

# UNA PROPUESTA PARA AJUSTE DE SUPERFICIES

**María T. Guardarucci- Claudio Justo-**

Facultad de Ingeniería- UNLP-Argentina

[marite.guardarucci@ing.unlp.edu.ar](mailto:marite.guardarucci@ing.unlp.edu.ar)- [cejusto@yahoo.com.ar](mailto:cejusto@yahoo.com.ar)

**Palabras claves:** mínimos cuadrados lineales, paraboloide rotado, rugosidad

**Resumen:** El presente trabajo tiene su origen en un estudio encarado por el Instituto Argentino de Radioastronomía (IAR), con el objetivo de realizar un cambio para elevar la frecuencia de observación de uno de sus Radiotelescopios. Un relevamiento de puntos sobre esta superficie para un posterior análisis es necesario ya que el rendimiento de la antena está estrechamente relacionado con la rugosidad y la frecuencia de trabajo. La superficie reflectora, que concentra la energía en una zona reducida, se ajusta a un paraboloide de rotación, de eje inclinado, cuyo foco es el lugar de concentración. El modelo propuesto aprovecha la disposición de los puntos relevados permitiendo optimizar el ajuste mediante un método de mínimos cuadrados lineales.

## Introducción

El presente trabajo tiene su origen en un estudio encarado por el Instituto Argentino de Radioastronomía (IAR), con el fin de realizar un cambio en la frecuencia de observación de uno de sus Radiotelescopios. El objetivo es elevar la frecuencia de 1,42 GHz a 5,5 GHz, o sea bajar las longitudes de onda del orden de 22 cm a 5 cm, para lo cual se deberán cambiar la totalidad de las chapas que componen esta superficie. Dado que el rendimiento de la antena está estrechamente relacionado con la rugosidad y la frecuencia de trabajo, se debe verificar la rugosidad de la superficie actual. Para ello se propone realizar un relevamiento de puntos sobre esta superficie parabólica y un posterior análisis sobre su estado.

La superficie que es objeto de este trabajo es el reflector del radiotelescopio, cuya geometría de diseño es un paraboloide de revolución. Este reflector consiste en una estructura central de acero que soporta 32 costillas de aluminio (secciones parabólicas) y 30 anillos circulares concéntricos, sobre los cuales se ajusta una malla de alambre. Esta malla es la que forma la superficie del reflector propiamente dicho.

Las costillas que sostienen los anillos no son todas de igual longitud; todas parten del anillo exterior, pero sólo 8 llegan hasta el centro del reflector, otras 8 llegan hasta el anillo 25, y las 16 restantes llegan sólo hasta el anillo 20. La disposición de las costillas es alternada. La Figura 1 muestra una imagen del radiotelescopio.



Figura 1

## Fundamentación

Dado un conjunto de puntos sobre una superficie se desea determinar la ecuación de la misma. En el problema de mínimos cuadrados la ecuación de la superficie se determina hallando parámetros que minimizan la distancia entre los puntos observados y la expresión propuesta para modelizar la superficie.

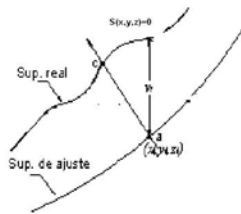
Suponiendo que la superficie se corresponda con un paraboloide  $S$  de eje  $z$  paralelo a la línea de plomada de ecuación  $z - c = d * (x - a)^2 + d * (y - b)^2$ , para calcular la distancia de un punto  $P(x, y, z)$  a un paraboloide  $S$ , debemos determinar el punto  $P^*$  sobre  $S$  más cercano a  $P$ . Si la ecuación del paraboloide está

dada en forma paramétrica  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{v} \cos(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{v} \sin(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{z} = \mathbf{c} + \mathbf{d} \mathbf{v}^2$ , asumiendo  $a, b, c$  y  $d$  conocidos, hallar las coordenadas de  $P^*$  implica determinar  $(u^*, v^*)$ . En un problema de ajuste, los valores de los parámetros  $a, b, c$  y  $d$  son desconocidos y deben ser determinados. Así entonces dado un conjunto de observaciones  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i=1, \dots, m$  el problema consiste en hallar  $a, b, c, d$ ,  $(u_i, v_i)$   $i=1, \dots, m$ , es decir  $2m+4$  parámetros, de manera de minimizar la suma de las distancias de los puntos a la superficie.

Tradicionalmente, a fin de simplificar el problema planteado, el ajuste de paraboloides de origen desplazado y eje  $z$  paralelo a la línea de plomada es realizado tratando de minimizar la distancia entre las coordenadas  $z$  de los puntos observados respecto del modelo propuesto:

$$\min g(a, b, c, d) = \sum_{i=1}^m (z_i - c - d \cdot ((x_i - a)^2 + (y_i - b)^2))^2$$

El problema se corresponde con uno de mínimos cuadrados lineales y la solución obtenida es usada para obtener un sobreestimado de la distancia, en norma 2, de los puntos a la superficie (Figura 2).



En otras modelizaciones, Alvarado[Al], la ecuación del paraboloide se asume con origen  $O=(0,0,0)$  y eje  $z$  paralelo a la línea de la plomada, cuya ecuación  $S(x,y,z)=d*(x^2+y^2)-z=0$  se reescribe de manera de poder resolver el ajuste minimizando la máxima discrepancia entre los valores observados y la función modelizadora. El problema se lleva a la búsqueda del óptimo en norma uniforme, es decir un problema del tipo “min-max”, y se resuelve mediante técnicas de Programación Lineal.

En el problema que nos compete, el eje del paraboloide no es paralelo a la línea de plomada (Figura 1). El sistema de coordenadas rectangulares al cual se refieren las coordenadas de los puntos observados queda definido por la vertical del lugar, o línea de plomada, y una dirección arbitraria elegida a conveniencia. Bajo estas circunstancias el modelo  $S(x,y,z)=0$  que representa la superficie cuyos datos se desea ajustar se corresponde con un paraboloide rotado y trasladado.

Con el objetivo de poder tratarlo como un problema de paraboloide de eje paralelo a la línea de plomada, se plantea una transformación de los datos. En una primera etapa se propone estimar los ángulos de rotación desconocidos  $\alpha$  y  $\beta$  y luego rotar a los datos observados a fin de poder trabajar en un sistema de eje  $\bar{z}$ , paralelo a la línea de plomada. Las coordenadas cartesianas  $(x_i, y_i, z_i)$  de los  $m$  puntos observados son transformadas, mediante rotaciones de ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  a un sistema  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  en el que el paraboloide tiene eje paralelo a la línea de plomada definida por  $\bar{z}$

$$\bar{x}_i = \cos(\beta) x_i - \sin(\beta) \sin(\alpha) y_i + \sin(\beta) \cos(\alpha) z_i$$

$$\bar{y}_i = \cos(\alpha) y_i + \sin(\alpha) z_i$$

$$\bar{z}_i = -\sin(\beta) x_i - \cos(\beta) \sin(\alpha) y_i + \cos(\beta) \cos(\alpha) z_i$$

y los datos rotados son expresados en forma paramétrica

$\bar{P}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i) = (a + v_i \cos(u_i), b + v_i \sin(u_i), c + d v_i^2)$ , con  $(u_i, v_i), i=1, \dots, m$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ , valores desconocidos. El ajuste se realiza resolviendo el problema de optimización no lineal en  $2m+6=1508$  variables.

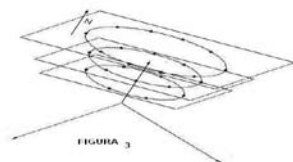
$$\min S(a, b, c, d, \alpha, \beta, u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m) = \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - a - v_i \cos(u_i))^2 + (\bar{y}_i - b - v_i \sin(u_i))^2 + (\bar{z}_i - c - d v_i^2)^2$$

### Desarrollo

Se dispone de una muestra de  $m=751$  observaciones provenientes de puntos sobre la estructura de apoyo de la malla reflectante. El reflector consiste en una estructura central de acero que soporta 32 costillas de aluminio (secciones parabólicas) y 30 anillos circulares concéntricos, sobre los cuales se ajusta una malla de alambre. La disposición de los puntos relevados permite desarrollar una estrategia para hallar la solución mediante el método de mínimos cuadrados lineales. La propuesta realiza el ajuste optimizando en dos etapas.

En una primera etapa se determinan los ángulos desconocidos  $\alpha$  y  $\beta$ .

Para estimar los valores de los ángulos de rotación  $\alpha$  y  $\beta$  se tiene en cuenta que los puntos pertenecientes a un mismo anillo están todos en un plano y que el vector normal a ese plano coincide con el eje de rotación del paraboloide (Figura 3).



Considerando que los 29 anillos sobre los que están apoyados los puntos muestreados están sobre planos paralelos, podemos suponer que hay 29 planos que contienen los puntos de los respectivos anillos, todos ellos dirigidos por el mismo vector normal  $\eta = \langle A, B, C \rangle$ .

Así entonces para los puntos  $P_{k,j} = (x_{k,j}, y_{k,j}, z_{k,j})$  apoyados en el anillo  $k$ ,  $k = 1, \dots, 29$ , la ecuación del plano que los contiene estará dada por  $A x_{k,j} + B y_{k,j} + C z_{k,j} = D^k$   $j = 1, \dots, i_k$ , con  $i_k$  = total de puntos en el anillo  $k$ ,

$$m = \sum_{k=1}^{29} i_k = 751, \text{ cantidad de puntos observados.}$$

Se determina el vector normal  $\vec{N} = \langle A, B, C \rangle$  resolviendo el problema de mínimos cuadrados lineales en 32 variables

$$\min f(A, B, C, D^1, \dots, D^k) = \sum_{k=1}^{29} \sum_{j=1}^{i_k} (A x_{k,j} + B y_{k,j} + C z_{k,j} - D_k)^2$$

Una vez obtenidos los estimadores de A, B y C, un estimador de  $\alpha$  y  $\beta$  es obtenido mediante el cálculo

$$|\vec{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad \alpha = \arctg\left(\frac{B}{A}\right) \quad \beta = \arcsen\left(\frac{C}{|\vec{N}|}\right)$$

Una vez obtenidos los estimados de  $\alpha$  y  $\beta$  los datos son transformados, mediante el producto por matrices de rotación, para hacerlos corresponder con los de un sistema de coordenadas de eje paralelo a la línea de plomada.

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha & 0 \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_y = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\text{sen} \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

De esta forma, el conjunto de puntos transformados  $\bar{P}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  se puede modelizar mediante una superficie de origen trasladado  $O=(a,b,c)$  cuyo eje de simetría coincide con el eje  $\bar{z}$ , que es el eje de revolución del paraboloide de ajuste, de ecuación  $\bar{z} - c = d * (\bar{x} - a)^2 + d * (\bar{y} - b)^2$  con parámetros a,b,c,d desconocidos. Una segunda optimización es realizada a fin de hallar valores aproximados para a,b,c,d. En esta segunda etapa una simplificación del problema se realiza asumiendo las coordenadas  $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  son obtenidas sin error y sobreestimando la distancia a la superficie mediante la minimización de la distancia en la coordenada  $\bar{z}$ . La estimación de los parámetros a,b,c,d se obtiene entonces minimizando la función g(a,b,c,d) la que se reescribe a fin de poder usar mínimos cuadrados lineales

$$\min h(E, F, G, L) = \sum_{i=1}^{781} \eta_i^2 = \sum_{i=1}^{781} (\bar{z}_i - E - F \cdot (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2) - G \bar{x}_i - L \bar{y}_i)^2 \quad [1]$$

#### Estimación de la rugosidad

Uno de los conceptos que se usan en topografía para describir la irregularidad de las superficies es el de rugosidad. La cuantificación de la rugosidad es uno de los problemas que aborda la topometría. Si la superficie modelada S se ha determinado usando en el ajuste m puntos  $P_i$ ,  $i=1, \dots, m$  y optimizando respecto de r parámetros, denominando  $v_i$  a la distancia de  $P_i$  a S, la rugosidad del telescopio se estima con

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m v_i^2}}{m - r}$$

La rugosidad  $\varepsilon$  interviene como parámetro para conocer el rendimiento de la antena. En aquellos lugares donde la superficie del reflector se aparta de la superficie ideal, se producirá un error de fase en la longitud del recorrido de la onda reflejada de casi  $2\varepsilon$ . Estos errores disminuyen la contribución de cada elemento al campo eléctrico de la onda reflejada, produciendo pérdidas de ganancia y disminuyendo la eficiencia de la superficie reflectante.

Para una longitud de onda de operación del radiotelescopio de magnitud  $\lambda$ , las pérdidas de ganancia por

rugosidad,  $\xi$ , pueden calcularse por medio de la ecuación de Ruze:  $\xi = e^{-\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda}\right)^2}$

En el caso que nos ocupa, la frecuencia de trabajo a la que se quiere llevar el radiotelescopio es de 5.5 GHz, por lo tanto, la rugosidad máxima admisible será  $\varepsilon_M = 2.72$  mm.

Debe tenerse en cuenta que la rugosidad estimada en el ajuste incluye tanto la componente de deformación estructural (rugosidad pura) como la fluctuación aleatoria de las observaciones, debido a la precisión del aparato con el cual se realizan las mediciones. Teniendo en cuenta la precisión con que las mediciones se realizan, normas fijadas por el IAR permiten a lo más una desviación  $\varepsilon_{\text{rms}} = \sqrt{2} \varepsilon_M + 1 = 4$ .

La expresión planteada en [1] calcula los desvíos en la dirección del eje  $\bar{z}$ .

Considerando que el punto  $\bar{P}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$  está sobre la superficie material y que el punto

$\bar{Q}_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i + \mu_i)$  está sobre la superficie ajustada, la distancia de  $\bar{P}_i$  a  $\bar{Q}_i$ ,  $d(\bar{P}_i, \bar{Q}_i) = |\mu_i|$

es mayor que la distancia de  $\overline{P}_i$  a la superficie ajustada y por tanto la rugosidad está sobreestimada. Denotamos con  $\varepsilon_g$  al sobreestimado de la rugosidad.

Para hallar el valor de los desvíos en la dirección normal al paraboloide proponemos, como se muestra en la Figura 4, una aproximación que mejora al estimado usualmente usado.

Si en la superficie ajustada  $\overline{Q}_i^* = (\overline{x}_i^*, \overline{y}_i^*, \overline{z}_i^*)$  es el punto más cercano a  $\overline{P}_i$ , el vector  $\overline{P}_i \overline{Q}_i^*$  es paralelo a  $\overline{t}_\mu^* = \langle 2d.(a - \overline{x}_i^*), 2d.(b - \overline{y}_i^*), 1 \rangle$ .

Si  $\overline{\mu} = \overline{P}_i \overline{Q}_i^*$ , estimamos la distancia de  $\overline{P}_i$  a la superficie ajustada calculando la norma de  $\overline{\mu}$ , proyección de sobre  $\overline{t}_\mu^*$ , cuyo valor  $\varepsilon_{p3D} = \frac{|\overline{\mu}|}{|\overline{t}_\mu^*|} \leq |\overline{\mu}|$ .

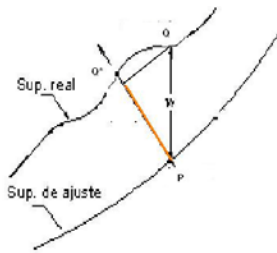


Figura 4

Se puede mostrar que el estimador  $\varepsilon_{p3D}$  propuesto permite encontrar un sobreestimado de la rugosidad más cercano al valor exacto que el sobreestimado hallado usando  $\varepsilon_g$ .

Otra estimación de la rugosidad se propone evaluando una distancia en dos dimensiones, considerando la parábola bidimensional que se obtiene mediante la intersección del paraboloide y un plano vertical que pasa por el punto medido. Denotamos con  $\varepsilon_{p2D}$  al valor obtenido.

## Resultados

Procesados los datos los valores estimados para la rugosidad resultan ser :  $\varepsilon_g = 3.2$ ,  $\varepsilon_{p3D} = 2.9$ ,  $\varepsilon_{p2D} = 3.0$  para los valores sobreestimados obtenidos mediante proyecciones.

Considerando que la magnitud de la rugosidad de la superficie del radiotelescopio indica si se debe rectificar la estructura actual, se realiza un test de hipótesis a fin de tomar una decisión. Asumiendo que el estimador

$\varepsilon = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m v_i^2}}{m - r}$  tiene una distribución  $\chi^2$  con  $m - r = 751 - 29 - 3 - 4 = 715$  grados de libertad y tomando como

referencia los valores fijados por el IAR se acepta, con un nivel de confianza del 95%, la hipótesis que permite aconsejar que la estructura no sea cambiada.

## Conclusiones

La alternativa propuesta en Späth[Sp] minimiza la distancia de los puntos a la superficie requiere resolver un problema de optimización no lineal en 1508 variables.

En este trabajo se propone una estrategia para hallar la ecuación de un paraboloide de centro desplazado y eje rotado que ajuste a un conjunto de puntos dados que, aprovechando la disposición de los mismos, permite resolver el problema encontrando la solución a dos problemas de mínimos cuadrados de 32 y 4 variables respectivamente. La solución hallada otorga un sobreestimado de la distancia de los puntos a la superficie modelada. Se proponen sobreestimados que mejoran al tradicionalmente usado.

## Referencias Bibliográficas

- [Al] A.S. Alvarado, S. Vázquez Montiel, R. Nivón Santiago, C. Castañeda Roldán, "Uso de Programación Lineal para conocer los parámetros geométricos de superficies cónicas convexas" Revista Mexicana de Física, Vol 50 (2004), pp. 358-365
- [De] J. E. Dennis and R. B. Schnabel, "Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations". Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 07632, USA, 1983.
- [Dr] S. Dreisin and Y. Sharai, "High Accuracy Horizontal Scanner operating in X band for the Measurement of a spaceborn Synthetic Aperture Radar (SAR) Antenna". Technical Report, ORBIT/FR, 2004.
- [Flec] R. Fletcher, "Practical Methods of Optimization". 2nd Edition, New York, John Wiley (1987).
- [Kr] E. Kreyszig, "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería", Vol. II, 5ta. Edición, LIMUSA (1994).

- [Mu] C. Muravchik, C. Rago, J.A. Bava, A.J. Sanz, "Método de verificación de Imperfecciones en Superficies de Antenas Reflectoras Parabólicas", Informe Interno IAR N°66, Instituto Argentino de radioastronomía, 1990.
- [Sc] H. Scolnik, N. Echebest, M.T. Guardarucci and M.C. Vacchino, "Incomplete Oblique Projections Algorithm for Solving Large Inconsistent Linear Systems", Mathematical Programming, Serie B, Vol. 111, N° 1-2, (2008), pp. 273-300.
- [Sp] H. Späth, "Least Square fitting with rotated paraboloids", Mathematical Communications, 6 (2001), pp. 173-179.
- [Za] M.S. Zarghamee, "On Antenna Tolerance Theory", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol 15 N°6 (1967).