UNA INTRODUCCIÓN AL CONTROL MODERNO. ADAPTACIÓN DEL TEMA DE ESPACIO DE ESTADOS

María Mercedes Gaitán
Gustavo de Dios Pita
Diego Dupleich

Universidad Tecnológica Nacional – Facultad Regional Paraná
Argentina

mgaitan@frp.utn.edu.ar
gdpita@frp.utn.edu.ar
diegodupleich@gmail.com

Área Temática: Experiencias de Cátedra.
Palabras claves: Álgebra lineal - espacio de estados - herramientas matemáticas - ingeniería electrónica.

Resumen

El espacio de estados permite la modelización, la evaluación y la resolución de sistemas dinámicos con alto grado de complejidad mediante herramientas matemáticas, muchas de las cuales están en el currículo de Matemática de primer año de ingeniería. Una significativa utilización de espacios de estados es en control automático.
Se presenta un enfoque sobre un tema de control moderno, adaptado a los cursos iniciales de ingeniería electrónica, asimismo, puede ser utilizado como elemento disparador de tareas de investigación de becarios alumnos.

Trabajo en Extenso

Introducción

Dando continuidad a ponencias presentadas en anteriores EMCI y dentro del marco del Grupo UTN de Investigación en la Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería (GIEMCI), se aborda una aplicación de conceptos estudiados en Álgebra Lineal en temas correspondientes a otras asignaturas de Ingeniería Electrónica. Se han realizado las simplificaciones necesarias para que puedan ser comprendidas sin mayores dificultades por alumnos del Ciclo Básico de la carrera.

Fundamentación

Al programar las actividades de Matemática en Ingeniería nos encontramos a menudo con la pregunta: ¿qué aplicaciones de temas específicos de la carrera podemos adaptar para los conocimientos impartidos en la asignatura?
Surge así un problema cuyos vectores descriptivos son la necesidad de llevar a la práctica los temas desarrollados, la incertidumbre sobre la visión que pueden tener los estudiantes y la delicada elección del contenido específico de ingeniería. Al decir de Yves Chevallard, se requiere pasar del saber sabio al saber enseñado, pero siempre en un marco adecuado que garantice la comprensión del tema, la aprehensión de los conceptos y la articulación, de ser posible, con alguna otra asignatura.
En el currículo de ingeniería las mayores aplicaciones de conceptos matemáticos se suelen estudiar en cursos superiores, pero es una tarea motivadora indagar sobre aplicaciones adecuadas para cursos del Ciclo Básico de la carrera. Aparecen interrogantes tales como la pertinencia y la adaptabilidad para que sea asequible al estudiante.

Desarrollo

El control automático tiene un sin número de aplicaciones en diferentes ramas de la industria, por ejemplo en la industria automotriz para nuevos sistemas de frenado, en las cajas de cambios automáticas; en la industria aeroespacial en el posicionamiento de los satélites, en el disparo de nuevos cohetes, en el piloto automático de los aviones; en la industria química; en la electrónica y en la robótica entre otras.
La rama de control automático de la electrónica tiene actualmente un gran auge. Se divide en dos categorías: el control clásico y el control moderno. El primero basa su teoría en la representación de los modelos en el dominio frecuencial, mientras que el segundo lo hace en el dominio temporal mediante la representación en el espacio de estados.

Es importante introducir los siguientes conceptos para contextualizar los contenidos:
Sistemas: Se puede caracterizar a los sistemas como una *caja negra* con una o múltiples entradas y salidas dependientes del tiempo. Se intenta modelar matemáticamente a los sistemas para poder predecir su comportamiento y estudiar sus respuestas frente a distintas entradas.
Espacio de estado: El modelado de sistemas basados en variables de estado hace uso de herramientas del álgebra lineal y permite incorporar la computación como herramienta de cálculo.
Establecer cómo se encuentra el sistema en un momento dado es lo que se trata de determinar caracterizando al mismo mediante parámetros y variables dependientes del tiempo. Dichos parámetros y variables se denominan ***variables de estado*** y brindan esta información.
La información de la evolución de los estados con el tiempo frente a diferentes entradas se presenta en la ***matriz de transición de estados***.
Variables de estado: El estado de un sistema es una estructura matemática que contiene n variables $x_1(k)$, $x_2(k)\ldots x_n(k)$ llamadas ***variables de estado***. Estas variables, más el valor inicial $x_i(t_o)$ de cada una de las variables y las entradas $u_i(k)$, permiten conocer la salida del sistema para $t > t_o$.
Las variables de estado no siempre representan magnitudes físicas reales, muchas veces son sólo abstracciones matemáticas del sistema.
Vector de estado: El conjunto de las variables de estado representan un vector de estados $x(k)$ de dimensión n:

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$$

Trayectoria de estado: Es la trayectoria producida en el espacio de estados por el vector de estados $x(k)$ al cambiar durante el transcurso del tiempo.
Dinámica del sistema: Las ecuaciones de estado de un sistema forman un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden, siendo n el número de estados independientes. Estas ecuaciones representan la dinámica del sistema, en tiempo discreto y para sistemas invariantes en el tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

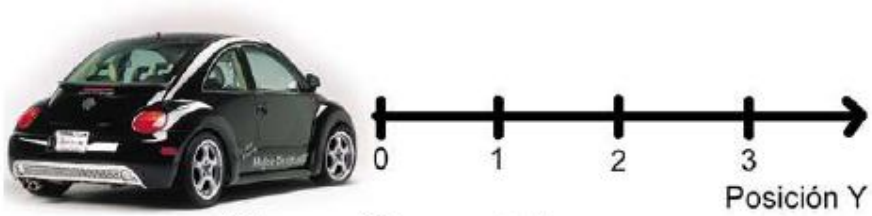
Donde:

$x(k+1) \in \Re^n$	es el vector derivado del estado.
$x(k) \in \Re^n$	es el vector de estado.
$y(k) \in \Re^{n.y}$	es el vector de salida del sistema.
$u(k) \in \Re^{n.u}$	es el vector de entrada del sistema.
$A \in \Re^{n \times n}$	es la matriz de coeficientes del sistema.
$B \in \Re^{n \times .n.u}$	es la matriz de control del sistema y actúa sobre las entradas.
$C \in \Re^{n.y \times n}$	es la matriz de salida y relaciona los estados con la salida del sistema.
$D \in \Re^{n.y \times n.u}$	es la matriz de acoplamiento directo y vincula directamente la entrada

con la salida, en la mayoría de los sistemas esta matriz es nula ($D = 0$).

Propuesta Didáctica

Se puede presentar la siguiente propuesta durante el cursado, si el tiempo lo permite, o bien, como tarea de investigación extra áulica.
Se desea modelar el desplazamiento de un vehículo. Para ello se tiene que la entrada es la fuerza motriz, es decir, se puede gobernar la fuerza de desplazamiento.
Es de notar aquí que los conceptos utilizados son conocidos por el alumno debido a que son parte de Física I. De esta manera se reafirma una articulación horizontal con espacios curriculares de cursos básicos.
Se definen las variables de estado:



$$y(t) = x_1(t) = posición$$
$$x_2(t) = velocidad = \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{x_1}(t)$$
$$x_3(t) = aceleración = \frac{dx_2(t)}{dt} = \dot{x_2}(t)$$
$$u(t) = fuerza = m.a(t) = m\dot{x_2}(t)$$

Se despejan las variables en función del vector derivadas:

$$x_1(t) = posición = y(t)$$
$$\dot{x_1}(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x_2}(t) = x_3(t)$$
$$\dot{x_2}(t) = \frac{1}{m}u(t)$$

Se forma la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Se traduce a variables de tiempo discreto mediante MatLab:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}54 & 1{,}17 \\ 1{,}17 & 1{,}540 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}54 \\ 1{,}17/m \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

Mediante estas ecuaciones se ha realizado un modelo matemático abstracto del sistema. Ahora aplicando ciertas propiedades se puede someterlo a pruebas de estabilidad y saber el comportamiento frente a diferentes entradas. Si se desea desplazar el vehículo hasta cierto punto y_f y estacionarlo ahí, se buscará que entradas hay que aplicar para poder llevar al vehículo de su estado $x(t_0) = [y_0 \ 0]$ a $x(t_f) = [y_f \ 0]$

Evolución del sistema con el tiempo: Teniendo en cuenta el sistema anteriormente descrito:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

En el tiempo ***k = 0***

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$

En el tiempo ***k = 1***, considerando ***x (1)***:

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A\big(Ax(0) + Bu(0)\big) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

En el tiempo ***k = 2***, teniendo en cuenta ***x (2)***:

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A\big(A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)\big) + Bu(2) = A^3x(0) + A^2u(0) + AB\,u(1) + Bu(2)$$

Generalizando:

$$\begin{aligned} x(n) &= A^n x(0) + A^{n-1}Bu(0) + \ldots + ABu(n-2) + Bu(n-1) \\ &= A^n x(0) + W_c U \end{aligned}$$

Siendo:

$$U = [u^T(n-1) \ldots u^T(0)]$$
$$W_c = [B\ AB \ldots A^{n-1}B]$$

De este sistema se deben despejar las entradas *u[k]* necesarias para poder llevar el sistema a un estado determinado (multiplicación de matrices y resolución de sistemas mediante ecuaciones matriciales).

Controlabilidad: Un sistema es completamente controlable, si existe una secuencia de controles ***u (k)***, tal que el origen x= ***0*** puede ser alcanzado a partir de cualquier estado en un tiempo finito.

Alcanzabilidad: Un sistema es completamente alcanzable, si existe una secuencia de controles ***u (k)***, tal que un estado arbitrario puede ser alcanzado a partir de cualquier estado inicial en un tiempo finito.

Un sistema es alcanzable sí y sólo sí el rango de la matriz de controlabilidad $W_c = [B\ AB \ldots A^{n-1}B]$ es igual a *n* (utilización del rango de la matriz).

Continuando con el caso presentado:

Se desea saber si se puede alcanzar el estado $x(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ partiendo de $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ es decir si se puede en el instante de tiempo 2 estar en la posición 3 con una velocidad igual a 2, partiendo del punto 1 con una velocidad igual a 5. Se supone una masa del auto igual a $m = 1$

Se arma la matriz de controlabilidad:

$$W_c = [B\ AB] = \begin{bmatrix} 0{,}54 & \begin{bmatrix} 1{,}54 & 1{,}17 \\ 1{,}17 & 1{,}540 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}54 \\ 1{,}17/m \end{bmatrix} \\ 1{,}17/m & \end{bmatrix}_{con\ m=1} = \begin{bmatrix} 0{,}54 & 2{,}21 \\ 1{,}17 & 2{,}45 \end{bmatrix}$$

El rango de $\mathbf{W_c = 2}$, siendo el sistema de orden **n = 2,** por lo que este sistema es alcanzable. Para llevarlo al estado **x (2) = [3 2]:**

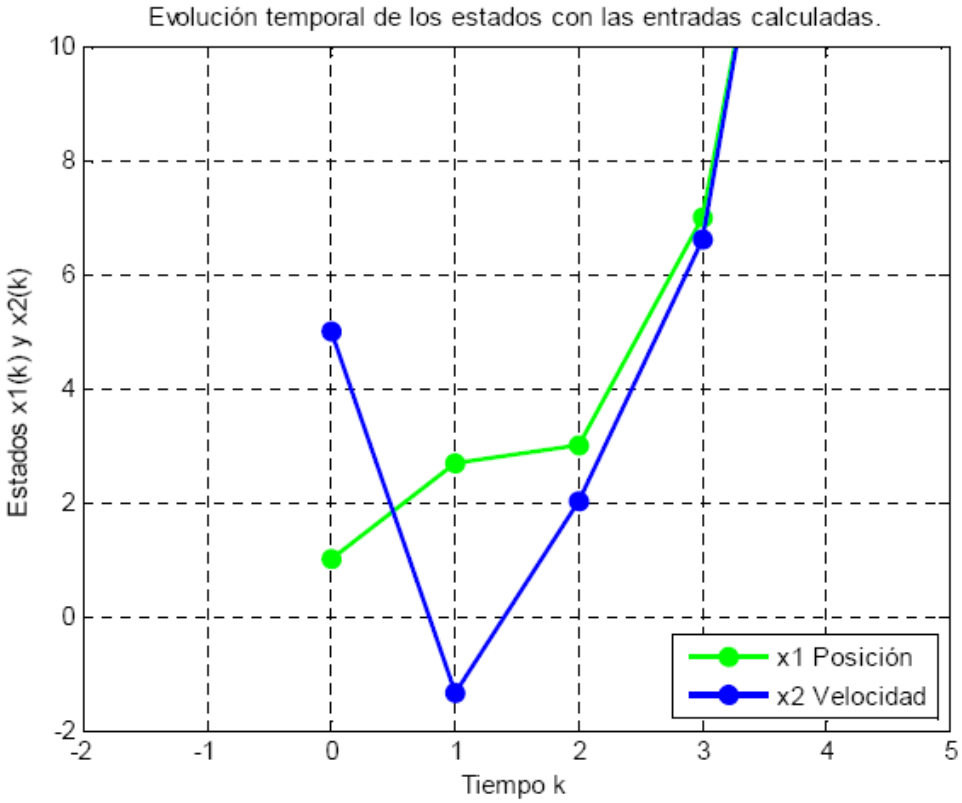
$$x(n) = A^n x(0) + W_c U = \begin{bmatrix} 3{,}76 & 3{,}72 \\ 3{,}72 & 3{,}76 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}54 & 2{,}21 \\ 1{,}17 & 2{,}45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

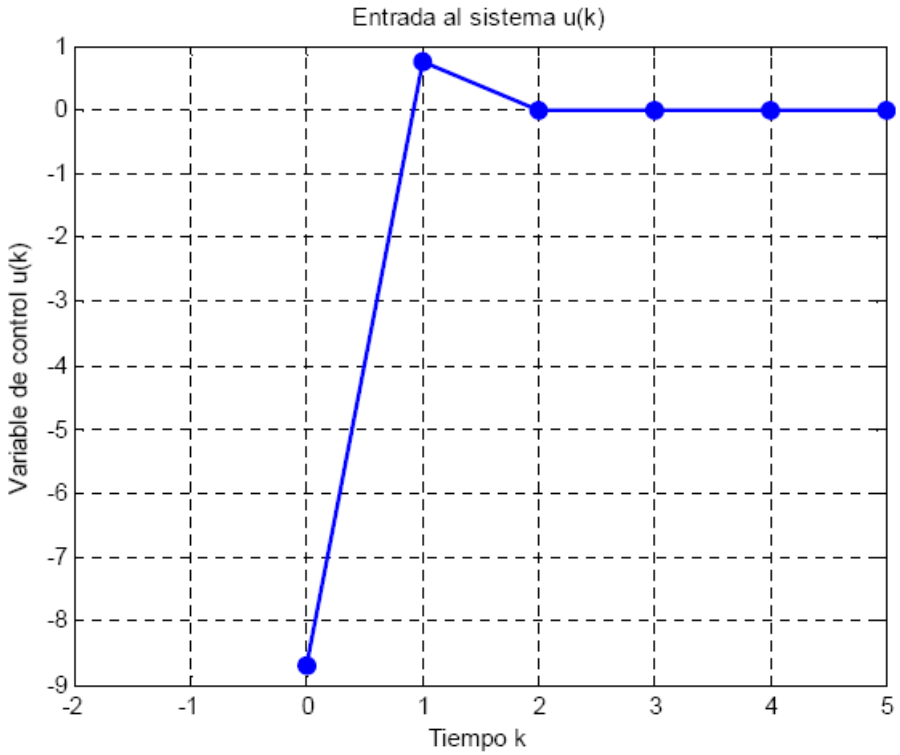
$$x(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21{,}89 \\ 22{,}43 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}54 & 2{,}21 \\ 1{,}17 & 2{,}45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

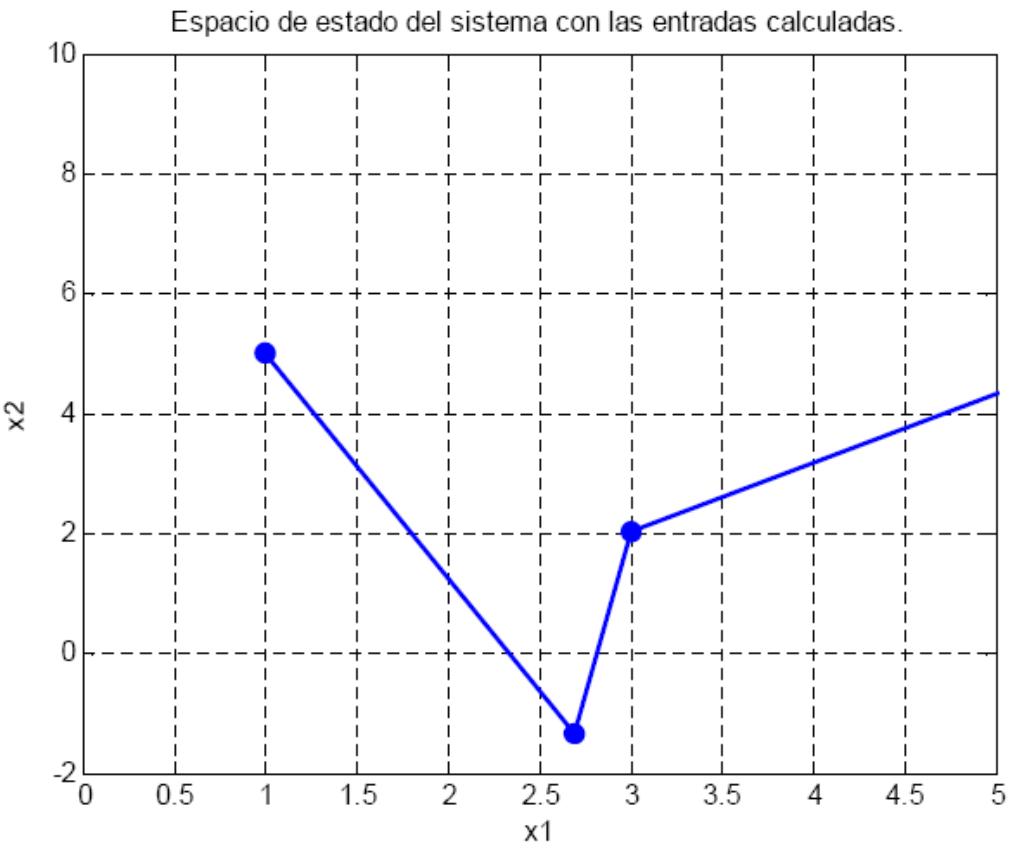
$$\begin{bmatrix} -18{,}89 \\ -20{,}43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}54 & 2{,}21 \\ 1{,}17 & 2{,}45 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

El sistema no siempre tendrá una solución única, en este caso sí la tiene y es:

$$u(0) = -8{,}7$$
$$u(1) = 0{,}76$$


Evolución temporal de los estados con las entradas calculadas.
Estados x1(k) y x2(k)
Tiempo k
x1 Posición
x2 Velocidad
10
8
6
4
2
0
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
5


Entrada al sistema u(k)
Variable de control u(k)
Tiempo k
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-2
-1
0
1
2
3
4
5



Se puede observar que una vez aplicadas las dos entradas en sus respectivos tiempos, se hace la entrada nula, es decir $u(k) = 0$ para $k > 1$, sin embargo, se ve claramente en la figura como los estados siguen evolucionando y creciendo infinitamente (ver *Estabilidad*).
Si se quiere dejar el móvil estacionado o quieto en el lugar, habría que calcular la entrada que cumpla:

$$x(3) = x(2) = Ax(2) + Bu(2) = \begin{bmatrix} 1{,}54 & 1{,}17 \\ 1{,}17 & 1{,}54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}54 \\ 1{,}17 \end{bmatrix} u(2)$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}97 \\ 6{,}61 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}54 \\ 1{,}17 \end{bmatrix} u(2)$$

No hay ningún valor de $u(2)$ que satisfaga la igualdad, por lo que el móvil no se puede quedar estacionado debido a las formulaciones que se plantearon al momento del modelado del sistema.
Estabilidad: La ventaja de la utilización de espacio de estado es que para evaluar la estabilidad no se requiere de la solución explícita de las ecuaciones en diferencia o diferenciales para la ubicación de los polos. Si se considera un sistema autónomo (es decir con entradas nulas), la estabilidad de dicho sistema estará garantizada si todos los autovalores de la matriz de coeficientes *A* tienen parte real menor o igual a 1 (utilización de los autovalores). En caso de no tenerla, frente a entradas nulas, el sistema seguirá progresando aumentando su salida y tornándolo inestable.
Por ejemplo, en el caso presentado del móvil, si se desea calcular la estabilidad, se buscan los autovalores de la matriz *A de coeficientes del sistema*.

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}54 & 1{,}17 \\ 1{,}17 & 1{,}54 \end{bmatrix}$$

Los autovalores de la matriz A son *2,71 y 0,73*. Como se observa, la parte real es mayor que 1, por lo tanto, el sistema no es estable. Esto es, a entradas nulas (es decir, fuerza motriz nula) la salida seguirá creciendo (el móvil

se seguirá desplazando). Esto se debe a que en el modelado no se consideró la fuerza de rozamiento del móvil con la superficie de desplazamiento. Esta fuerza haría que se vaya frenando el móvil y frente a entradas nulas, la salida sería acotada.

Conclusiones

El control automático mediante espacio de estados se estudia en materias del último año de Ingeniería Electrónica. La resolución de los problemas planteados en ese nivel conlleva una gran complejidad matemática. Allí se aplican muchos conocimientos matemáticos adquiridos durante el desarrollo de Álgebra Lineal. La bibliografía específica del tema los aborda con notación matricial, algunas veces desaprovechada durante el transcurso de la carrera. Es importante que el estudiante valore estos temas ya que le serán de gran utilidad. La utilización de un software facilita los cálculos que en ciertos casos resultarían arduos (por razones de espacio no se presenta en este trabajo la resolución con MatLab).

En diversas asignaturas de la carrera se desarrollan temas que utilizan continuamente las herramientas del Álgebra Lineal, ciertamente, la introducción temprana a cuestiones específicas de la ingeniería elegida brinda una opción didáctica altamente motivadora y además sitúa al estudiante de modo más amigable frente a los nuevos conocimientos mejorando los procesos de enseñanza y de aprendizaje, especialmente al ver reflejada la aplicabilidad de los mismos. Asimismo, pueden convertirse en disparadores para tareas de investigación de becarios alumnos.

La enseñanza de la Ingeniería está cambiando. No es posible ignorar la complejidad de los avances tecnológicos, se deben incrementar los conocimientos sobre ellos, lo cual implica nuevas actitudes en la investigación y en la docencia. Precisamente la Matemática es prioritaria para ello.

Asistimos actualmente a posturas donde se pone de manifiesto que la Matemática *está en todos lados*. Pero creemos que es más adecuado decir que *no es que esté*, sino que *hay que hallarla*. El docente debe ser el encargado, en el momento de la enseñanza, de generar las situaciones adecuadas. Éstas llevarán al estudiante, en su proceso de aprendizaje, a encontrar la herramienta que subyace en el conocimiento matemático: *el descubrimiento y la valoración de la Matemática en la aplicación.*

Referencias

Camacho, E and Bordons. Model Predictive Control .2ª ed., Berlin: Springer. 2004.

Chevallard, Y. La transposición didáctica. Buenos Aires. Aique. 1998.

González, A. Apuntes de Cátedra de Electrónica Industrial. Facultad Regional Paraná. UTN. 2008.

Grossman, S.; Algebra lineal con aplicaciones; Sexta edición; Mc Graw- Hill. México. 2008.

Noble, B. y Daniel, J. W.; Algebra lineal aplicada. Prentice Hall Hispanoamericana; 3ª edición. México. 1989.

Ogata, K. Ingeniería de Control Moderna. Cuarta Edición. Ed. Pearson. 2007.

Sauchelli, V. H. Introducción a Sistemas de Control. Córdoba. Ed. Universitas. Argentina. 2004.

Strang, C.; Algebra lineal y sus aplicaciones; Addison- Wesley, Iberoamericana. México. 2003.