ALGUNAS CUESTIONES PUNTUALES EN TORNO AL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN ALUMNOS DE PRIMER AÑO DE INGENIERÍA

Nora Gatica - Graciela Echevarría – Juan Renaudo
Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales – Universidad Nacional de San Luis – Argentina
nimberti@fices.unsl.edu.ar – gecheva@fices.unsl.edu.ar – jrenaudo@fices.unsl.edu.ar
Área temática: Investigación Educativa
Palabras claves: Concepto de límite – registros de representación - aplicaciones

RESUMEN

El aprendizaje de los temas de Cálculo en primer año en las carreras de Ingeniería, suele ser problemático para los alumnos, lo que conlleva a una gran cantidad de fracasos y posteriormente, en muchos casos, a la deserción de los estudiantes.

El concepto de límite, es uno de los temas que mayor dificultad presenta, dado el alto grado de abstracción que se necesita para su comprensión y apropiación.

En el presente trabajo presentamos el análisis de las respuestas de estudiantes con relación a algunas cuestiones que tienen que ver con el aprendizaje del concepto de límite, tales como: Definición del concepto de límite y aplicaciones.

Si bien la representación gráfica, a criterio de los docentes y libros de textos, es la forma más intuitiva, comprensible y facilitadora para la comprensión del concepto, parecería ser que a los alumnos no les resulta tan evidente su interpretación y cálculo en este registro.

Observamos que existe un importante porcentaje de alumnos que si bien resuelven correctamente en forma algebraica, presentan dificultades para la comprensión de estas cuestiones en la definición de este concepto.

INTRODUCCION

A través de nuestra experiencia como docentes de la asignatura Análisis Matemático I en carreras de Ingeniería hemos comprobado las dificultades que a los alumnos se les presenta cuando se les enseña la noción de límite de una función. Diversas investigaciones tales como Cornu (1983), Delgado (1995), Espinoza (1998), Blazquez (1999), Robinet (1983), Sierpinska (1985), Sanchez (1997) y Tall y Vinner (1981) dan cuenta de estos hechos.

Este concepto es fundamental para otros temas de la asignatura tales como derivadas, integrales, etc.

Aún cuando logran superar la materia con un buen rendimiento en muchos casos, fracasan o no tienen buen desempeño al desarrollar actividades en materias posteriores que requieran de la reflexión y del uso adecuado de esta noción. La resolución de problemas es pobre cuando estos alumnos enfrentan situaciones nuevas; sobre todo en aquellas que no indican expresamente la acción que deben realizar.

En cuanto a su enseñanza, el tratamiento es básicamente el siguiente: se les explica la definición con los teoremas correspondientes, para luego enfrentarlos a ejercicios algorítmicos, en donde sólo debían encontrar el valor de distintos límites, aplicando los teoremas estudiados y realizando transformaciones en las funciones de manera que a éstas últimas sea posible encontrar los valores de los límites.

Artigue (1995) establece que se ha comprobado que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica y a evaluar sobre las competencias adquiridas en este dominio. De esta manera, los distintos temas que se desarrollan, dependen de las definiciones matemáticas de los objetos, perdiéndose el valor que tienen las conversiones entre registros para los aprendizajes, debido que no se exploran de manera consistente las actividades que favorecerían su articulación con otros medios de expresión y representación matemática que utilicen el uso simultaneo de varios registros de representación semiótica.

Esta situación se agudiza en los alumnos de las carreras de Ingeniería, ya que el uso que se da a los conceptos matemáticos como modelos, cumple con objetivos muy diferentes: por un lado, en los procesos de resolución se requiere implementar métodos numéricos de cálculo y también gráficos para la representación del problema y por otro, cuando se tiene una solución algebraica el principal interés reside en interpretar el resultado implícito dicha solución.

Por tratarse de una noción que requiere altos niveles de abstracción, su aprendizaje se reduce a una mera memorización de la definición del concepto, la que fácilmente es olvidable, dado la falta de interpretación de la misma, presumiblemente, por la falta de articulaciones entre varios registros. Sin embargo, pueden realizar el cálculo correspondiente sin mayores dificultades

Pensamos que le enseñanza tradicional, que se limita a la definición métrica y al cálculo, no tiene sentido hoy en día, ya que el concepto, por una parte, casi nunca se logra aprender, al cabo de un año casi ningún alumno es capaz de recordarlo, (Blázquez y otros, 2006) y, por otra, carece de sentido invertir demasiado tiempo lectivo en que los alumnos aprendan el cálculo de límites (que también lo olvidan fácilmente) cuando la computadora puede hacer estas tareas que, ciertamente, no aportan conocimiento.

En este trabajo, que forma parte de una investigación mucho más amplia que trata específicamente sobre la comprensión del concepto de límite en alumnos de las carreras de Ingeniería, trabajamos los registros numéricos, gráficos, verbales y simbólicos y las conversiones entre ellos, ahondando en planteamientos controvertidos que tienen que ver con el concepto aplicándose una metodología cualitativa y considerándose el marco teórico: Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval (1998) para determinar que y como aprenden estos alumnos.

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

La muestra en esta investigación son los alumnos de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales de la Universidad Nacional de San Luis (Argentina).

En este trabajo analizamos cómo los alumnos definen el concepto, si recurren a la conceptualización como aproximación óptima (Blázquez, 1999) o a la definición métrica. Estudiamos los errores que cometen en ambas conceptualizaciones y la aplicación del concepto en determinados hechos puntuales (la existencia del límite cuando la función está definida en el punto, si el límite es alcanzado por la función, etc.).

DEFINICIÓN DEL CONCEPTO Y APLICACIONES

En este apartado se trata de averiguar, hasta que punto los alumnos interiorizan el concepto de límite. En concreto, se les propuso que escribieran la definición de límite que ellos quisieran, que enunciaran las propiedades y, después, que respondieran a unas cuestiones de forma razonada para averiguar si los alumnos comprenden que se deben considerar entornos reducidos en el punto y que el límite puede ser alcanzado por la función.

Las cuestiones diseñadas para tal fin se incluyeron en el examen final de la asignatura. Éste fue respondido por 15 que ya habían terminado de cursar la asignatura y habían aprobado todos los exámenes parciales (el examen final es obligatorio). Son éstas:

Cuestión 1:

a) *¿Cómo se define el límite de la función en un punto?*
b) *Enuncia las propiedades del límite.*
c) *Explica por qué las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:*
   i. *Si la función no está definida en c, no existe el límite de la función cuando x tiende a c.*
   ii. *Si el valor de la función en el punto c es L entonces el límite de la función cuando x tiende a c es L.*
   iii. *Si el límite de la función cuando x tiende a c es L entonces las imágenes de la función en puntos cercanos a c pero distintos de c pueden ser iguales a L.*

Objetivos:

Constatar si han aprendido y recuerdan la definición de límite y las propiedades.

Averiguar si la aprehensión del concepto les permite entender que la definición o no de la función en un punto es irrelevante para la existencia o no de límite en dicho punto.

Determinar las relaciones que existen entre la definición y propiedades escritas por los alumnos y la existencia o no de límite en dicho punto.

Con la última cuestión se pretende comprobar una vez más si comprenden qué el límite puede formar parte de las aproximaciones de la función, si es un valor que puede ser alanzado por la propia función.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Cuestión 1.a.

A continuación se sintetizan las respuestas de los alumnos en relación con el primer apartado de la cuestión 1. Cómo es lógico, algunas respuestas hay que clasificarlas en más de una categoría, ya que no son excluyentes.

Más del 50 % de los alumnos utilizan representaciones gráficas, y todos, excepto dos, lo hacen correctamente, lo que indica nuevamente que éste es el sistema de representación más usado por los alumnos.

Casi el 50 % responde dando una definición ingenua utilizando el concepto de aproximación y de estas respuestas sólo una carece de sentido. Lo que indica que el concepto como aproximación óptima arraiga más en los alumnos.

Hay unos pocos alumnos que intentan traducir las dos definiciones, tal como por ejemplo el alumno número 2, quien escribe:

- *Si cuando x tiende a a, siendo distinto de a sus imágenes f(x) tienden a L. Cuando decimos "si cuando x tiende a a siendo distinto de "a" nos referimos a los* $x \in (a-d, a)$ *o a (a, a+d). Cuando decimos "sus imágenes f(x) tienden a L decimos que |f(x) - e|<L.*

La definición métrica es utilizada ya sólo por un tercio de los alumnos y el 40 % de éstos lo hace de forma incorrecta, porque utiliza mal los cuantificadores existencial y universal.

El 27 % de los alumnos contestan sin sentido.

Finalmente, dos de las respuestas se apoyan en el teorema de caracterización, como por ejemplo, lo expresado por el alumno número 6:

- *El límite existe si solamente si los límites laterales existen y coinciden esto quiere decir que si nos acercamos a "a" por derecha y por izquierda estos límites tienen que ser iguales ya que puede ocurrir que*

el $\lim_{x \to a^+} f(x) = M$ *(aproximación por derecha) y el* $\lim_{x \to a^+} f(x) = M'^{*}$ *(aproximación por izquierda).*

Cuestión 1.b

Seguidamente se describe una síntesis de las respuestas en relación con el segundo apartado. Como sucedió en el anterior, aquí también hay respuestas que se deben clasificar en varias categorías.

La mayoría de los alumnos (alrededor de los 3/5) se pronuncia por las propiedades aritméticas, aunque un quinto de ellos lo hace de forma incorrecta. Lo que concuerda con la práctica, porque estas propiedades son las que se utilizan en el cálculo de límites de las clases prácticas.

- *El límite de una constante es el valor de la constante (alumno 4)*

El resto de respuestas, que son muy dispersas y bastante pobres, se distribuyen así: un quinto de los alumnos no responde; el mismo porcentaje escribe el teorema de unicidad; dos alumnos escriben el teorema del encaje, otros dos el teorema de caracterización y uno el teorema de existencia. Como muestra se reproduce la respuesta formulada, por el alumno número 3:

- *Una de las propiedades de límite en un punto es que los límites laterales deben existir y deben coincidir para que el límite de la función exista.*

Esta variedad de respuestas evidencia que los alumnos no han seguido ningún patrón de trabajo, patrón que debiera estar fijado por la docencia, como así consta en el guión didáctico que se desarrolló.

Cuestión 1.c.i.

A continuación, se procede a la descripción del análisis realizado sobre las respuestas del primer subapartado.

Más de la mitad de los alumnos responden correctamente que la aseveración del enunciado es falso. Sin embargo las explicaciones que dan son diferentes: uno de ellos se basa en el teorema de caracterización; otros tres explican la falsedad utilizando tendencias laterales de forma correcta; otros cinco utilizan la definición explicando que el comportamiento en el punto es independiente del comportamiento de la función en el entorno (comprendiendo perfectamente por qué se tienen que considerar entornos reducidos); y sólo uno de ellos no justifica la respuesta.

- *Falso, porque cuando reemplazamos c en la función ese límite no va a ser = c (alumno 9).*

Un tercio de las respuestas son incorrectas: dos alumnos dan explicaciones sin sentido, uno recurre a la tendencia lateral y lo hace incompleto y otros dos confunden el límite con el valor de la función en el punto.

- *Verdadero, si la función f(x) no está definida en un punto c no existe el límite, el límite es distinto de c (alumno 11).*

Finalmente, hay dos alumnos que no responden.

Cuestión 1.c.ii.

Describiremos un análisis sintético de las respuestas correspondientes al segundo subapartado de la cuestión 1.c.

De los quince alumnos, sólo cuatro responden correctamente a la cuestión, dos no contestan y el resto lo hace incorrectamente, lo que indica que para los alumnos existe todavía una confusión en el concepto de límite de una función en un punto y el valor de la función en ese punto, ya que nueve de ellos asegura que coinciden.

En cuanto a las aclaraciones de las respuestas escritas, cuatro no realizan ninguna explicación, otros cuatro se basan en las tendencias laterales y uno de ellos lo hace de forma incorrecta; tres alumnos justifican su respuesta basándose en el concepto de continuidad, como muestra el siguiente:

- *Falso, porque la definición dice que x tiende a c pero x distinto de c entonces las imágenes de las x no pueden ser iguales a las imágenes de c en f(x)* (alumno 13)

Dos de éstos, tres alumnos basan su justificación en la definición y el tercero enlaza con discontinuidad evitable

Finalmente, dos alumnos se basan en la idea de aproximación en forma incorrecta.

- *Verdadero, porque tomo las aproximaciones de c cercanos a c pero distintas de c, y mis imágenes van a mejorar con esta aproximación, es decir, aproximándome más y más a L (alumno 12)*

También en este caso, tal y como ocurría en el subapartado c.i, los alumnos no pueden explicar correctamente la cuestión, ya que la mayoría (nueve alumnos) manifiesta su justificación en forma errónea.

Cuestión 1.c.iii.

A continuación describiremos el análisis realizado a las respuestas correspondientes al tercer subapartado.

Responden correctamente a la cuestión seis alumnos, dos no contestan y el resto lo hace erróneamente.

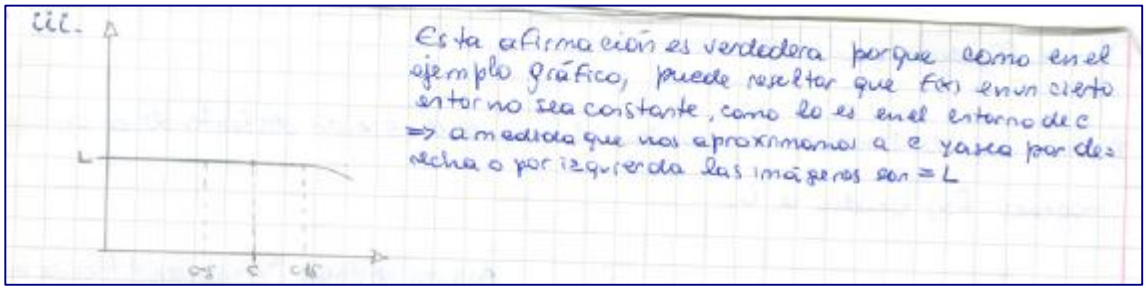

Figura 1: respuesta del alumno 2

Cuatro de los seis alumnos que responden correctamente explican la respuesta basándose en la función constante, y uno de éstos hace una representación gráfica.

Un alumno utiliza tendencias en su explicación, pero no se da cuenta de que el valor del límite se puede repetir en las aproximaciones. Otro utiliza aproximaciones en forma incorrecta.

También recurren a otras justificaciones un tanto disparatadas: un alumno se apoya en continuidad, otro en discontinuidad, un tercero invoca el teorema de unicidad:

- Falso: porque el límite para cada punto es único (alumno 5).

Hay otro que confunde el límite con el punto al que tiende la variable y, finalmente, otro sólo afirma que tienen que ser diferentes.

- Por derecha me puede dar un límite y por izquierda otro entonces no tiene límite en c. Para que exista límite deben coincidir los límites laterales (por derecha y por izquierda, no importa que c exista o no) (alumno 3).

TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN

Con el objetivo de analizar como los alumnos aplican el teorema de caracterización, en el primer examen parcial de la asignatura, se confeccionó una pregunta dividida en dos partes: en la primera se les solicita que dibujen la gráfica de una función definida a trozos y en la segunda que determinen si existe el límite o no en determinados puntos de la función.

Los alumnos en las clases prácticas han dibujado funciones definidas a trozos, pero éstas son más difíciles de dibujar que las funciones determinadas por una sola expresión simbólica. La función elegida para este examen está dividida en tres partes, presenta un punto con discontinuidad evitable y, por tanto, tiene límite en el punto *x=1* y uno discontinuidad esencial de salto en *x=2.*

Ejercicio número 5:

a). *Dibuje la gráfica de*

$$f(x)=\begin{cases} -x+3 & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad 1<x<2 \\ 3+x & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

b). *Encuentre los siguientes límites de la función anterior o explique por qué no existen.*

i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Objetivo: Ver si aplican el teorema de caracterización y en caso afirmativo analizar cómo lo aplican, detectando errores o falsas concepciones.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS

Para contestar al ítem b), los alumnos pueden visualizar directamente la gráfica que ellos mismos han elaborado y, a partir de ella, aplicar el teorema de caracterización, o pueden resolverlo en forma analítica, también con la aplicación del mismo teorema.

Se analizaron las respuestas de 32 alumnos en ambos ítems.

La siguiente tabla sintetiza las respuestas de los gráficos efectuados por los alumnos según los intervalos considerados

	Bien	Mal
x < 1	3	17
1 < x < 2	6	14
x ≥ 2	9	11

Tabla 1: Respuestas de los alumnos sobre la realización del gráfico solicitado.

Solo tres alumnos dibujan bien la gráfica en el intervalo (- ∞, 1). Los errores más comunes se refieren a los siguientes aspectos: algunos dibujan la recta hasta el origen de coordenadas, otros no consideran que en el punto *x=1* la función no está definida y unos pocos dibujan rectas paralelas al eje *x*.

Sólo seis alumnos realizan bien la gráfica sobre el intervalo (1, 2). La mayoría reconoce que se trata de una función constante, pero, sin embargo, cometen el error de considerar que la función está definida en los extremos de este intervalo.

También son pocos los alumnos que la dibujan bien sobre el intervalo [2, ∞), nueve en total. Posiblemente porque se trata de una recta con pendiente positiva (que para ellos, al parecer, es más fácil de dibujar) y porque el punto *x=2* está incluido en el intervalo, el número de alumnos que han dibujado bien la gráfica correspondiente en este intervalo es sensiblemente mayor que el número de alumnos que la representaron bien sobre el primero.

Nueve alumnos no hacen nada de los dos ítems o escriben cosas sin sentido. El resto de los alumnos, 23, tratan de hacer la gráfica, pero sólo la hacen bien los alumnos número 23 y 27. Los alumnos 8 y15 dibujan bien los trozos de la función en los interiores de los intervalos de definición, pero no aciertan a expresar lo que ocurre en los puntos *x=1* y *x=2*, y unen los puntos como si se tratase de una función continua, sin considerar que en este caso no sería una función. La figura 5 muestra la gráfica del alumno 15.

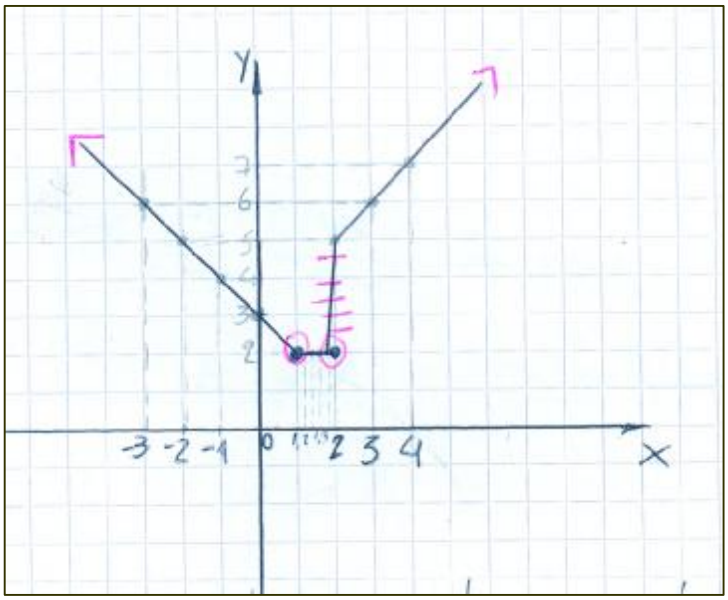

Figura 2: Gráfico del alumno 15

Este alumno también recurre al registro numérico como complemento para responder al ítem b, escribiendo tres tablas de valores, una por cada trozo de la función, contestando en forma correcta los tres límites solicitados.

El alumno 33 dibuja dos rectas paralelas, pero se da cuenta que de esa manera no se trata de una función y otros dibujan trozos constantes en los tres intervalos.

La mayor parte de las respuestas del segundo apartado se basan en el dibujo que han realizado previamente y, por tanto, las respuestas del mismo no pueden ser muy acertadas. A continuación se realiza el análisis de las correspondientes respuestas de los alumnos que han intentado responder a la cuestión. La tabla 2, que recoge las respuestas de los alumnos según la modalidad analítica o gráfica, refleja únicamente a los alumnos que han respondido al segundo apartado y, como se puede observar, ninguno responde bien. Casi ninguno considera lateralidad y, de los seis alumnos que responden de forma analítica, ninguno considera límites laterales; sólo lo hace uno (el número 21) a través de la gráfica, y, equivocadamente, razona desde la continuidad.

Modalidad	Analítica		Gráfica	
Clasificación	Bien	Errores	Bien	Er
Alumnos		6		6

Tabla 2: Alumnos que intentan responder a la cuestión b).

Llama la atención la respuesta del alumno 27, que no reconoce la existencia del límite porque según él la función no llega al punto, hecho contrario al detectado por Cornu y Blázquez, quienes afirman que los alumnos ven al límite como algo inalcanzable. Aquí la situación que describe es completamente diferente y, para este alumno, la función tiene que estar definida en el punto en cuestión.

CONCLUSIONES

Definición del concepto y aplicaciones

Con el análisis de las respuestas de los alumnos, hemos podido comprobar que tanto la escritura de la definición de límite como la comprensión de la misma resulta conflictiva para los alumnos.

En cuanto a la definición, generalmente se remiten a la definición como aproximación óptima, aunque en la mayoría de los casos sólo pueden llegar a escribir la definición ingenua. Los que responden con la definición métrica, exceptuando unos pocos casos, cometen errores.

El registro gráfico es un soporte importante para los alumnos, ya que recurren, preferentemente, a este registro para explicar sus afirmaciones.

A pesar de que, al momento de responder este ítem, ya han aprobado los exámenes parciales, a muchos alumnos les cuesta distinguir entre el límite de una función en un punto y el valor de la función en dicho punto.

En cuanto a las justificaciones de las respuestas emitidas, se apoyan en una gran disparidad de explicaciones, basándose en distintos conceptos, teoremas, propiedades, etc., no todas correctas, lo que evidencia las dificultades de comprensión del concepto.

Lo primero que llama la atención es la pobreza de las respuestas, quizás por el tiempo que transcurrió desde su desarrollo en el aula, lo que evidenciaría que se trata de un concepto difícil de recordar y que se olvida pronto.

Por otra parte, es posible que al no dibujar la gráfica no puedan aplicar el teorema de caracterización. No se puede perder de vista que el registro gráfico es el registro preferente de los alumnos y el que les resulta más fácil.

Otra cuestión, no menos importante, es que la mayor parte de los alumnos no consideran aproximaciones laterales, ni en forma analítica ni en forma gráfica.

El carácter autoritario de las matemáticas (Harel y Sowder, 1998) puede influir en el sentido de que los alumnos podrían esperar una orden que les obligara a aplicar el teorema de caracterización, cosa que no ocurre en el enunciado y, por tanto, no adquieren la competencia matemática suficiente para aplicar los conceptos estudiados.

Teniendo en cuenta esta reflexión y las anteriores, se puede afirmar que, en general, los alumnos se quedan en definiciones ingenuas y muestran su preferencia por la definición como aproximación óptima frente a la definición métrica, utilizando mayoritariamente el registro gráfico. Llegados a este punto nos preguntamos que conceptualización será más perdurable en la memoria de los alumnos, sin que medie la preparación de un examen.

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Bláquez, S. (1999): *Noción de Límite en Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, Valladolid.
- Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T., Benegas, J. (2006): *Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad.* RELIME. ISSN: 1665-2436. México DF.
- Cornu, B. (1991): Limits. En D. Tall (ed.): *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, 153-166
- Delgado, C. (1995): *Estudio de la evolución de los esquemas conceptuasles de alumnos universitarios en su proceso de aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad.* Tesina del Dpto de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona
- Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.* Investigaciones en Matemática Educativa II. Ed. Hitt, F. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México. Pg. 173-201.
- Espinoza, L. (1998): *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto límite de* función. *Del pensamiento del profesor a la gestión de los* momentos *del estudio.* Tesis doctoral. Dpto. de didáctica de las matemáticas y las ciencias experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283 . American Mathematical Society, Providence, USA
- Robinet, J. (1983): Un experience d´ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. Recherches *en* Didactique *des Mathématiques*, vol 4.3, 223-292.
- Sierpinska, A. (1987): Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Math.* vol 18, 371-397.
- Sánchez, C. (1997): *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendiaje de la noción de*

límite de una función. Tesis doctoral. Dpto. de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Granada
- Tall, D. y Vinner, S. (1981): Concept *image* and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Math,* vol 12, 151-169.