MODELIZACIÓN ALGEBRAICA DE LA PROPORCIONALIDAD INVERSA ANÁLISIS EN UNA PRODUCCIÓN DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

M. Daniela Scarímbolo, Nora Ferreyra, Estela Rechimont, Carlos Parodi, Marcelo Lorenzo
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNLPam, Argentina
Facultad de Ingeniería, UNLPam, Argentina
danielascarimbolo@hotmail.com
noraf@exactas.unlpam.edu.ar

Area temática: Investigación educativa
Palabras Clave: Proporcionalidad inversa – Modelización algebraica – Estudiantes universitarios

Resumen
A partir de considerar el álgebra como instrumento de modelización, una obra matemática se dice algebrizada en la medida que permite la manipulación de la estructura global de los problemas, la descripción y justificación de técnicas y tecnologías involucradas en su resolución, la unificación en tipos de problemas y la emergencia de nuevos problemas. La organización matemática en torno a la proporcionalidad de magnitudes se construye en el nivel previo al universitario donde se considera prealgebraica. Nuestra intención es analizar el nivel de algebrización de esta organización en los primeros años de la universidad, a través de una actividad planteada a estudiantes de segundo año de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam.

Introducción
Según estudios realizados en investigaciones previas (Bolea, 2003; Gascón, 1994; Bosch, 1994), dos modelos epistemológicos caracterizan el álgebra escolar. El primero de ellos considera el álgebra escolar como una especie de aritmética generalizada, en este modelo se la identifica con un lenguaje simbólico que generaliza de alguna manera el lenguaje aritmético y sus prácticas y, se considera que es el modelo dominante en la enseñanza secundaria.
El otro modelo propuesto considera el álgebra escolar como instrumento de modelización. Desde este punto de vista, una actividad será considerada algebraica en la medida que permita la manipulación de la estructura global del problema, la descripción y justificación de técnicas y tecnologías involucradas en su resolución, la unificación en tipos de problemas y el surgimiento de nuevos problemas, cada vez más alejados del sistema que dio origen a la modelización.
Puesto que la frontera entre una obra matemática algebrizada y una prealgebraica no es precisa, consideramos para nuestro análisis los indicadores definidos por Bolea (2003), para identificar el grado de algebrización de una determinada obra matemática.

Modelización de la proporcionalidad de magnitudes
Bosch (1994) analizó y describió la organización matemática clásica prealgebraica construida en torno a la proporcionalidad de magnitudes. En su trabajo, estructura dicha organización en relación al tipo de problemas que se resuelven y las técnicas involucradas en ese proceso. Un proceso de algebrización de esta organización matemática podría conducir al tratamiento general de los problemas de proporcionalidad a través de una modelización funcional y, más aún, podría ampliarse e imbuirse luego en el modelo de funciones multilineales.
Siguiendo los aportes de Chevallard (en Bolea, 2003), el proceso de modelización matemática y en particular la modelización algebraica, presenta los siguientes estadios:

i) Un primer estadio denominado "Problemática Inicial" que incluye el sistema a modelizar, es decir la situación a estudiar, sea matemática o extramatemática, y las cuestiones que surgen en torno del sistema.
ii) El segundo estadio abarca la "Construcción del Modelo" donde se definen las variables y se establecen las relaciones entre ellas.
iii) El tercer estadio supone el "Trabajo del Modelo". En esta etapa se trabajará para lograr un modelo final que ponga de manifiesto las propiedades del sistema modelizado y permita interpretar los resultados obtenidos.
iv) En el último estadio será posible "Enunciar nuevos problemas" que puedan resolverse a partir del sistema estudiado.

Bolea (2003) estudia la organización matemática que podría obtenerse como resultado de una modelización algebraica de la organización clásica de la proporcionalidad (no significa que ella exista en alguna organización escolar) y considera la posibilidad de construcción, en esta organización algebrizada, de un discurso tecnológico capaz de interpretar y justificar adecuadamente todas las técnicas involucradas en la resolución de problemas de proporcionalidad. La modelización propuesta en el estudio puede descomponerse en tres niveles sucesivos de algebrización, que se ponen de manifiesto a partir del análisis de cada uno de los indicadores del grado de algebrización definidos.

Indicadores del grado de algebrización de una organización matemática

Indicador 1: *Manipulación de la estructura global de los problemas*.

En esta primera etapa, es importante poder describir y manejar la estructura global del problema, esto significa que si la estructura matemática se encuentra altamente algebrizada el problema se puede tratar de manera general; identificando los parámetros y pudiendo manipularlos como si fueran desconocidos.

Primer Nivel de Algebrización: Se puede distinguir entre proporcionalidad directa e inversa.

Segundo Nivel de Algebrización: Las variables pueden tomar el rol de incógnitas o parámetros.

Tercer Nivel de Algebrización: Se amplía el tipo de problema en el que se puede manipular la estructura global.

Indicador 2: *Tematización de las técnicas y nueva problemática a nivel tecnológico*.

En este indicador se analiza la *descripción, interpretación, justificación, producción y dominio de validez de las técnicas que se presentan* en los problemas. Esto incluye estudiar la solución y su alcance, cuáles son las condiciones para tener una, más de una, infinitas o ninguna solución. Es, más que buscar la respuesta, cuestionar las *condiciones de existencia de la solución*.

Primer Nivel de Algebrización: Al escribir las relaciones, se puede plantear nuevas tecnologías referentes a cada una de ellas. Cuando escribimos $p \cdot d = C$ podemos establecer una proporcionalidad directa en el caso que p ó d sean constantes, y una proporcionalidad inversa si la constante es C.

Segundo Nivel de Algebrización: Se pueden plantear nuevas cuestiones tecnológicas, a saber, ¿cómo puede cambiar la constante C y el resto de los parámetros si tuviéramos otros datos en el problema? ¿Si cambiamos las variables dependiente e independiente? ¿Si conocemos más datos?

Indicador 3: *Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías. Reducción de los elementos ostensivos.*

Este indicador está relacionado con el grado de *unificación de los diferentes tipos de problemas* que conforman la organización y la *integración de las técnicas* y *elementos tecnológicos* asociados. Esta unificación implica disminuir los elementos ostensivos.

Primer Nivel de Algebrización: El lenguaje algebraico aparece como simbolismo aritmético sin reducir la complejidad del concepto ni mejorar la eficacia de la técnica.

Segundo Nivel de Algebrización: Unificación y reducción de tipos de problemas, técnicas y tecnologías.

Tercer Nivel de Algebrización: La unificación de técnicas y reducción de objetos ostensivos tiene que ver con los instrumentos teóricos.

Indicador 4: *Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado.*

Este indicador pretende medir la *posibilidad de generar tipos de problemas que se alejen del contexto del sistema cuyo modelo es la organización que estamos analizando.* Cuanto más algebrizada se presenta la organización, hay más posibilidades de alejarse del modelo.

Primer Nivel de Algebrización: Al identificar la función de proporcionalidad, pueden surgir problemas independientes. A partir de una relación de cuatro variables $K \cdot p \cdot d = A$ se puede llegar a una relación de tres variables $p \cdot d = C$.

Segundo Nivel de Algebrización: Los nuevos problemas son más complejos que los clásicos de proporcionalidad.

Tercer Nivel de Algebrización: Podrían aparecer más tipos de problemas independientes de la proporcionalidad.

Estudio sobre un problema

Con la intención de analizar el grado de algebrización de la organización matemática "proporcionalidad inversa" que trabajan los estudiantes de los primeros años del profesorado en matemática de la UNLPam, se estudió una actividad propuesta a dichos estudiantes y las respuestas obtenidas.

El problema a presentar como eje del estudio es el siguiente:

> El dueño de un criadero de pollos dijo: "si vendo treinta pollos, la reserva de alimento duraría diez días más, en tanto que si compro setenta pollos más, me quedaré sin alimento para pollos catorce días antes". Suponiendo que todos los pollos comen diariamente la misma cantidad de alimento, ¿cuántos pollos tiene?
>
> Hallar una relación que permita calcular la cantidad de tiempo que durará el alimento en función de la cantidad de pollos en el criadero.

Análisis a priori del proceso de modelización:

Analizamos el problema considerando las cuatro etapas de un proceso de modelización definidas por Chevallard (en Bolea, 2003).

En el caso presentado, la "Problemática Inicial" corresponde a un problema aparentemente extramatemático, que podríamos considerar del ambiente de la producción. Surgen afirmaciones y preguntas generales ligadas a esta problemática tales como:

- …a más pollos, menos tiempo de alimento…
- …a menos pollos, más tiempo dura el alimento…
- Lo que come cada pollo cada día, ¿se puede suponer constante?
- ¿Qué cantidad de alimento hay?
- ¿Para cuántos días y para cuántos pollos alcanza la existencia de alimento?

Al iniciar la etapa de "Construcción del Modelo", comenzamos definiendo las variables que, en principio, aparecen vinculadas al problema e identificamos las relaciones entre ellas.

- Cantidad de alimento existente: A
- Consumo diario de cada pollo: K
- Cantidad de pollos al momento de plantear el problema: p
- Cantidad de pollos después de la venta: p_1
- Cantidad de pollos después de la compra: p_2
- Días de alimento al momento de plantear el problema: d
- Días de alimento después de la venta: d_1
- Días de alimento después de la compra: d_2

Podemos establecer las siguientes relaciones entre las variables:

$$p_1 = p - 30 \qquad d_1 = d + 10$$

$$p_2 = p + 70 \qquad d_2 = d - 14$$

$$K \cdot p \cdot d = A \qquad K \cdot p_1 \cdot d_1 = A \qquad K \cdot p_2 \cdot d_2 = A$$

Respecto al "Trabajo del Modelo", se plantea la relación $p \cdot d = \frac{A}{K}$, donde $\frac{A}{K}$ representa el total de alimento dividido en lo que come cada pollo, cada día; es decir, que $\frac{A}{K}$ es la cantidad de "raciones diarias". Podría pensarse entonces en un nuevo parámetro C, que representa la cantidad $\frac{A}{K}$. Las relaciones establecidas en el problema indican que en este caso C es constante. Reescribiendo la expresión $p \cdot d = C$ como $p = \frac{C}{d}$ se pone de manifiesto la noción de proporcionalidad inversa.

Las preguntas formuladas al iniciar pueden empezar a responderse.

$(p-30)\cdot(d+10) = C$, $(p+70)\cdot(d-14) = C$, $p \cdot d = C$

En este punto se presenta una nueva instancia de modelización algebraica puesto que las técnicas desarrolladas en el estudio de los sistemas de ecuaciones pueden aplicarse para obtener resultados a partir de estas igualdades.

$$\begin{cases} (p-30)\cdot(d+10) = C \\ (p+70)\cdot(d-14) = C \\ p \cdot d = C \end{cases}$$

Se obtiene $C = 9000$, $p = 180$ y $d = 50$.

Al momento de interpretar los resultados, observamos que C representa la cantidad de raciones diarias, que podría variar si cambia A ó K, puesto que si se modifica el tamaño de la porción diaria o la reserva total de alimento, cambiará también ese C. Sin embargo, el problema no nos proporciona datos como para responder ¿Qué cantidad de alimento hay? ó ¿cuál es el consumo diario de cada pollo?

Este trabajo de modelización del problema inicial facilita la "Formulación de nuevos problemas" que constituye la última etapa del proceso.

Si la condición de variable de p cambiara y fuera considerado un parámetro, la relación entre C y d podría modelizarse a través de otra función.

Dependiendo de los datos proporcionados, podría efectuarse el análisis de distintas situaciones. Si algunas de las variables que intervienen cambiaran la condición de incógnita y parámetro, la relación entre C, p y d podría modelizarse a través de funciones diferentes. Algunas de las cuestiones a plantearse pueden ser:

- Si se conoce la cantidad de pollos, ¿cuál es la relación entre la cantidad de raciones y los días para los que alcanza el alimento?
- Si se desea duplicar la ración diaria de alimento, ¿cuál será la relación entre la cantidad de pollos y los días que dura el alimento? Para obtener el mismo resultado que en el problema original, ¿será suficiente con duplicar la cantidad total de alimento?

Experiencia

Dos aspectos debemos destacar en el análisis de las producciones de los estudiantes en torno al problema propuesto:

- El modelo prealgebraico de la proporcionalidad inversa ha sido estudiado, no surge en este nivel sino que se analiza en el nivel preuniversitario a través de problemas de regla de tres y la función de proporcionalidad inversa.
- En este cuatrimestre, los estudiantes han trabajado en la producción de fórmulas como resultado de un proceso de generalización de prácticas aritméticas.

De las producciones de los estudiantes se seleccionaron tres, considerando que son representativas de las respuestas obtenidas.

Caso 1: En la resolución del problema, el estudiante señala: "Proporcionalidad inversa" y escribe: $D=\frac{y}{x}$ sin consignar qué representan cada una de las variables mencionadas. Sin mediar otras palabras, completa la siguiente tabla:

x	y
a	b
a - 30	b+10
a+70	b -14

Posteriormente resuelve las ecuaciones: $\frac{a-30}{a+70}=\frac{b-14}{b+10}$ y $ab=(a-30)\cdot(b+10)$ y obtiene los correspondientes valores para a y b.

Cabe observar que el estudiante no manifiesta ninguna reflexión acerca de la existencia de la constante o el significado del rótulo utilizado. Tampoco se manifiesta observar alguna contradicción entre la primera igualdad, escrita junto al título "proporcionalidad inversa" y las ecuaciones propuestas luego.

Resuelve las ecuaciones escritas y establece la fórmula general sin evaluar su validez ni el sentido de la relación entre las magnitudes puestas en juego en el enunciado del problema.

Caso 2: En esta resolución, la estudiante distingue cada variable y analiza las relaciones entre ellas. Designa con c: *la cantidad de comida por día y por pollo* y expresa la condición de constante.

Obtiene explícitamente la función $t=\frac{y}{c\cdot x}$ como la *función que permite calcular la cantidad de tiempo que durará el alimento en función de la cantidad de pollos*, considerando y : *reserva de alimentos* y x : *cantidad de pollos*.

Si bien la resolución posterior es, en este caso, muy similar al anterior, el razonamiento implícito es muy diferente, ya que existe una búsqueda de condiciones y regularidades, con la intención de hallar una función general. En ningún momento se encasilló el problema en un tipo especial de función sino que la búsqueda condujo a la fórmula.

Se detecta en este caso una unificación de técnicas que se rescatan del trabajo en la producción de fórmulas que modelizan distintas situaciones.

Caso 3: En esta resolución, el estudiante considera diferentes variables y, si bien no concreta la resolución del problema, es interesante observar las diversas variables consideradas y las relaciones que obtiene.

Considera como constante la cantidad inicial de pollos y, a partir de allí, establece una relación entre los pollos vendidos y los días de alimento extra. *Puesto que al vender 30 pollos, queda alimento para 10 días más, si vende 3 pollos quedará alimento para 1 día más*.

Al plantear, con números negativos, la relación para la cantidad de pollos comprados y el alimento que se acabará antes nota algún inconveniente y cambia las variables, considerando también *cantidad de pollos comprados*, sin embargo no logra concretar una relación válida. Aunque no termina de resolver el problema, la utilización de diferentes variables, la consideración de posibles relaciones, la elaboración de una tabla y la verificación de los resultados parciales evidencia la intención de obtener una función general.

Conclusiones

En el análisis de la organización matemática referida a la proporcionalidad inversa, en el nivel universitario, observamos que, si bien no se advirtieron planteos del tipo "problemas de regla de tres", siguen existiendo algunos elementos de la organización matemática trabajada en el nivel preuniversitario. Ello se manifiesta en la resolución del problema propuesto a estudiantes de los primeros años del Profesorado en Matemática.

En las respuestas obtenidas no se observan expresiones del tipo $x \cdot y = k$, en los trabajos que analizan la existencia de la constante se obtiene la expresión $y = \frac{k}{x}$ cuya interpretación tiene un significado cultural fácilmente traducible a un enunciado coloquial. En este sentido, la manipulación de la estructura global del problema no pasaría de un primer nivel de algebrización.

En varios de los trabajos considerados, se analizaron relaciones entre distintas variables que se tradujeron a ecuaciones y en otros se intercambiaron las condiciones de variable o constante de algunos datos. Considerando estas observaciones en el marco del segundo indicador, podríamos decir que se ha superado un primer nivel de algebrización, sin embargo, la unificación de técnicas pareció centrarse en la expresión y resolución de la proporción sin abocarse a un proceso de modelización funcional.

Creemos que las respuestas obtenidas se hallan condicionadas por el diseño de la propuesta, ya que la misma no considera una actividad que propicie la emergencia de otros problemas independientes del planteado, por lo cual no se obtienen datos referidos al último indicador del grado de algebrización.

Referencias Bibliográfícas

1. Bolea Catalán, P. (2003), *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral, Zaragoza: Universidad de Zaragoza.
2. Bosch, M. (1994), *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral, Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.
3. Gascón, J. (1994), "Un Nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'aritmétique généralisée", en *Petit x*, 37, pp. 43-63.