LOS PROBLEMAS INVERSOS EN TEORÍA DE PROBABILIDADES

Alicia Isabel Ledesma[(1)]; **Víctor Martínez Luaces**[(2)]
[(1)] Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ingeniería, Área Ciencias Básicas, Argentina; [(2)] Fundación Julio Ricaldoni. Facultad de Ingeniería. U.delaR. (Uruguay).
alicia.ledesma@ing.unlp.edu.ar, alisabel.ledesma@gmail.com; victorml@fing.edu.uy, victoreml@gmail.com

Área temática: Experiencia Educativa

Palabras claves: problemas inversos en Probabililidades. Teorema de Bayes.

Resumen.
El objetivo de este trabajo es mostrar un análisis sobre los pasos necesarios en la aplicación del Teorema de Bayes o de las Probabilidades Inversas y presentar los principales errores e interpretaciones incorrectas a partir de estudios empíricos realizados en distintos grupos de alumnos de la asignatura Probabilidades, en carreras de Ingeniería. Comenzamos mencionando algunos problemas inversos en distintas ramas de la ciencia, como también la clasificación de estos problemas. Se establecen estrategias adecuadas para la enseñanza del teorema mencionado, presentando esto a través de dos problemas. Se presta especial atención a que la verosimilitud de una evidencia, se deba a una supuesta causa, depende de la probabilidad a priori de la causa.

1. Introducción

1.1 *Problemas directos e inversos*

Investigar es de alguna manera resolver problemas. Sin intención de dar una clasificación rigurosa, en principio se puede hablar de problemas directos e inversos. Los *problemas directos*, según Groestch, (Groestch, 1999) pueden ser vistos como aquellos en los que se provee la información necesaria para llevar a cabo un proceso bien definido, estable, que lleva a una única solución. La resolución de un problema directo, como hallar las raíces de una ecuación algebraica o predecir los efectos de una acción, significa análisis o razonamiento progresivo, desde las premisas hasta llegar a las conclusiones.
En cambio, si dada cierta información sobre los valores de algunas cantidades medidas, se utilizan relaciones teóricas para obtener información de los valores del conjunto de parámetros, se estará resolviendo un *problema inverso* (Tarantola & Valette, 1982). La resolución de problemas inversos involucra síntesis o razonamientos regresivos, desde las conclusiones hasta llegar a las premisas, de los efectos a sus causas. Los problemas inversos presentan gran dificultad debido en gran parte a que, o bien tienen múltiples soluciones o bien son insolubles (Bunge, 2006) y se presentan habitualmente en la práctica profesional de muchas carreras y profesiones. Por ejemplo,

- en Medicina dada una cierta enfermedad, enumerar los síntomas es un problema directo y sencillo, que ya está resuelto y se puede ver en cualquier texto especializado. En cambio, diagnosticar la enfermedad del paciente a partir de sus síntomas no siempre es sencillo y requiere un médico experimentado, se estará resolviendo un problema inverso.
- en Derecho Penal la justicia debe identificar a los autores de un crimen conociendo como eran sus víctimas, los testimonios de los testigos y las pistas que surgen de la escena del crimen. Nuevamente, no es más, ni tampoco menos, que un problema inverso.
- en Psicología, o simplemente en nuestro trato diario con otras personas, intentamos adivinar las intenciones de los demás sobre la base de cómo es su comportamiento. Esto implica que todo el tiempo en nuestras relaciones laborales, afectivas, etc., estamos resolviendo problemas inversos.
- en Cálculo Matemático existe una gran variedad de problemas inversos dada la relación inversa existente entre la diferenciación y la integración. Así el cálculo de trayectorias, la determinación de la deformación y distribución de masas, la distribución y balanceo de fuerzas son algunos ejemplos de Problemas Inversos que se resuelven usando el Cálculo Matemático. Para su resolución se emplean métodos de aproximación basados en la discretización de derivadas e integrales.
- en Estadística un problema inverso es un problema de inferencia o estimación
- en Probabilidades Thomas Bayes, un matemático británico, estudió el problema de la determinación de las causas a través de los efectos observados. El teorema que lleva su nombre resuelve el problema conocido como de la "*probabilidad inversa*". Esto es, valorar probabilísticamente las posibles condiciones que rigen supuesto que se ha observado cierto suceso. Se trata de probabilidad "inversa" en el sentido de que la "directa" sería la probabilidad de observar algo supuesto que rigen ciertas condiciones.

Finalmente, en Filosofía, cabe citar esta frase de Bunge (Bunge, 2006): "El que casi todos los filósofos hayan ignorado las peculiaridades de los problemas inversos plantea este otro problema inverso: el de adivinar los motivos de este descuido descomunal por parte de los filósofos".

1.2 *Clasificación de los Problemas Inversos*

En principio hay dos tipos diferentes de problemas inversos, pero para caracterizarlos correctamente comencemos por esquematizar el problema directo como sigue (Martinez Luaces, 2010).

Entrada→Proceso→Salida

o bien como:

Causa→ Modelo→Efecto

Si x simboliza la entrada y K el proceso, entonces el proceso directo es encontrar Kx. Esto se esquematiza a continuación, en la figura 1:

Entrada	*Proceso*	*Salida*
x	K	¿y = Kx?
Causa	*Efecto*	*Modelo*

Figura 1. *Esquema de los problemas directos.*

En el esquema de la Figura 1, se dispone de datos y de un cierto procedimiento y se solicita el resultado, por ejemplo se dan dos polinomios, se conoce el algoritmo de división y se solicitan como respuesta, los polinomios cociente y resto.

Bajo este esquema, cada problema directo sugiere dos problemas *inversos* inmediatos: uno denominado *problema de causalidad* y otro denominado *problema de identificación* del modelo.

En el problema de causalidad, dado un modelo *K* y un efecto *y*, hay que encontrar la causa del efecto. Un esquema de esta situación se puede ver en la figura 2:

Entrada	*Proceso*	*Salida*
¿?	k	y = Kx
Causa	*Modelo*	*Efecto*

Figura 2. *Esquema de los problemas de causalidad.*

mientras que en el problema de identificación del modelo, dada información de causas-efectos, hay que identificar el modelo (Martinez Luaces, 2010). Esto puede ser esquematizado como se ve a continuación, en la figura 3:

Entrada	*Proceso*	*Salida*
x	¿?	y = Kx
Causa	*Modelo*	*Efecto*

Figura 3. *Esquema de los problemas de identificación*

2. Fundamentación

2.1 Problemas Inversos en Matemática Educativa

Como señalan algunos autores, los problemas directos dominan el currículo en los cursos tradicionales de Matemáticas, incluyendo Probabilidades y Estadística. *No obstante, si se desea modernizar los contenidos de los cursos, los problemas inversos deberían tener un papel preponderante ya que proveen una plataforma para explorar cuestiones de existencia, unicidad y estabilidad a la vez que plantean situaciones más interesantes y cercanas a la vida real.*

En el nivel superior, un problema directo de Matemática Financiera consiste en calcular cuánto cobrará a su retiro un trabajador que desarrolló su actividad por N años, realizando aportes mensuales $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (si fueran N años completos, sería $k = 12N$). Esto puede ser un poco engorroso, pero no es difícil y de hecho, en la vida real hay programas que se encargan de hacer automáticamente dicho cálculo. Mucho más interesante y

complicado es el problema inverso: ¿cuántos años se debe trabajar y cuanto se debería aportar para tener derecho a un retiro razonable? La solución no es sencilla ni es única y tampoco está claro cuál puede ser la mejor opción de las varias disponibles. De hecho, esto es lo que motiva a las diversas opciones que compiten en el mundo real: seguros, jubilaciones privadas, etc.

En este trabajo presentamos el Teorema de Bayes como la solución a un problema inverso particular, el de la "probabilidad inversa". El cálculo de probabilidades inversas mediante el Teorema de Bayes es fundamental en las aplicaciones de la Estadística, porque permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos aleatorios a medida que adquirimos nueva información. Este tipo de razonamiento es muy importante en tareas profesionales como el diagnóstico, evaluación, toma de decisiones y aplicación de la inferencia estadística en la investigación empírica. Aún así en los cursos de análisis de datos de nivel universitario existe una tendencia a minimizar la enseñanza del Teorema de Bayes (Moore, 1997), debido, posiblemente, a la influencia de las primeras investigaciones en psicología que trataron el razonamiento condicional (Tversky & Kahneman, 1982 – Bar-Hillel, 1987) y sugirieron la dificultad del razonamiento bayesiano y la existencia de sesgos respecto a él, tanto en estudiantes como en profesionales.

En 1995 Rossman y Short (Rossman & Short, 1995) señalan que en los cursos de estadística en Estados Unidos se estudia una breve introducción a la probabilidad que incluye la definición clásica, unión e intersección de eventos y las reglas correspondientes a eventos independientes y mutuamente excluyentes. La probabilidad condicional y el teorema de Bayes son temas opcionales pues no se consideran necesarios para la comprensión de los siguientes contenidos de estadística. Según estos autores con el uso de estrategias apropiadas los estudiantes pueden lograr una comprensión intuitiva de esta temática y visualizar su aplicación a una serie de problemas del mundo real.

En la resolución de problemas de probabilidades, en general, los estudiantes se enfrentan a una serie de dificultades que comienzan con la traducción de los enunciados dados en lenguaje coloquial al lenguaje probabilístico, lo cual implica la identificación de eventos y sus probabilidades y las condiciones que permiten buscar respuestas a las preguntas de los problemas. Reconocer probabilidades, una tarea de por si compleja, se dificulta aún más cuando estas no aparecen en forma explícita, sino que vienen expresadas en términos de frecuencias, porcentajes o razones, o bien cuando se trata de eventos que están condicionados por la ocurrencia de otros sucesos, entrando en el ámbito de lo que se conoce como la probabilidad condicional.

En este campo se han realizado investigaciones enfocada principalmente a la determinación de errores en el razonamiento probabilístico condicional, que conduce a la búsqueda de alternativas para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de este tema. En muchos casos, dado un suceso A, existe una serie de eventos B_i que pueden ocasionarlo, para los que se conoce la probabilidad inicial o *a priori* de su ocurrencia, P (B_i), pero el conocimiento de que ya A ha ocurrido modifica dichas probabilidades, dando origen a las llamadas probabilidades *inversas o a posteriori*, $P(B_i/A)$, que es lo que principalmente atañe al razonamiento bayesiano, es decir sabiendo que el suceso A ha ocurrido, interesa determinar cuál de las posibles causas tiene más probabilidad de haberlo originado, utilizando para ello el Teorema de Bayes o Teorema de las Probabilidades Inversas . Se presentan dos ejemplos para obtener formalmente la regla de Bayes. Estos ejemplos ilustran además lo importantes y comunes que son las situaciones donde es necesario usar esta regla. Las estrategias propuestas por Rossman y Short se centran en convertir los datos del problema en frecuencias simples, partiendo de una base de 100 y organizándolos en una tabla de doble entrada donde se pueda visualizar con facilidad la restricción del espacio muestral para la determinación de las probabilidades condicionales involucradas. La idea es partir de problemas clásicos y sencillos como los que se desarrollan en el apartado 3.

2.2. Marco teórico

El Teorema de Bayes lleva el nombre del reverendo Thomas Bayes (1701-1761) quien lo formuló. El planteo que hace Bayes es, sabiendo que un evento A ha ocurrido, es posible calcular la probabilidad de que provenga de alguna de las posibles causas B_i . Este teorema, a partir de un conjunto de probabilidades *a priori* de ciertos eventos, permite calcular las probabilidades *a posteriori*, que son las probabilidades de esos eventos a priori corregidas ante la evidencia de que un determinado suceso ha tenido lugar.

En el año 1763, dos años después de la muerte de Thomas Bayes, se publicó una memoria en la que aparece, por primera vez, la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados. Formalmente enunciamos el teorema de Bayes como sigue,

Teorema de Bayes

Sean $B_1, B_2, ..., B_n$ sucesos que constituyen una partición de un espacio muestral S, tal que $P(B_i) > 0$ para i = 1, 2,…, n y sea A cualquier suceso de S tal que $P(A) > 0$. Entonces:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i).P(A / B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j).P(A / B_j)} \quad para \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

Como podemos ver la fórmula de Bayes contiene los elementos a considerar en la solución de los problemas que involucren el cálculo de probabilidades *a posteriori* mediante un razonamiento probabilístico, a saber,

- un conjunto de eventos B_i, i = 1, 2,…, n que forman una partición del espacio muestral y sus respectivas probabilidades a priori $P(B_i)$.
- un evento principal A y su probabilidad de ocurrencia condicionada a cada una de sus posibles causas $P(A/B_i)$; i = 1, 2,…, n.
- la probabilidad de A calculada a partir del Teorema de la Probabilidad Total.
- la probabilidad a *posteriori* de B_i sabiendo que A ha ocurrido, $P(B_i/A)$.

Las aplicaciones del Teorema de Bayes son muchas y ocasionan grandes polémicas. El problema radica que al decir "A ha ocurrido" se puede pensar que es un hecho determinístico y por tanto no tendría sentido calcular $P(A)$, es decir si A ha ocurrido entonces $P(A)=1$. No obstante, el problema cambia radicalmente si se expresa "si A ocurre", que es la interpretación correcta del teorema.

La importancia de este teorema en Estadística va mucho más allá de su aplicación como fórmula que facilita probabilidades condicionales. Este teorema ha dado origen a una forma de entender la Estadística, llamada *Estadística Bayesiana*.

En el modelo frecuentista un parámetro poblacional θ es considerado constante, mientras que los datos obtenidos de una muestra $(X_1, X_2,..., X_n)$ son aleatorios.

En el modelo bayesiano el planteamiento es diferente:

• El parámetro poblacional θ es considerado aleatorio.

• La información que se tiene de la población a través de los datos $(X_1, X_2,..., X_n)$ se considera constante.

• Para la estimación del parámetro poblacional es necesario un conocimiento previo de la distribución que pueda seguir el parámetro poblacional, la llamada distribución *a priori*.

• No se hace referencia a *intervalo de confianza* sino a *intervalo de credibilidad*.

El Teorema de Bayes ha dado origen a múltiples controversias. A pesar de que puede obtenerse, como vimos, a partir de las leyes básicas de la probabilidad, permite de alguna manera incorporar el grado de creencia de las personas, a medida que se obtiene más información sobre los sucesos que condicionan un evento dado, Si la información no es precisa algunos usuarios del teorema hacen suposiciones no sustentadas para las probabilidades *a priori* de los eventos B_i que particionan al espacio muestral. Pero esto no es un defecto, sino una mala aplicación del teorema. Por otro lado también se ha argumentado que en algunas situaciones no hay multiplicidad de causas posibles, B_i, sino un solo evento B condicionante del evento A. Tampoco aquí existe un problema real porque el evento B y su complemento son excluyentes y particionan al espacio muestral, por tanto es aplicable la fórmula de Bayes.

3. Algunos Problemas

***Problema 1*. Identificación del origen de un artículo defectuoso**

Para la fabricación de un gran lote de artículos similares se utilizaron tres máquinas M_1, M_2 y M_3. Supóngase que el 20% de los artículos fueron fabricados por la máquina M_1, el 30% por la máquina M_2 y el 50% por la máquina M_3. Supóngase además que el 10% de los artículos fabricados por la máquina M_1 son defectuosos, el 20% de los artículos fabricados por la máquina M_2 y el 30% de los fabricados por M_3 también son defectuosos. Se selecciona al azar uno de los artículos del lote y resulta ser defectuoso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que este artículo haya sido fabricado por M_1?

b) ¿Cuál es la máquina más probable que lo haya fabricado?

Resolución

Como primera instancia Rossman y Short proponen la construcción de una tabla de doble entrada como la que se muestra a continuación,

	Defectuosos	No Defectuosos	Total fila
M_1			
M_2			
M_3			
Total Columna			

Y una serie de preguntas dirigidas a los estudiantes para completar dicha tabla:

i) *De cada 100 artículos producidos, ¿cuántos fueron fabricados por la máquina M_1? ¿Por M_2? ¿Por M_3?*

ii) *De los artículos fabricados por la máquina M_1, ¿cuántos se esperaría que fueran defectuosos? Igual para las máquinas M_2 y M_3.*

iii) *¿Cuántos artículos del total de 100 en la tabla son defectuosos? ¿Cuántos son no defectuosos?*

Con los datos del problema se obtiene:

	Defectuosos	No Defectuosos	Total fila
M_1	2	18	20
M_2	6	24	30
M_3	15	35	50
Total Columna	23	77	100

Señalan los autores que una vez que los alumnos confeccionaron esta tabla pueden leer en ella sin dificultad las respuestas requeridas. Para responder los alumnos pueden hacer el siguiente razonamiento, del total de artículos defectuosos (23) se observa que la proporción que ha sido fabricada por la máquina M_1 es 2/23. De la misma manera la proporción de artículos defectuosos fabricados por M_2 es 6/23 y la proporción de los fabricados por M_3 es 15/23. Luego el artículo defectuoso que seleccionamos al azar tiene mayor probabilidad de haber sido fabricado por la máquina M_3. Siguiendo este proceso lo que se busca es que los estudiantes intuitivamente y sin mencionar el Teorema de Bayes, puedan en un primer momento comprender que lo que están haciendo es determinar la probabilidad a *posteriori* de que un artículo del que ya se sabe fue fabricado con defecto, provenga de una máquina en particular.

En segunda instancia a partir de un conjunto de preguntas adecuadas se induce al estudiante a identificar los eventos y las probabilidades involucradas en el teorema de Bayes, aún sin hacer mención del mismo. Por ejemplo,

i) *¿Cuál es la probabilidad de que el artículo seleccionado al azar haya sido producido por la máquina M_1? ¿Y por la M_2? ¿Y por la M_3?*

Si definimos los eventos B_i: "el artículo seleccionado al azar ha sido producido por la máquina M_i", para i = 1, 2, 3; las proporciones entre los totales de las filas y el total general (100), representan las probabilidades de estos eventos, así: $P(B_1)=\frac{20}{100}=0{,}20$, $P(B_2)=\frac{30}{100}=0{,}30$, $P(B_3)=\frac{50}{100}=0{,}50$

ii) *¿Cuál es la probabilidad de que el artículo sea defectuoso?*

Sea el evento D: "el artículo seleccionado es defectuoso", entonces P(D) será el cociente entre los artículos de la columna "defectuosos" y el total general 100, indicamos entonces $P(D)=\frac{23}{100}=0{,}23$

ii) *Si el artículo fue producido por la máquina M_2, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?*

La respuesta es una probabilidad condicional, que indicaremos

$$P(\mathrm{D/B_2})=\frac{\textit{valor que aparece en la celda } (M_2-\textit{defectuoso})}{\textit{total de la fila para la máquina } M_2}=\frac{6}{30}$$

Con estos valores y aplicando la definición de probabilidad condicional, se calcula la probabilidad que se quiere conocer,

$$\mathrm{P(B_2/D)}=\frac{\mathrm{P(B_2\cap D)}}{\mathrm{P(D)}}=\frac{\mathrm{P(D/B_2).P(B_2)}}{\mathrm{P(D)}}=\frac{\frac{6}{30}\cdot\frac{30}{100}}{\frac{23}{100}}=\frac{6}{23}=0{,}26$$

Finalmente, el docente pude proceder a formalizar el Teorema y haciendo referencia al Teorema de la Probabilidad Total, aplicable en el caso de la probabilidad que aparece en el denominador de la Fórmula de Bayes.

Ayuda mucho en la resolución de este problema la utilización de una serie de estrategias de representación para facilitar la determinación de las probabilidades que son requeridas; entre ellas además de la confección de tablas de doble entrada se encuentran los diagramas de árbol y los diagramas de áreas. Por razones de espacio veremos solamente los diagramas de árbol. En la construcción del diagrama de árbol, en la primera ramificación se consideran los eventos B_i y se colocan sus probabilidades $P(B_i)$. En la segunda ramificación, para cada B_i se considera la probabilidad de que ocurra D, es decir $P(D/B_i)$, o que ocurra su complemento $P(\overline{D}/B_i)$. En los puntos finales de las ramificaciones se colocan las probabilidades conjuntas de que ocurran D y B_i: $P(D\cap B_i)$. Al sumar esas probabilidades se tiene el denominador de la Fórmula de Bayes y el denominador vendrá dado por el punto final de la ramificación correspondiente. El diagrama para el problema dado se presenta en la Figura 4, como puede verse a continuación:

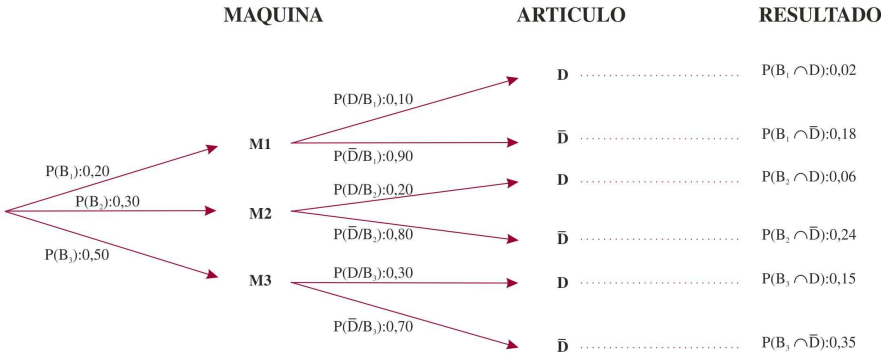

Figura 4. *Diagrama de árbol correspondiente al Problema 1.*

<u>Problema 2</u> **Pruebas de diagnóstico**

En una ciudad se seleccionan aleatoriamente 200.000 personas, entre 16 y 45 años, y se les efectúa una prueba para detectar si son usuarios de drogas. Se estima que el 1% de los mismos consumen drogas. La prueba que se efectúa muestra un resultado positivo en el 98% de los casos en que se le administra a una persona que usa drogas, es decir detecta el 98% de los usuarios de drogas. De manera similar, si la persona no usa droga alguna, la prueba arroja un resultado negativo en el 99% de los casos.

a) *Si se selecciona una persona al azar, se le administra la prueba y se obtiene un resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona consuma drogas?*

<u>Resolución</u>

Definimos los siguientes eventos:

D: "una persona elegida al azar consume drogas"

T^+ : "la prueba resulta positiva", T^- : "la prueba resulta negativa"

En el lenguaje de la epidemiología se utilizan los siguientes términos:

• ***Prevalencia*** , es el porcentaje de personas de la población de interés, que poseen la característica deseada, en este caso, la prevalencia del uso de drogas es del 1%.

• ***Sensibilidad de la prueba***, es la capacidad que tiene la prueba para detectar a aquellas personas que poseen la característica de interés. Describe el porcentaje de personas cuyo resultado de la prueba sería positivo, de entre aquellas que poseen la característica deseada, en este caso, consumir drogas. Su expresión matemática está asociada con, $P(T^+/D)=\dfrac{P(T^+\cap D)}{P(D)}$. La sensibilidad de esta prueba es 98%, lo cual indica que dicha prueba será positiva en el 98% y negativa en el 2% de los que consumidores de drogas.

• ***Probabilidad de falsos negativos***, es la probabilidad complementaria de la sensibilidad. Su expresión matemática es $P(T^-/D)=\dfrac{P(T^-\cap D)}{P(D)}$.

• ***Especificidad de la prueba*** indica el porcentaje de personas en las cuales el resultado de la prueba sería negativo de entre aquellas que no poseen la característica deseada. La expresión matemática que permite su cálculo es $P(T^-/\overline{D})=\dfrac{P(T^-\cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$. La especificidad en este problema es del 99%, lo cual indica que la prueba será negativa en el 99% y positiva en el 1% de los no afectados.

• ***Probabilidad de falsos positivos***, es la probabilidad complementaria de la especificidad. Su expresión matemática, $P(T^+/\overline{D})=\dfrac{P(T^+\cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$.

• V***alor predictivo positivo de una prueba diagnóstica*** es la probabilidad de que una persona, en la que la prueba es positiva, consuma drogas. La expresión matemática para su cálculo es $P(D/T^+)=\dfrac{P(D\cap T^+)}{P(T^+)}$. En el cálculo del valor predictivo positivo, VPP, influye la prevalencia. Supongamos que en una ciudad la prevalencia del HIV en la población general es 0,004, en las personas entre 40 y 60 años sin riesgos conocidos es del 0,001 y entre los drogadictos o ex drogadictos por vía intravenosa, es de 0,7. Si realizamos una prueba diagnóstica a un hombre de 45 años sin riesgos conocidos y otra a un drogadicto por vía intravenosa, en el cálculo de los respectivos valores predictivos positivos utilizaremos los valores de la prevalencia correspondientes a sus subpoblaciones 0,001 y 0,7 respectivamente. El uso de la prevalencia en la población general se usa si no se dispone de otros datos, pero siendo conscientes de que el cálculo puede alejarse bastante de la realidad.

• V***alor predictivo negativo de una prueba diagnóstica*** es la probabilidad de que una persona, en la que la prueba es negativa, no consuma drogas, en este ejemplo. La expresión matemática para su cálculo es $P(\overline{D}/T^-)=\dfrac{P(\overline{D}\cap T^-)}{P(T^-)}$.

En este ejemplo tenemos como datos: $P(D)=0{,}01$; la sensitividad de la droga nos dice que $P(T^+/D)=0{,}98$ y de acuerdo a la especificidad dada $P(T^-/\overline{D})=0{,}99$. El diagrama correspondiente se puede ver en la Figura 5:

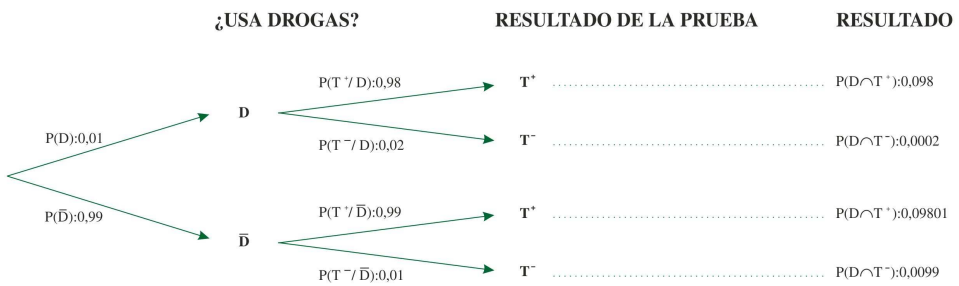

Figura 5. *Diagrama correspondiente al Problema 2*

Queremos hallar $P(D/T^+)$, esta probabilidad no se puede obtener de forma directa de los datos ni del árbol que los representa. Recurriendo a la definición de probabilidad condicional: $P(D/T^+)=\dfrac{P(D\cap T^+)}{P((T^+)}$. Usamos el diagrama de árbol para obtener las cantidades $P(D\cap T^+)$ y $P(T^+)$. Se tiene que $P(D\cap T^+)=P(D).P(T^+/D)$, lo que equivale a caminar por el árbol desde la raíz hasta la hoja donde obtenemos el resultado $D\cap T^+$. Así $P(D\cap T^+)=0{,}01\times 0{,}98$.

Para hallar $P(T^+)$vemos que la prueba puede dar positiva cuando la persona es drogadicta o aún cuando no es drogadicta. Entonces hay dos caminos en el árbol donde se obtiene un resultado positivo de la prueba. Estos caminos son mutuamente excluyentes, según se muestra en la figura 5, el evento $T^+=(D\cap T^+)\cup(\overline{D}\cap T^+)$ y su probabilidad es: $P(T^+)=P(D\cap T^+)+P(\overline{D}\cap T^+)$. El término $P(D\cap T^+)$ ya fue calculado, $P(\overline{D}\cap T^+)$ se obtiene de forma similar, por tanto $P(\overline{D}\cap T^+)=P(\overline{D}).P(T^+/\overline{D})$, obtenemos así $P(T^+)=P(D).P(T^+/D)+P(\overline{D})P(T^+/\overline{D})$. A fin de ilustrar este proceso en forma más visual, se presenta el siguiente esquema en la figura 6:

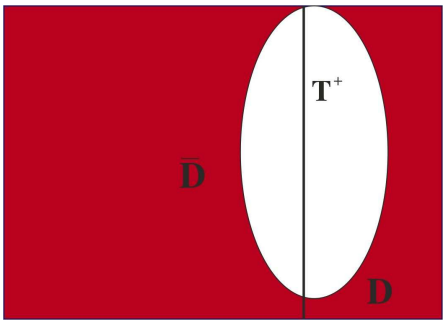

Figura 6. *Partición de las personas de acuerdo al resultado de la prueba*

Finalmente podemos calcular la probabilidad deseada:

$$P(D/T^+)=\frac{P(D).P(T^+/D)}{P(D).P(T^+/D)+P(\overline{D}).P(T^+/\overline{D})}=\frac{0{,}01\times 0{,}98}{0{,}01\times 0{,}98+0{,}99\times 0{,}01}=0{,}497$$

Por tanto la probabilidad de que una persona seleccionada al azar entre los 200.000 habitantes use drogas efectivamente, si la prueba da positiva es 0,497.

b) *De la población a la que se le administra la prueba, ¿cuántos resultados positivos se esperaría observar? ¿Cuántos falsos positivos habría? ¿Cómo es posible que con una prueba que tiene una sensitividad y una especificidad tan altas, más de la mitad de los resultados positivos correspondan a personas que no consumen drogas?*

<u>*Resolución*</u>

Esta pregunta se puede contestar examinando cuidadosamente el numerador y el denominador de $P(D/T^+)$. Aquí a pesar de la sensibilidad y especificidad altas, deberíamos poner énfasis en la prevalencia, como se explicó al comienzo del problema.

4 Estrategias para la resolución de problemas referentes al Teorema de Bayes

En diversos estudios exploratorios que hemos realizado en los cursos de Probabilidades del primer autor de este artículo, dirigidos a estudiantes de Ingeniería, sobre las dificultades en la resolución de problemas que involucran

al Teorema de Bayes se observa que los principales errores cometidos por los alumnos, enunciados de mayor a menor frecuencia son:

_ Identificar incorrectamente los datos.
_ Confundir probabilidad simple con probabilidad condicional.
_ Confundir probabilidad condicional con probabilidad conjunta.
_ Cometer errores en la partición del espacio muestral.
_ Construir incorrectamente el diagrama de árbol.
_ Cometer errores en la aplicación de la fórmula de Bayes.
_ Confundir una probabilidad condicional con su inversa, es decir confundir $P(A/B)$ con $P(B/A)$.
_ Errores en el cálculo de la probabilidad total.

Teniendo en cuenta los errores y malas interpretaciones en la resolución de problemas donde los estudiantes deben hallar probabilidades inversas, se recomienda a los alumnos de Probabilidades y de Estadística seguir los siguientes pasos,

a) *Comprender correctamente el enunciado del problema*. La comprensión del enunciado de los problemas es una de las mayores dificultades que se les presenta a los estudiantes al momento de la resolución, más aún si se trata de probabilidades condicionales y cálculo de probabilidades inversas. Los alumnos presentan serias dificultades para transformar el enunciado de los problemas al lenguaje probabilístico. Cuando se trata de problemas de aplicación del Teorema de Bayes, la dificultad es mayor porque se trata por la cantidad de datos y condiciones que deben identificar en el mismo.

b*) Identificación de datos y condiciones*. En este punto se les sugiere a los alumnos un plan para hacer efectiva la resolución. Se les aconseja seguir los siguientes pasos:

b_1) Identificar y enunciar formalmente el evento principal A.

b_2) Identificar los eventos condicionantes B_i que forman la partición del espacio muestral y enunciarlos formalmente.

b_3) Determinar a partir de los enunciados las probabilidades *a priori* de los eventos B_i, $P(B_i)$, y la del evento principal A condicionada a la ocurrencia de los B_i, $P(A/B_i)$.

c) Aplicar el teorema de la probabilidad total para calcular $P(A)$

d) Aplicar la fórmula de Bayes.

e) *Verificación de la factibilidad de los resultados*. En este punto se les aconseja analizar la factibilidad de que la respuesta obtenida sea correcta, a fin de descartar resultados no válidos, por ejemplo obtener una probabilidad negativa o mayor que uno o alguna otra que no se espera de acuerdo al enunciado del problema.

Lo propuesto para resolver problemas referentes al Teorema de Bayes fue implementado con un grupo de alumnos recursantes de la asignatura Probabilidades y Estadística y un grupo formado por alumnos no recursantes de las especialidades Civil e Hidráulica. Ambos cursos cerraron en marzo y no se evalúo aún la experiencia realizada con estos grupos reducidos de alumnos. Se pretende evaluar los resultados obtenidos para decidir si se implementará esta propuesta en todos los cursos existentes de Probabilidades y el de Probabilidades y Estadística dirigido a alumnos recursantes.

5. Consideraciones finales

Los estudiantes mismos de los distintos grupos con los cuales se trabajó reconocen el alto nivel de dificultad que encuentran en el cálculo de probabilidades inversas, aún teniendo una buena base de formación matemática. Estas dificultades se originan en la comprensión de los resultados de los problemas, lo que evidencia no sólo limitaciones de lecto-escritura de los alumnos, sino también en su razonamiento probabilístico, de allí la dificultad para identificar las probabilidades condicionales implícitas en el texto, fundamentales en la aplicación del teorema de Bayes.

Lo observado en este estudio realizado da pie para sugerir que se comience a dar la importancia que merece en la formación de los individuos el saber actuar en situaciones de incertidumbre, en general, y muy en particular en aquellas donde el conocimiento de la ocurrencia de ciertos eventos condicionan las probabilidades de sucesos sobre los cuales habrá que tomar decisiones, que es en esencia el razonamiento bayesiano.

6. Referencias Bibliográficas

Bar-Hillel, M. (1987), "*The Base Rate Fallacy Controversy*". Ed. R. W. Scholz, Decision Making under Uncertaninty, Amsterdan, North Holland, pp.39-61.

Bunge, M., (2006), *Problemas directos e inversos*, Página Web: http://grupobunge.wordpress.com/2006/07/20/119 (acceso: setiembre de 2010).

Groetsch, C.W. (1999) *Inverse Problems. Activities for Undergraduates*. The mathematical association of America.

Martinez Luaces, V. (2010), "*Problemas inversos: los casi olvidados de la Matematica Educativa*". Conferencia Especial dictada en la XXIV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 24), Guatemala.

Moore, D.S. (1997), "*New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics*", International Statistical Review, vol.65, núm. 2, pp 123-155.

Rossman, A y Short, T (1995). "*Conditional Probability and Education Reform: Are they compatible*? Jornaul of Statistics Education. Disponible en http://www.amstat.org/publications/jse/v3n2/rossman.html

Tarantola, A. & Valette, B. (1982) *Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion.* Reviews of Geophysics and Space Physics, 20(2).

Tversky, A & Kahneman, D. (1982), "*Evidential Impact of Base Rates*". Eds. en D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky, Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases, Nueva York, Cambridge University Press, pp. 153-160