la cañería y, para hacer simplificaciones, se supone coincidente con la altura cota del tanque de suministro del líquido. El suministro de agua del tanque es tal, que en estado abierto el flujo de líquido por la cañería sería constante, y también se mantendría constante la altura del agua en el tanque. Se simplifican los supuestos para lograr un modelo dinámico simple. El modelo físico representa el estado transitorio donde se produce la sobrepresión en la cañería. En una implementación concreta, el tanque de reserva tiene una altura, de la superficie libre respecto a la dirección del eje del caño, de Hcot = 40 m. El fenómeno del golpe de ariete se origina por el cierre instantáneo de la válvula VE. ; según la teoría elástica, se produce instantáneamente una sobrepresión de amplitud $\Delta p = \rho\, a\, V0$, donde a es la celeridad de la onda de perturbación de presión en el medio fluido, se toma como $a = 1200$ ms y el peso por unidad de volumen del agua en condiciones normales es$\rho = 1000$ kgm3. La pared de la cañería se estudia como de comportamiento solamente elástico. El agua se considera como un líquido no viscoso y su factor de fricción con el líquido se desprecia en este fenómeno transitorio. La longitud de la cañería es L= 600 m y el diámetro es D = 60 m. Las ecuaciones que modelan el fenómeno, tienen como incógnitas a la presión, $p = p(x,t)$, y la velocidad, $V = V\,(x,t)$ de un elemento de fluido y se basan en las ecuaciones de balance de masa, cantidad de movimiento y de energía que con detalle se puede ver en [3]. Una de las ecuaciones se deriva de la segunda ley de Newton, suponiendo dirección unidimensional del movimiento del líquido en la cañería:

$$L_2 = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho . a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad (2)$$

, y la otra, de las ecuaciones de continuidad aplicada a un volumen de control:
En las expresiones L1 y L2 involucran las siguientes constantes: ρ, a, D que es el diámetro de la cañería, y f, el factor de fricción de la pared. El reemplazo de $\partial V \partial t$ de (1) en la ecuación (2) da lugar a la ecuación diferencial que modela el fenómeno de la sobrepresión en el estado transitorio

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,t) \qquad (4)$$

; una ecuación análoga modela la velocidad de la onda en el estado transitorio
Las condiciones iniciales son conocidas. Se dan en el cierre instantáneo de la válvula, en la que la velocidad en todos los puntos x de la cañería es $V_{x,t=0} = 2\,g\,H_{cot}$ y la presión del fluido, $p_{x,t=0} = \rho\,g\,H_{cot}$, con $0 \leq x < L$.

En el lugar de acople de la cañería y el tanque $V_{x=0,t=0}$. Las derivadas de la presión y de la velocidad en el instante inicial presentan una singularidad en el extremo de la cañería, donde se encuentra la válvula. El problema se resuelve con la consideración del crecimiento lineal de los valores en el último escalón de tiempo de la discretización temporal implementada. La derivada de la presión en todos los puntos de la cañería en el instante inicial se considera cero, excepto en x= L, donde se especifica el valor lineal de aumento desde el valor p al valor $p+\Delta p$ en el último escalón de tiempo. De igual manera se especifica la derivada de la velocidad en $t=0$, variando linealmente en el último escalón de tiempo de la discretización a realizar desde el valor inicial a cero. Al despreciar la fricción el tiempo del transitorio es infinito se aplica el Método de las características, con base a ref [5]. De las ecuaciones (1) y (2), la combinación lineal: $L = L1 + \lambda\, L2 = 0$, verifica para cualquier valor real de λ. Si en particular $\lambda = \pm 1 \rho\, a$, entonces resulta $d\,x dt = \pm a$ y esto vale para las direcciones características en los puntos de las rectas marcadas en verde en la Fig. 3. Sea L la longitud del espacio donde se produce el fenómeno. Haciendo un mallado de [0, L], en una cantidad par de partes n, de ancho Δx y el

correspondiente mallado temporal con $\Delta t = \Delta x$ a . La condición de velocidad característica se cumple también

en todas las rectas indicadas en el dominio del problema de igual dirección que las indicadas en verde en la Fig. 3.

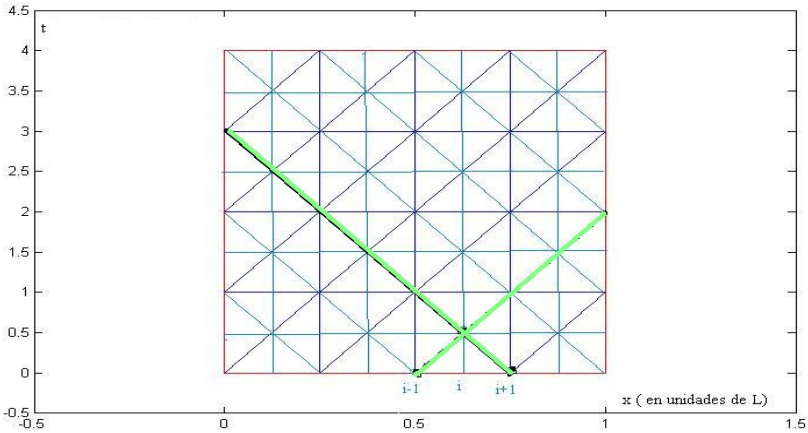

Fig.3: Mallado x-t

Calculando las integrales definidas de la ecuación de las velocidades en las direcciones características, desde A a P, y desde B a P, respectivamente, se obtienen dos ecuaciones. Estas determinan la presión y la velocidad en el punto P en el tiempo t, en función de los valores correspondientes a los nodos laterales, A y B en un tiempo anterior, como se representa en la Fig.4. Una ecuación corresponde a la dirección característica C+, la trayectoria recta de pendiente positiva, y da la presión y la velocidad del punto P, en función de los respectivos valores del punto A. La otra, da los valores de velocidad y presión del punto P, en función de los valores del punto B.

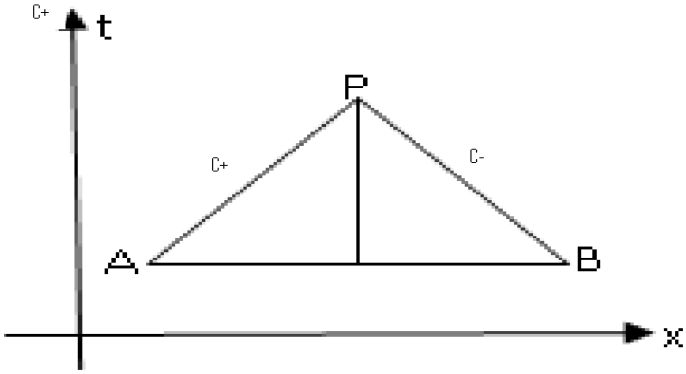

Fig. 4: Triángulo de referencia en el mallado espacio temporal

Cuando el mallado espacial es regular y se hacen n partes, quedan determinados en el espacio $n+1$ nodos, {x0,

x1, x2,..., xi,..,xn}, i es un indicador entero, $0 \leq i \leq n$. Para generalizar lo que sucede en todos los nodos

interiores de la malla, se relaciona el nodo A con el i - 1, el nodo B con el i + 1 y el nodo P con el i-ésimo. Se llega a determinar las ecuaciones de presión y velocidad para cada uno de los nodos intermedios en el tiempo t, en función de la información en los nodos laterales en el tiempo t - Δt. En lugar de trabajar con las presiones y las velocidades, se lo hace con los valores de uso técnico para estos problemas, que son la altura piezométrica

H y el caudal Q. El cambio de variables se hace según las siguientes expresiones: $p = \rho\, g\, H$ y $Q = V\, A$, donde

g es la aceleración de la gravedad, A es la sección transversal por la que fluye el líquido y D es el diámetro de la

cañería. Como los valores de H y Q en un nodo interior calculados según ambas direcciones características tienen

que coincidir, resulta: $Qi=Cp - CM\ Bp + BM$ (5) y $Hi=Cp - Bp\ Qi$ (6), donde $Cp = Hi-1-B\ Qi-1$, CM

$= Hi+1 - B\ Qi+1$, $Bp=B+R\ Qi-1$, $BM=B+R\ Qi+1$, y $R= f\ \Delta x2\ g\ D\ A2$. Para tiempos $t > 0$, correspondiente

a los múltiplos pares de Δt, la información en los nodos laterales no está disponible; se incorpora una ecuación adicional específica para cada borde y para cada problema.
Las condiciones de borde son impuestas por el problema en particular. El caudal en el borde donde está la

válvula, genera una de las condiciones de frontera, para $t \geq 0$, $Q(L, t) = 0$ y $H\ L, t$. En el inicio de la cañería, la

altura piezométrica es la altura del tanque $H\ 0, t=$ 40 m y el caudal se deduce de las relaciones especificadas

para el triángulo de referencia desde B hasta P.

Resultados:

Las implementaciones se han hecho de manera elemental sobre plataforma Linux desarrollado en Octave. Los resultados obtenidos con el método de las características, muestran los resultados esperados de presión variable en función del tiempo. En un instante fijo t, se muestra en la Fig.5. Los autores ponen a disposición de quién esté interesado el software elemental desarrollado. Se han hecho implemtaciones con el método de elementos finitos y diferencias finitas, según los resultados de [1] y [2] que no se presenta en este trabajo porque los resultados obtenidos no son como los esperados, o no se ha correctamente el software de simulación. El mejor resultado ha sido la interacción entre distintas cátedra en la enseñanza de un tema que parece elemental y que al momento de las implementaciones presenta una variedad de situaciones problemáticas que no se encuentran desarrolladas en la teoría de ningún libro y que se pueden resolver al plantearlas en grupos interdisciplinarios. Al aplicarlo, como metodología docente se puede hacer extensivo a los alumnos produciendo motivaciones especiales para la ampliación de conocimientos en las áreas de interés. El producto conceptual, actitudinal y procedimental del trabajo conjunto de profesores para la resolución de un problema puede ser mostrado a los alumnos como trabajo académico posible.

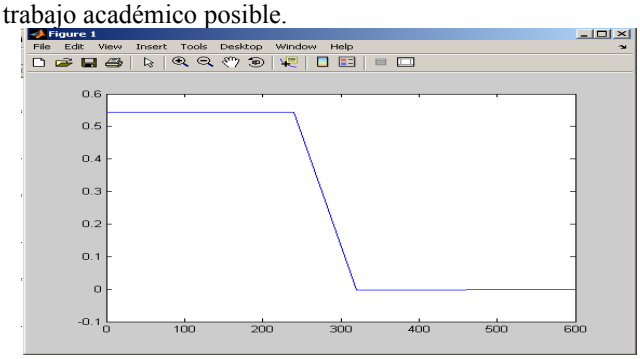

Fig.5

Conclusiones:

Se presenta el método de las características como el método más simple que modela de manera similar a la bibliográfica el fenómeno real. En el análisis desarrollado precedentemente se ha idealizado las características tanto del fluido como de la tubería y se ha despreciado la viscosidad del fluido, la respuesta del material a la carga instantánea de sobrepresión, el límite de vacío y presión de vapor del líquido, el cierre de la válvula en tiempo finito que no es precisamente instantáneo, la elasticidad imperfecta del conducto entre otros. Con

respecto a la tubería, se ha considerado un comportamiento elástico, cuando en realidad es elastoplástico. En la representación de la variación de la presión en la válvula respecto del tiempo, se toma como línea de base la que corresponde a la presión del fluido en el conducto al momento de producirse el cierre. Una conclusión a ser tenida en cuenta en estudios posteriores, es que la diferencia resultante de sustraer a dicha presión el valor calculado nunca puede ser inferior al que corresponde al vacío absoluto, presión cero, por lo queda determinado este valor como el mínimo absoluto. Como se trata de un líquido real, al descender la presión y alcanzar un valor equivalente al de la presión de vapor de dicho líquido, se produce cavitación ("cavidades" consecuentes del cambio de fase líquida a fase vapor). Por lo tanto es realmente el valor de presión de vapor del líquido, correspondiente a la temperatura a que se encuentra, el límite inferior de la presión mientras dure el fenómeno. Con respecto a los resultados simulados se obtienen valores negativos que son menores al mínimo, físicamente posible porque la depresión no puede descender por debajo de la "presión de vapor" del líquido respecto del vacío absoluto (p = 0). La simulación puede ser enriquecida con el agregado gradual de distintas variables que intervienen en el fenómeno del golpe de ariete.

.

Referencias Bibliográficas:

[1] Kochupillai, J. et al. A new finite element formulation base don the velocity of flor for water hammer problems, Elsevier, India, 2004

[2] Leslie, D.J., and Tijsseling, A.S., Travelling discontinuities in waterhammer theory: attenuation due to friction, In Proceedings of the 8th International Conference on Pressure Surges, BHR Group, The Hague, 2000.

[3] Sewell, G., The numerical solution of ordinary and partial differential equations, 2a.ed.. U.S.A: Wiley-Interscience, 2005.

[4] Streeter, V. y Wylie, B., Mecánica de Fluidos. México: Mcgraw-Hill, 2000.

[5] Wylie, E.B. y Streeter, V. Fluid Transients in Systems. USA: Prentice-Hall Inc, 1993.