INDICADORES DEL GRADO DE ALGEBRIZACIÓN EN UNA TAREA DE ÁLGEBRA DE LA UNLPam

Parodi, Carlos; Ferreyra, Nora; Rechimont, Estela; Scarímbolo, Daniela; Lorenzo, Marcelo
Facultad de Ingeniería, UNLPam, Argentina
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNLPam, Argentina
parodic@ing.unlpa.edu.ar

Investigación educativa
Palabras Claves: indicadores, algebrización, sistemas

Resumen
La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992) utiliza las palabras Organización Matemática (OM) para describir la actividad matemática. Esta OM se compone de: tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Con intención de examinar y explicar la noción empírica de "estudiar álgebra", Gascón propone caracterizar el modelo del álgebra en una institución, tomar dicho modelo como objeto de estudio y aportar a lo que denominó "proceso de algebrización". En dicha caracterización Bolea define los *indicadores del grado de algebrización* de una OM que es consecuencia de la naturaleza algebraica de la modelización. Dichos indicadores nos permiten analizar una actividad que involucra a los sistemas de ecuaciones lineales y que se propuso a estudiantes de la FCEyN, UNLPam.

Introducción
Desde sus inicios el Programa Epistemológico en Didáctica de la Matemática, en el que se inscribe la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), tiene como objetivo prioritario el estudio de la actividad matemática, y para tratar de integrar lo pedagógico con lo matemático se cuestiona y se amplía lo que se considera "matemático". En este ámbito, se consideran diferentes teorías, caracterizadas por diversos interrogantes, que disparan distintas líneas de investigación, una de ellas es la Teoría de las Situaciones Didácticas, componente del Programa Epistemológico, que incorpora entre los conocimientos matemáticos las condiciones del uso de tales conocimientos matemáticos en situación escolar. Con el tiempo fue necesario tomar en consideración la reconstrucción escolar de las matemáticas lo que origina los fenómenos de la Transposición Didáctica y su estudio.
La Teoría Antropológica de lo Didáctico postula que toda actividad matemática institucional (Bolea, Bosch, Gascón 2001, en Bolea 2003) puede modelizarse mediante la noción de "praxeología matemática", es decir, que todo concepto matemático puede modelizarse para su uso en la enseñanza.

Praxeología matemática
La estructura de una praxeología u organización matemática se compone de *tareas*, *técnicas*, *tecnologías* y *teorías* y la articulación entre ellas (Chevallard 1999, en Bolea 2003).
Tareas*:* Incluye cualquier tipo de tareas que se consideren "matemáticas" en una institución. Por ejemplo, hallar una base de un espacio vectorial, hallar el rango fila de una matriz, etc.
Técnicas**:** Realizar una tarea involucra utilizar una técnica, es decir, una forma sistemática que comparte con otras tareas y que depende de la institución en la que se realice la tarea considerada. Por ejemplo, hallar una base de un subespacio utilizando matrices.
La unión de la *tarea* y de la *técnica* se denomina bloque *práctico-técnico* que se compone de un tipo de tareas y una técnica dentro de la institución, ellas constituyen lo que se denomina el "saber-hacer".
Tecnología: El bloque *práctico-técnico* requiere de un discurso que justifique la técnica y que ponga en evidencia la pertinencia con las tareas para la que se destina. La tecnología sirve, además, para explicar la técnica, relacionarla con otras técnicas y producir nuevas técnicas. Por ejemplo, las filas de una matriz escalonada por filas son linealmente independientes, por lo que su uso para hallar una base puede quedar así justificado.
Teoría**:** La teoría junto con la tecnología forman el bloque *tecnológico-teórico*. Las mismas funciones que juega la tecnología con la técnica, lo hace la teoría con la tecnología. Por ejemplo: La teoría de espacios vectoriales o matrices para explicar la independencia lineal y el escalonamiento, respectivamente. Así como la articulación entre los diferentes marcos teóricos.
El sistema formado por la tarea, técnica, tecnología y teoría forma una Praxeología u Organización Matemática y se considera la unidad mínima que describe la actividad matemática.

Complejidad de las organizaciones matemáticas
Una Organización Matemática es puntual si está generada por un único tipo de tareas o una única técnica reconocida en la institución. Por lo que la organización puntual se vincula con el bloque práctico-teórico, que la institución reconoce como adecuado para sus alumnos.

Una Organización Matemática se dice local si se obtiene como integración de organizaciones puntuales. Aquí la tecnología permite describir, interpretar, justificar, explicar, articular y producir las técnicas de las organizaciones puntuales que componen la organización local. Principalmente en las organizaciones locales se pueden resolver cuestiones que no podrían hacerse en las organizaciones puntuales.
Una Organización Matemática es regional si se logra de la articulación, coordinación e integración a la institución, de varias Praxeologías locales.

Organizaciones matemáticas algebrizadas
Como una Organización Matemática puede llegar a modelizar la geometría o la estadística, lo puede hacer en mayor o menor medida con el Álgebra. Gascón (Bolea, Bosch, Gascón 2001, en Bolea 2003) caracteriza una Organización Algebraica. Considera que una modelización matemática es una modelización algebraica si modeliza las técnicas matemáticas de la organización algebraica.

Si se parte de un sistema inicial matemático, el cual se quiere estudiar, primero se lo somete a una modelización matemática; luego, se realiza una ***modelización algebraica de la obra matemática*** obtenida como resultado de la modelización anterior. De esta forma se construye una ***organización matemática algebrizada.***
Uno de los rasgos característicos de las "*modelizaciones algebraicas*" es que las modelizaciones algebraicas *modelizan explícita y materialmente las técnicas matemáticas* que forman parte del sistema inicial y que juega el papel de sistema a modelizar. Una vez modelizadas algebraicamente, las técnicas pueden ser manipuladas como nuevos objetos matemáticos (Bolea 2003), otra de las características es que "*modelizan íntegramente todas los componentes de la obra matemática* que hace el papel de sistema, en lugar de limitarse a modelizar aisladamente algunos de dichas componentes (Bolea 2003).

Indicadores del grado de algebrización del modelo propuesto
Bolea (2003) luego de describir las características propias de una modelización algebraica se vuelca al modelo que se obtiene de aplicar tal modelización. Ya que define a una "*organización matemática algebrizada*" como el resultado de aplicar una *modelización algebraica a una OM* y dado que no se cuenta con un criterio absoluto que permita establecer una división estricta entre obras matemáticas algebrizadas y prealgebraicas, propone una serie de *indicadores del grado de algebrización* de una organización matemática algebrizada que es consecuencia de la naturaleza algebraica de la modelización (Pilar Bolea, 2003).

IGA1. Manipulación de la estructura global de los problemas
Una Organización Matemática nace siempre como respuesta a cuestiones que dan lugar, progresivamente, a diferentes tipos de problemas. Un primer indicador del grado de algebrización de una organización esta relacionado con la posibilidad de tomar en cuenta, describir y hasta manipular la estructura global de estos problemas.
Para poder manipular la estructura global de los diferentes tipos de problemas es preciso hacer un uso sistemático del juego entre parámetro entendidos, como objetos matemáticos conocidos (sean números, conjuntos, funciones, espacios vectoriales, figuras, matrices, o cualquier otro objeto) que se manipula como si fueran desconocidos, e incógnitas, entendidas como objetos matemáticos desconocidos, que se manipulan como si fueran conocidos.

IGA2. Tematización de las técnicas y nueva problemática a nivel tecnológico
Un segundo indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la posibilidad de plantear y estudiar problemas relacionados con la descripción, la interpretación, la justificación, la producción y el alcance de las técnicas que la integran. En particular, una organización matemática algebrizada debe permitir describir los tipos de problemas resolubles con determinadas técnicas, estudiar en qué condiciones un determinado tipo de problemas tendrá o no tendrá solución, en qué casos la solución será única, etc. En particular, debe permitir caracterizar la estructura de las soluciones. Esto significa que cuanto más algebrizada este una organización, más fácil será plantear la cuestión de las condiciones de existencia de solución y no sólo la cuestión de la determinación de una solución de dicho tipo de problemas.

IGA3. Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías. Reducción de los elementos ostensivos
El tercer indicador del grado de algebrización de una organización matemática viene dado por la mayor o menor unificación de los diferentes tipos de problemas que forman parte de la organización, así como por la mayor o menor integración de las técnicas correspondientes y de los elementos tecnológicos asociados. Podríamos decir que este indicador no puede aplicarse a organizaciones matemáticas"puntuales" construidas en torno a lo que la institución considera como una única técnica y a un único tipo de tareas, sino que debe

tratarse, al menos, de organizaciones matemáticas "locales" que surgen de la integración de un conjunto de tareas y técnicas que aceptan una tecnología común (Chevallard, 1999).

IGA4. Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado
El cuarto y último indicador del grado de algebrización de una Organización Matemática viene dado por la posibilidad de generar tipos de problemas cada vez mas alejados del contexto del sistema cuyo modelo es la organización que estamos analizando.

Con el objetivo de ejemplificar la noción de grado de algebrización de una Organización Matemática, vamos a mostrar una tarea trabajada en una institución.

El grado de algebrización de una Organización Matemática es independiente de la naturaleza de los objetos (sean estos "números", "figuras geométricas" u otros cualquiera) que la constituyen; depende únicamente de la naturaleza de la actividad que es posible llevar a cabo dentro de dicha OM. (Bolea 2003)

Son precisamente los rasgos característicos de esta actividad matemática los que pretendemos medir, en este trabajo y con la actividad propuesta a los alumnos, con la presencia de los indicadores **IGA1** a **IGA4**.

Considerando el tema "Sistemas de ecuaciones lineales" presente en el programa de la asignatura Álgebra del primer año de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, se presenta parte de una evaluación a diferentes grupos en los que se puede apreciar cómo de manera explícita se le solicita una determinada forma de mostrar las soluciones obtenidas.
De dicha evaluación, se analizan los aspectos técnicos, tecnológicos y teóricos presentes en el registro con que se presentan las soluciones de los Sistemas de Ecuaciones Lineales.
Si bien la producción de los alumnos no se expone en esta oportunidad, nos abocamos a identificar los diferentes grados de algebrización presentes en las actividades de la evaluación.

El análisis detallado en un trabajo más extenso puede mostrar aspectos a tener en cuenta en las actividades con los alumnos que permitan transitar por los diferentes grados de algebrización, siempre teniendo presente el contexto en el que se realicen.

Actividad
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNLPam.

a) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método que crea más conveniente:

$$\begin{cases} 3x + 6y + 5z = 10 \\ -2x - 5y + z = 1 \\ x + 8y - 6z = -6 \end{cases}$$

b) Hallar el/los valores reales de α para que el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 6y + 5z = 10 \\ -2x - 5y + z = 1 \\ x + 2y - \alpha z = 10/3 \end{cases}$$ Tenga infinitas soluciones.

c) Usando alguno de los valores de α hallados en b), ¿qué soluciones tendría el sistema homogéneo asociado? Justificar.

d) Expresar las infinitas soluciones del sistema no homogéneo b) como combinación lineal de una solución particular y las infinitas soluciones del sistema homogéneo asociado.

e) Escribir el sistema del apartado a) en la forma $A \cdot X = b$. ¿Qué relación existe entre la clasificación del sistema y la matriz?.

Análisis a-priori de las posibles soluciones

Sobre el sistema $\begin{cases} 3x + 6y + 5z = 10 \\ -2x - 5y + z = 1 \\ x + 2y - \alpha z = 10/3 \end{cases}$ podemos usar escalonamiento de Gauss o una representación matricial, de la forma $A.X = b$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ -2 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -\alpha \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 10/3 \end{pmatrix}$. De manera que nuestra matriz ampliada $(A|b)$ se puede reducir a escalonada por operaciones fila, como sigue:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 5 & 10 \\ -2 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -\alpha & 10/3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 5 & 10 \\ 0 & -1 & 13/3 & 23/3 \\ 0 & 0 & -\alpha - 5/3 & 0 \end{array}\right)$$

Con lo cual para $\alpha = -5/3$ el sistema es compatible indeterminado y para otro valor $\alpha \neq -5/3$ el sistema tiene única solución. El conjunto solución es $S = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \,/\, (56/3, -23/3, 0) + t.(31, -13, -3) \quad \text{con } t \in R \right\}$.

Por supuesto que si trabajan con el sistema nos queda:

$$\begin{cases} 3x + 6y + 5z = 10 \\ -2x - 5y + z = 1 \\ x + 2y - \alpha z = 10/3 \end{cases} \approx \begin{cases} 3x + 6y + 5z = 10 \\ -1y + 13/3\, z = 23/3 \\ (-\alpha - 5/3)z = 0 \end{cases}$$

Si bien en el inciso a) "*Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método que crea más conveniente:*" se trabajan técnicas precisas para resolver una tarea como es "el resolver un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas", en general, se espera un trabajo en el bloque práctico-técnico. Sin embargo, en el inciso e) "*Escribir el sistema del apartado a) en la forma A.X=b. ¿Qué relación existe entre la clasificación del sistema y la matriz?*", que se vincula con el a), se hacen presentes elementos tecnológicos que debemos especificar.
En este momento, podemos estar pasando del análisis de un IGA1 a un IGA2 o superior, dependiendo como se trabaje.
Por su parte el inciso b) "*Hallar el/los valores reales de α para que el sistema: … Tenga infinitas soluciones*" permitiría salir del bloque práctico-técnico aunque anticipamos que es en él donde se quedarían en su resolución. Un nivel IGA2 puede presentarse, pero dependerá de lo trabajado en la cátedra.

Respecto al trabajo con sistema de ecuaciones lineales. M. Rogalski (Rogalski, 1995, en M. Días, 1998) define la noción de "punto de vista" diciendo, que las distintas maneras de mirar un mismo objeto matemático determinará puntos de vistas distintos. Por lo que podemos considerar, al menos, dos puntos de vista en la organización matemática de los sistemas de ecuaciones lineales, uno de ellos cuando se quiere representar el subespacio solución del sistema homogéneo o el conjunto solución del sistema no–homogéneo, y el segundo punto de vista cuando se requiere reducir todo sistema lineal a otro equivalente con ecuaciones independientes. En general se describen las técnicas de pasaje de un punto de vista a otro y, sin salirnos de la organización matemática de los sistemas de ecuaciones lineales, el método del pivot de Gauss nos da una descripción del subespacio solución y una interpretación de las condiciones de resolubilidad del sistema.
Considerando el trabajo de C. Parodi (2004), la definición de rango de un sistema lineal dentro del marco de los sistemas lineales "como el número de pivot elegidos en la aplicación del método de Gauss", el rango de un sistema lineal puede ser determinado por el método de Gauss, con lo que estamos siempre dentro de una resolución técnica. La invariabilidad del rango, con relación a la elección de los pivot no surge espontáneamente. En efecto, ya que es necesario relacionar el rango de un sistema lineal con el de una familia de vectores y si sólo nos encontramos en un nivel técnico puede constituir un obstáculo para esta relación. Obstáculo que puede ser superado, aunque no es del todo fácil, analizando los sistemas lineales, haciendo intervenir la noción de rango, como el teorema de Rouché (C. Parodi, 2004).
Este análisis, exige interpretaciones sobre los sistemas lineales después de aplicado el método de Gauss, por ejemplo si lo que se busca es el rango del sistema de ecuaciones o el rango de un conjunto de vectores.
Cuando hablamos de subespacio retomamos los dos subespacios asociados a un sistema lineal de *m* ecuaciones con *n* incógnitas, que describe M. Días como sigue:

- "El subespacio de las soluciones del sistema, que es un subespacio vectorial de R^n de dimensión *n - r*, para un sistema homogéneo, descripto por una representación paramétrica con (*n - r*) parámetros, y un subespacio

afín de dimensión n - r , admitiendo el subespacio precedente como espacio vectorial subyacente si el sistema es no homogéneo pero compatible...".

- El subespacio asociado a las ($m - r$) condiciones de resolución del sistema, que es un subespacio de R^m de dimensión r..."[M. Días, P. 80].

Algunas justificaciones en torno a los sistemas lineales, pueden sustentarse en el marco teórico del modelo algebraico que proporciona la organización matemática correspondiente a matrices. En este sentido, habrá nuevas interpretaciones y reformulaciones de resultados como así también nuevas demostraciones.

La articulación con el marco de las matrices, donde la asociación de un sistema lineal homogéneo a una matriz cuyas entradas son los coeficientes del sistema se puede hacer gracias al isomorfismo entre el espacio de las matrices y el de las aplicaciones lineales, permite relacionar el rango de una matriz, el de una aplicación lineal, el de un conjunto de vectores y el de un sistema de ecuaciones lineales.

La organización matemática de los sistemas lineales no solo funciona como una herramienta para resolver tareas en la organización matemática del álgebra lineal sino que sirve como medio para demostrar resultados dentro de la organización del álgebra lineal y en el sentido inverso.

El método del pivot de Gauss sobre los sistemas lineales está más generalizado sobre las matrices asociadas. Estas técnicas que resultan de una aplicación efectiva por parte del alumno, en general, no cuentan con un nivel de control tecnológico basados en la noción del rango y del Teorema de Rouché, de manera que les resulta difícil superar el hábito de buscar simplemente la solución sin hacer interpretaciones usando nociones provenientes de otras organizaciones matemáticas. La dificultad de articular los dos puntos de vista amplía la brecha entre un conocimiento más bien técnico a un conocimiento que involucra nociones como las del rango. Incluso el pasaje en un sentido no presenta igual tratamiento que el pasaje inverso.

Es claro que al primer punto de vista se lo vincula al inciso d) "*Expresar las infinitas soluciones del sistema no homogéneo b) como combinación lineal de una solución particular y las infinitas soluciones del sistema homogéneo asociado.*", y si bien dentro de la organización matemática de los sistema de ecuaciones lineales podemos transitar por los diferentes IGA, se espera un manejo más bien técnico.

En el inciso c) "*Usando alguno de los valores de α hallados en b), ¿qué soluciones tendría el sistema homogéneo asociado? Justificar.*" Si bien se le pregunta sobre la compatibilidad del sistema homogéneo el alumno puede trabajar un IGA1 si realiza nuevamente los cálculos con los valores de "α" obtenidos en el inciso b), o puede optar por responder analizando el rango de la matriz de los coeficientes, con lo cual pasamos a analizar el IGA2.

Considerando el sistema lineal homogéneo asociado, vemos que es un subespacio de R^3 caracterizado por una representación cartesiana (C. Parodi, 2004) y que se utiliza el método del pivot de Gauss para llegar al sistema triangular que estará formado por 2 ecuaciones linealmente independientes si $\alpha = -5/3$ o por 3 ecuaciones linealmente independientes si $\alpha \neq -5/3$. Si $\alpha = -5/3$ se identifica la variable libre z, obteniendo así el sistema generador minimal, formado precisamente por un vector. Luego, la solución general en diferentes representaciones (C. Parodi, 2004) para $\alpha = -5/3$ puede ser:

El subespacio original en la representación cartesiana $S = \{ (x,y,z) \in R^3 / 3x + 6y + 5z = 0, -2x - 5y + z = 0 \text{ y } x + 2y - 5/3\, z = 0\}$ puede ser expresado en las siguientes representaciones paramétricas (Parodi, 2004):

$$S = \{ a.(31,-13,-3), \text{ con } a \in R \}.$$
$$S = \{(x,y,z) \in R^3 / x = 31/3\, z,\ y = 13/3\, z \}.$$
$$S = \{(31a, -13a, -3a), \text{ con } a \in R\}.$$

Se observa que el sistema generador asociado mínimo está formado por el vector (31,-13,-3).

Si se sabe que el sistema de ecuaciones lineales dado es mínimo, se puede anticipar cierta información, dentro del marco de los sistemas de ecuaciones lineales, antes de aplicar el método del pivot de Gauss, como: a) el rango del sistema de ecuaciones lineales, b) la dimensión del subespacio solución, c) el número de parámetros de la representación paramétrica mínima y, por supuesto, tenemos más información en otros marcos.

En efecto, si el sistema está triangulado, es minimal y se conoce su rango r, la dimensión del subespacio de soluciones $n - r$ y el número de parámetros de la representación paramétrica $n - r$. En el ejemplo $n = 3$ y $r = 2$.

Por otra parte la compatibilidad del sistema homogéneo se puede analizar para los distintos valores de α y anticipar el resultado viendo el determinante de la matriz de los coeficientes. En efecto, si se tienen disponibles nociones como la de determinante se puede anticipar al uso del método del pivot de Gauss, la compatibilidad del sistema y aplicarlo en aquellos casos en que el sistema tenga solución. Por ejemplo, se podría calcular el determinante y analizar para qué valores de α se hace distinto de cero, lo que nos permitiría concluir que tiene como única solución la trivial y calcular las soluciones del sistema homogéneo para los restantes valores de α.

Las diferentes herramientas descriptas nos permiten analizar el IGA3 e incluso el IGA4 en el que pueden avanzar en la resolución de este tipo de problemas. Tengamos en cuenta que en el diseño de la actividad no hay un pedido explícito de utilización de determinados recursos. Su uso nos mostraría, en cierta forma, el nivel de algebrización alcanzado.
Es importante observar que las producciones obtenidas a partir de esta propuesta, se encuentran limitadas por el desarrollo de la asignatura, puesto que algunas nociones, y su correspondiente integración, se trabajan hacia el final de la cursada.
Es evidente que no son esperables todas las respuestas consideradas pero aún así nos sirve para ejemplificar los posibles análisis de los niveles de algebrización propuestos por Bolea (2003).
Además, hemos incluido diferentes registros de representación que involucran todo un análisis de su uso como así también de su articulación.

Consideraciones Finales

Las actividades propuestas procuran enmarcarse en el estudio de los IGA1 e IGA2 incluso muy débilmente en IGA3.
La predominancia de aspectos vinculados a estos primeros indicadores nos llevan a reflexionar sobre la importancia de plantear explícitamente la unificación de técnicas y tecnologías asociadas a determinados tipos de problemas y el análisis de problemas generales, cada vez más alejados del contexto inicial, cuya resolución se identifique con el modelo algebraico estudiado.
Consideramos que, en la mayoría de los desarrollos, el uso de una tecnología es a los efectos de justificar los pasos técnicos utilizados pero sin que premie un mayor desarrollo tecnológico-teórico.

Bibliografía

BOLEA CATALÁN, PILAR (2003). “El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares”. Monografías del seminario matemático. Prensa Universitarias de Zaragoza: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza.
PARODI CARLOS (2004). *Los niveles de conocimientos activados en el estudiantes en tareas donde se hace presente la articulación entre los puntos de vista cartesianos y paramétrico en álgebra lineal. Tesis de Maestría.*
DIAS M. A. (1998): *Les problèmes d’articulation entre points de vue «cartésien» et «paramétrique» dans l’enseignement de l’algèbre linéaire*. Editor: IREM, Paris.