Conversión de representaciones semióticas: secuencia didáctica aplicada a Números Complejos

Aznar, María A.; Moler, Emilce; Pesa, Marta, Distéfano, María Laura
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina
maznar@fi.mdp.edu.ar; egmoler@yahoo.com.ar; mpesa@herrera.unt.edu.ar ; mldistefano@fi.mdp.edu.ar
Área Temática: Investigación educativa
Palabras clave: representaciones semióticas – conversiones – números complejos – secuencia didáctica

Resumen

En este trabajo se presentan resultados de una investigación en curso, relativa a la enseñanza de Números Complejos, desarrollada en la asignatura Álgebra de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. En este contexto se analiza la factibilidad de proponer la habilidad de efectuar conversiones de representaciones gráficas al registro algebraico, como objetivo pedagógico. Se describen el instrumento diseñado para evaluar esta habilidad y una secuencia didáctica proyectada para favorecerla siguiendo los lineamientos teóricos de la Teoría de Registros Semióticos. Se exponen resultados de su implementación, que conducen a pensar que es un objetivo de enseñanza viable con un costo temporal relativamente breve.

1. Introducción

La competencia de "visualización" es una condición necesaria para la solución de cualquier problema que se plantee en términos matemáticos. Hitt (2003) la describe señalando que la visualización matemática de un problema tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes *representaciones* de la situación en cuestión y ello permite realizar acciones que posiblemente puedan conducir hacia la solución del mismo.

Es precisamente en la relación entre las representaciones de un objeto matemático y su conceptualización en la que surgen puntos claves en el aprendizaje de la matemática. Así, Duval (1998, 2004, 2006) afirma que toda *representación semiótica* es parcialmente cognitiva respecto de lo que representa y que la conceptualización implica *una coordinación* de registros de representación, por lo que la comprensión de un objeto matemático reposa en la *coordinación* de al menos dos registros de representación.

Dos de los registros de representación semiótica usados en Álgebra son el *registro del lenguaje algebraico* y el *registro gráfico*, los cuales, desde el punto de vista de Duval (1998, 2004 2006), deben ser coordinados por el alumno para que logre sus conceptualizaciones. Estas coordinaciones implican las *conversiones* de expresiones planteadas en el *registro algebraico* a sus correspondientes gráficas, y *conversiones* cuyo punto de partida es una representación gráfica, para llegar a una ecuación o función que las describa en el lenguaje algebraico.

En este sentido, respecto del uso de las representaciones gráficas y del desarrollo de habilidades de visualización, se ha indagado sobre cómo el uso parcializado de estas formas de representación limita tanto los recursos en la resolución de problemas como la conceptualización de objetos matemáticos asociados (Hitt, 2003). La tendencia en la enseñanza tradicional ha sido la de otorgar más importancia al registro algebraico mientras que al registro gráfico se le ha dado un status inframatemático. (Artigue, 1995).

Tal desarticulación tiene otras consecuencias pues, en el trabajo de los físicos o de los ingenieros, el punto de partida no siempre es una fórmula. En muchas ocasiones, en el desarrollo de la resolución de un problema físico o tecnológico, el profesional tiene como datos una serie de observaciones, en general representados como puntos de una gráfica. Esto determina que la habilidad de convertir representaciones del registro gráfico al algebraico, no sólo tiene importancia desde el punto de vista de la conceptualización, sino también desde el desarrollo de competencias necesarias para satisfacer el perfil profesional que se requieren en las carreras científico- tecnológicas.

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, donde fue desarrollado este trabajo, una de las unidades temáticas de la asignatura Álgebra es la referente a Números Complejos, de gran importancia conceptual y multiplicidad de aplicaciones en distintos quehaceres de la Física y la Ingeniería. Se caracteriza por su gran riqueza semiótica, por cuanto en el registro gráfico los Números Complejos pueden representarse en forma de puntos o de vectores en el plano y, en el registro algebraico pueden expresarse en forma de pares ordenados, en forma binómica o en forma polar; registros que posteriormente, serán utilizados por los alumnos en el estudio de espacios vectoriales, variedades lineales en el plano R^2 y curvas planas descriptas en coordenadas cartesianas y polares.

En muchas ocasiones, los docentes observan que, en tareas que requieren un cambio de representación desde su forma binómica a su forma polar, los alumnos obtienen argumentos o módulos erróneos. Esto pone en evidencia que estos alumnos no emplean el registro gráfico como soporte inicial en la resolución, pues si utilizaran una representación gráfica advertirían su error. A su vez puede constatarse que en las guías de trabajos prácticos de la mencionada asignatura se presentan a los estudiantes numerosos ejercicios donde deben operar tomando como punto de partida el registro algebraico y representar algunos de sus resultados en el registro gráfico. Sin embargo, no se proponen actividades de aula que planteen la conversión en el sentido inverso.

Tampoco aparecen actividades de caracterización de representaciones gráficas de Números Complejos en la bibliografía recomendada.

Tomando en cuenta las anteriores consideraciones, y el antecedente de enseñanza de conversiones en otros trabajos, como el realizado en esta Universidad relativo a los registros coloquial y simbólico (Distéfano, Urquijo, y Gonzalez de Galindo, 2010), cabe preguntarse si la conversión de representaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico debe constituirse en un saber a enseñar. En este trabajo se presentan parte de los resultados de una investigación, realizada en el marco de una tesis para optar por el título de Magister en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior[1], que indaga sobre dicho interrogante, a partir del diseño, implementación y evaluación de la efectividad de una secuencia didáctica.

A continuación se describen las ideas centrales del marco teórico que sustenta este trabajo.

2. Marco teórico

Esta propuesta se fundamenta en la Teoría de Registros Semióticos de Raymond Duval (1998, 2004). En la misma sostiene que la naturaleza de los objetos matemáticos hace que no se pueda acceder a ellos si no es a través de sus representaciones semióticas en sus distintos registros (numérico, algebraico, gráfico, simbólico); es por ello que tales representaciones juegan un rol fundamental en la construcción del conocimiento matemático.

Esta teoría sostiene que las representaciones semióticas no son solamente los medios de exteriorización de representaciones mentales a los fines de la comunicación, sino que son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Si bien es comúnmente aceptado que al comprender o conocer un objeto, un sujeto es capaz de representarlo con algún símbolo o grafismo, Duval (1998, 2004) afirma que no hay **noesis** (aprehensión conceptual de un objeto) sin **semiosis** (o aprensión o producción de una representación semiótica) afirmando su inseparabilidad.

Distingue tres tipos de actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la **formación** de una representación identificable como registro, el **tratamiento** como la transformación de una representación en otra en el interior del registro donde fue creada, y, la más importante, la **conversión**, que implica la transformación de una representación dada en un registro en otra representación en un registro diferente.

Sobre la construcción de conceptos matemáticos, Duval (1998, 2004) establece que dado que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, se debe considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para la formación del concepto.

Particularmente, la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los alumnos y, con frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales. Esto se debe al fenómeno de **no congruencia** entre representaciones, que se produce cuando la conversión no resulta transparente pues no pueden ponerse en correspondencia unívoca los elementos que las constituyen.

La conversión entre dos representaciones semióticas planteadas en distintos registros, no presenta el mismo nivel de dificultad al cambiar el sentido de la conversión. Así, en general, es más utilizada y más sencilla, la conversión de fórmulas del registro algebraico al registro gráfico que la tarea de hallar, para una representación gráfica, la fórmula o ecuación que la representa en el registro algebraico. El trabajar mayoritariamente desde el registro algebraico al gráfico, es una tendencia que puede observarse en general en los libros de texto de álgebra y en los planteos didácticos del área.

Dado que la conversión desde el registro gráfico al algebraico es, en general, no congruente, Duval (1998, 2004) propone que se diseñen para el alumno actividades en la que los mismos puedan distinguir las unidades significantes en el registro de partida y sus concomitantes en el de llegada llamadas tareas de variaciones comparativas.

3. Metodología de la Investigación

El presente trabajo se desarrolló en el ámbito de la asignatura Álgebra A de la Carrera de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Tiene como objetivo general explorar los resultados de la implementación de una intervención didáctica orientada a favorecer la producción de conversiones no congruentes desde el registro gráfico al algebraico, en el tema Números Complejos. Para su consecución se planificaron las siguientes acciones:

-Diseño de un cuestionario como instrumento para medir la habilidad de efectuar conversiones no congruentes desde el registro gráfico al registro algebraico en conjuntos de Números Complejos

-Elaboración de una secuencia didáctica para favorecer la adquisición de la habilidad de efectuar conversiones no congruentes desde el registro gráfico al registro algebraico en conjuntos de Números Complejos.

- Selección de dos grupos de alumnos de la cohorte 2010 que cursaran la materia Álgebra. En uno de los cuales se aplicó la secuencia didáctica, y el otro fue de control.

- Administración del instrumento diseñado, en ambos grupos, a manera de pre-test, luego del desarrollo en las clases prácticas de abundante ejercitación de representaciones gráficas de conjuntos de números complejos expresados con condiciones algebraicas.

[1] Universidad Nacional de Tucumán

- Implementación de la secuencia didáctica en uno de los grupos.
- Administración del instrumento de evaluación en ambos grupos, a manera de post-test, después de la secuencia didáctica.
- Comparación de los datos obtenidos en ambos grupos, en base al instrumento y a los puntajes obtenidos en los ítems correspondientes al tema Números Complejos de la evaluación parcial de la asignatura.

Estas acciones estuvieron condicionadas por algunas limitaciones originadas en las características de la asignatura y del ámbito institucional. Entre ellas puede mencionarse que, por una parte, en el cronograma de la materia la unidad de Números Complejos es la última a desarrollar previa a la evaluación y, en particular los temas vinculados con representaciones gráficas ubicados en la etapa final del curso. Por otra parte, la escasa disposición de aulas obstaculizó la programación de tareas en horarios o espacios adicionales a los ya otorgados a la asignatura. Lo antedicho restringió el tiempo y el ámbito de implementación de la secuencia didáctica a una clase de 2 horas dentro de las prácticas programadas en la materia. Esto determinó la metodología de conformación de los grupos que fue no aleatoria.

3.1. El instrumento de evaluación

Se trabajó con un cuestionario constituido por seis ítems. En cada ítem se presentó a los alumnos la representación gráfica de un conjunto de complejos con una característica común sobre el módulo, la parte real o el argumento tomando, en los tres casos, un único valor o un rango de valores. Esta característica común es la unidad significante que los estudiantes debieron identificar en cada caso, para luego expresarla en forma de una ecuación o una inecuación en el lenguaje algebraico. Los ítems estuvieron estructurados de manera tal que se evalúan las conversiones tomando representaciones donde la unidad significante a identificar es el módulo en el caso de los ítems (a) y (d), el argumento, en los ítems (c) y (e) y la parte real, en los ítems (b) y (f). Los gráficos correspondientes a cada ítem fueron ubicados en el instrumento de modo tal que no hubiera un orden que le sugiriera al alumno la unidad significante a identificar. A cada ítem se le asignó un puntaje de 1 (uno) punto; en consecuencia el puntaje máximo total obtenible en el instrumento es de 6(seis) puntos.
Para comprobar la validez de contenido del instrumento, es decir, la existencia de una adecuada correspondencia entre la habilidad de realizar las conversiones en el sentido gráfico-algebraico, y los ítems propuestos en el instrumento, se recurrió al juicio de profesores titulares de asignaturas del área Álgebra de la Universidad Nacional de Mar del Plata, en calidad de expertos.

Para determinar la confiabilidad, el instrumento fue administrado en una cohorte anterior, obteniéndose un coeficiente Alfa de Cronbach de 0,776.

Es importante señalar que al momento de la instancia pre-test, si bien los alumnos habían resuelto, en la guía de trabajos prácticos, numerosos ejercicios que implicaban conversiones desde el registro algebraico al registro gráfico, no habían recibido ninguna formación específica en lo referido a la identificación de las unidades significantes en representaciones gráficas de conjuntos de números complejos para expresarlas a través de una condición, en forma binómica o en forma polar, en el registro algebraico.

A modo de ejemplo, se presentan dos de los ítems del instrumento. En el Gráfico 1, correspondiente al ítem (a) del instrumento, se representan números complejos caracterizados por un único valor sobre el módulo; en el Gráfico 2, correspondiente al ítem (e) los complejos representados están caracterizados por los valores que toman sus argumentos dentro de un rango acotado.

Ítem (a)

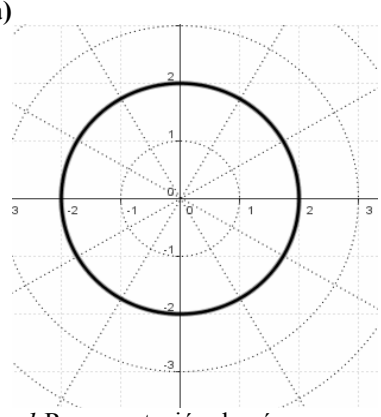
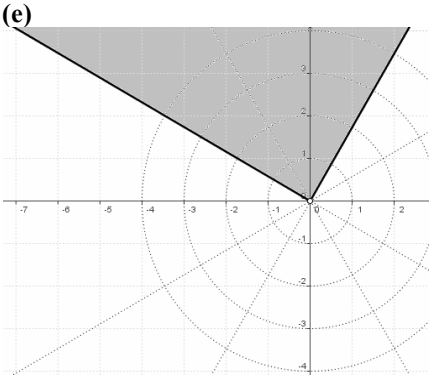


Gráfico 1. Representación de números complejos cuyos módulos toman un único valor fijo

Ítem (e)



Observación: 0+0i está excluido

Gráfico 2. Representación de números complejos cuyo argumento toma un rango de valores acotados

3.2. Hipótesis

En relación al objetivo de explorar en los alumnos que cursan la asignatura Álgebra A, los resultados de la implementación de una intervención didáctica orientada a favorecer la producción de conversiones no

congruentes desde el registro gráfico al algebraico, en el tema Números Complejos se planteó la siguiente hipótesis general:

> *La conversión de representaciones semióticas de conjuntos de números complejos del registro gráfico al algebraico puede constituirse en un saber a enseñar, para favorecer la habilidad de efectuarlas y mejorar la gestión de los elementos de este campo numérico.*

En esta comunicación se presentan los resultados relativos a una de las hipótesis específicas planteadas:

> *Los alumnos que participen de la intervención educativa orientada a la adquisición de la habilidad de efectuar conversiones no congruentes desde el registro gráfico al registro algebraico, tendrán una manifestación de la misma significativamente superior al de aquellos que no participan de tal intervención.*

La variable independiente en este estudio es la intervención educativa, materializada en la secuencia didáctica a la que estuvo expuesto uno de los grupos. La variable dependiente es la habilidad de realizar conversiones desde registro gráfico al registro algebraico, operativizada a través de los puntajes obtenidos en el Post-Test.

Se seleccionaron dos comisiones de práctica, en las cuales se administró el instrumento, a manera de Pre-Test, al concluir el estudio de los temas vinculados a representaciones gráficas. En una de ellas se desarrolló la secuencia didáctica diseñada. Posteriormente, en ambas comisiones se administró el mismo instrumento a manera de Post-Test. El hecho de que la asignación de los individuos a las condiciones experimentales (participar o no en el desarrollo de la secuencia didáctica) no fue realizada al azar determina que éste sea un diseño de tipo cuasi-experimental, específicamente un diseño pre-post con grupo de cuasi control (León y Montero, 1997).

Dado que, según León y Montero (1997), el efecto de selección puede constituir una amenaza a la validez interna del diseño, se compararon a ambos grupos, el experimental y el de cuasi-control, en dos variables: el puntaje obtenido por los alumnos en su examen de ingreso y el puntaje obtenido en el Pre-test. Comprobadas en ambas variables continuas, en ambos grupos, su distribución normal y homocedasticidad, se compararon sus medias a través de la prueba t de Student. Planteando en ambos casos como hipótesis nula la igualdad entre las medias correspondientes en el grupo experimental y el grupo cuasi-control, con un nivel de confianza del 95%, se obtuvo, en el caso de la variable puntaje obtenido en el examen de ingreso un valor $p=0,928$ y, en el caso de la variable puntaje obtenido en el Pre-Test un valor $p=0,821$. Como los valores p obtenidos son mayores que 0,05 en los dos test, no existen evidencias que permitan rechazar las respectivas hipótesis nulas. Esto conduce a que los grupos puedan considerarse homogéneos, tanto desde el punto de vista de sus conocimientos generales previos de matemática, evaluados en el examen de ingreso, como de sus conocimientos específicos en cuanto a conversiones de representaciones gráficas de números complejos.

Luego de desarrollarse en el grupo experimental la secuencia didáctica, en ambos grupos se administró nuevamente el instrumento a manera de Post-test.

Se pudieron obtener datos completos en 20 alumnos del grupo experimental y 23 alumnos del grupo de cuasi-control.

4. La secuencia didáctica

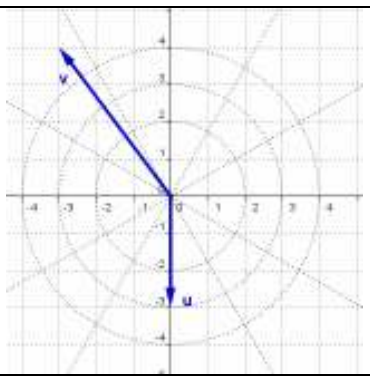
La secuencia didáctica tuvo como objetivo favorecer en los alumnos la detección de las unidades significantes en conjuntos de números complejos representados gráficamente para su posterior caracterización, expresada en forma de ecuaciones o inecuaciones, en el registro algebraico. Fue diseñada teniendo en cuenta tanto las recomendaciones de R. Duval (1998, 2006) acerca de tareas de variaciones comparativas, como los datos cualitativos relevados de la administración del test en la cohorte 2009 (Aznar, Distéfano, Massa, Figueroa y Moler, 2010).

La estructura de la misma está compuesta por cuatro actividades. Una de las variables didácticas que las caracterizan es el cardinal del conjunto de complejos representado, iniciando en cardinal igual a 1, luego conjuntos finitos y finalizando con conjuntos infinitos.

Para la resolución de la actividad inicial, los alumnos deben hacer conversiones congruentes desde el registro gráfico al algebraico para identificar los complejos representados, luego deben efectuar tratamientos para obtener el complejo z resultado de la expresión dada. El enunciado de la misma y dos de sus incisos se muestran en la Figura 1.

Actividad I: A continuación se grafican números complejos u, v representados como vectores. El complejo z es el resultado de una operación entre u y v, o de una función aplicada a u. Identificar en forma exacta al complejo z (en forma binómica o polar) y representar gráficamente el complejo z de acuerdo a la operación o función planteada.

a) $z = u + v$



b) $z = u \cdot v$

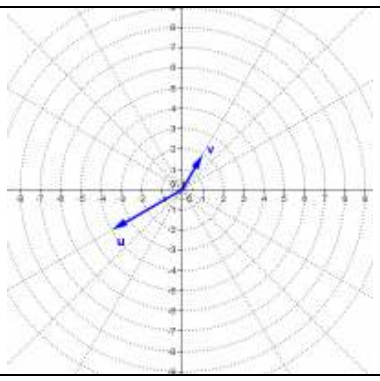
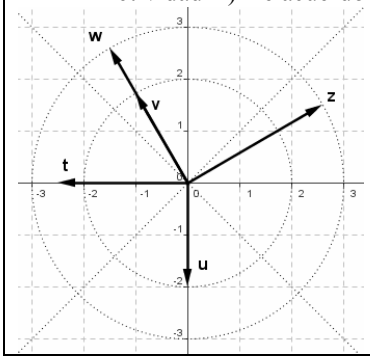


Figura 1: Enunciado de la Actividad I y dos de sus incisos

En la Actividad II, se representan una serie de complejos y se pide completar las expresiones algebraicas para caracterizarlos. Los alumnos deben convertir la relación gráfica a una relación expresada en lenguaje algebraico completando una línea punteada. El enunciado de la misma puede observarse en la Figura 2.

Actividad II) De acuerdo al gráfico, completa con >, < o = según corresponda:

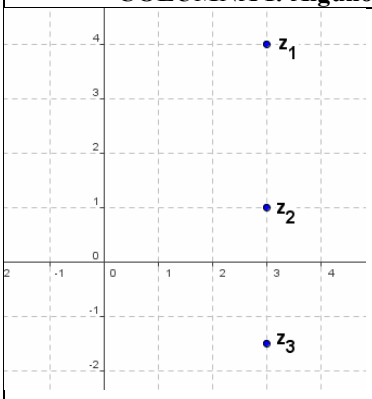
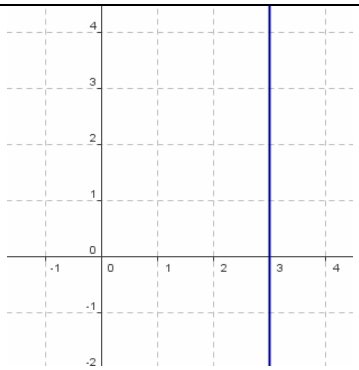


a) Arg(z)……Arg(w)
b) Re(v) .....Re(w)
c) Arg(z)…… $\frac{1}{4}\pi$
d) Im(z) .....Im(w)
e) Arg(w)…… $\frac{1}{2}\pi$
f) | z |…… | w |
g) Arg(z)……..Arg(-3)
h) | t | ……2
i) Arg(v) ……..Arg(w)

Figura 2: Enunciado de la Actividad II

En la Actividad III se presentan, en dos columnas, conjuntos de complejos caracterizados por la misma condición. En la columna de la derecha aparece el conjunto representado con infinitos elementos, en la columna de la izquierda aparece un subconjunto finito del mismo conjunto. El objetivo es que, al identificar los complejos dados en la columna de la izquierda, el alumno pueda conjeturar, mediante un razonamiento de tipo inductivo, la propiedad que los caracteriza, a partir de la variación comparativa entre los distintos complejos graficados y sus representaciones aritméticas. En la Figura 3, se muestra el enunciado y uno de los incisos de esta actividad.

Actividad III) En la columna 1 se representan algunos complejos que comparten alguna característica (puede ser sobre su parte real, su parte imaginaria, su módulo y/o su argumento principal). En la columna 2, se representan infinitos complejos z que poseen esa misma característica. Escribir, en cada inciso, la expresión que los determina de acuerdo con la característica común.

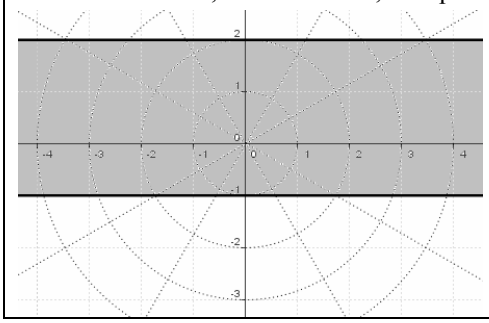
COLUMNA I: Algunos Complejos	**COLUMNA II: Infinitos Complejos**
	

a) .....

Figura 3: Enunciado de la Actividad III y uno de sus incisos.

Finalmente, en la Actividad IV, ya sin el apoyo del subconjunto finito de complejos proporcionado en la actividad anterior, se solicita la conversión de la condición del conjunto infinito de complejos representados en el registro gráfico, al lenguaje algebraico como ecuación o inecuación (Figura 4).

Actividad IV) Se representan conjuntos infinitos de números complejos *z* que poseen características comunes. Escribir, en cada inciso, la expresión que los determina de acuerdo con esa/s característica/s.



a) ----------

Figura 4: Enunciado de la Actividad IV y uno de sus incisos.

Puede observarse que la completitud de las expresiones en el registro algebraico está graduada, apareciendo completas en la Actividad I, parcializadas en la Actividad II para que el alumno las complete y totalmente a cargo del alumno en las Actividades III y IV. Esto se hizo en función de observaciones hechas en exploraciones anteriores (Aznar, Distéfano, Figueroa y Moler, 2010) en las que fue detectado que, en algunos casos, los alumnos, a pesar de poder identificar la unidad significante que caracterizaba al conjunto (módulo, argumento, parte real o parte imaginaria), no lograban expresarlo correctamente en el registro del lenguaje algebraico.

La configuración didáctica con la que fue implementada esta secuencia es de tipo dialógica; para cada inciso, se les dio a los alumnos un tiempo para exploración del mismo, que podían efectuar de forma individual o grupal y luego se realizó en pizarrón la corrección general en un diálogo entre alumnos y docente. "La institucionalización (regulación) tiene lugar mediante un *diálogo contextualizado* entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución". (Godino, Contreras, Font, 2006, p. 21). El material impreso sobre el que trabajaron los alumnos fue repartido al inicio de la intervención y retirado al finalizarla para realizar una evaluación de lo escrito durante la misma; por este motivo los alumnos no tuvieron a su disposición un medio para hacer posteriormente tareas de repaso o fijación.

5. Resultados

Un primer resultado fue detectado al observar los puntajes obtenidos, por ambos grupos, en el pre-test, sin diferencias estadísticamente significativas entre ellos. En el caso del grupo seleccionado para participar de la secuencia didáctica, la media obtenida fue de 2,95 puntos y, en el caso del grupo de cuasi-control, de 3,26 puntos, que representan aproximadamente el 50% de los 6 puntos del test.

Otro hecho a destacar, fue la detección de algunos conflictos semióticos[2] durante el desarrollo de la secuencia didáctica, manifestados en el error de algunos alumnos en la identificación de la *unidad significante* que caracterizaba al gráfico propuesto. Así, para un gráfico con características similares al observado en el gráfico 2, un alumno planteó que la expresión en el lenguaje algebraico sería Im(z)>0 que, si bien era una característica que poseían los elementos del conjunto seleccionado, abarcaba a otros complejos no graficados y por lo tanto no se constituía en la unidad significante que los determinaba; esta confusión que pudo ser expuesta y aclarada en la corrección es una manifestación del fenómeno de no congruencia en este tipo de conversiones.

Para poder establecer el impacto de la intervención se consideraron los datos de las variables numéricas *puntaje en el Post-Test* (con valores entre 0 y 6) y *Diferencia entre los puntajes de Post-test y Pre-test* (con valores entre -6 y 6) y, en base a los valores de ésta última variable, se definió una variable categórica llamada *Cambios en la habilidad de conversión*. En los casos en que esta diferencia dio valores positivos, se le asignó la categoría "Evolución" considerándola como indicador de un aprendizaje relativo a esta habilidad; si la diferencia dio valor 0, se le asignó la categoría "Neutro" señalando el indicio de que no hubo variación en las habilidades con que el alumno contaba al inicio de la experiencia y, en el caso de tener valores negativos, la categoría asignada fue "Involución" y su aparición se podría suponer como consecuencia de una resolución arbitraria o azarosa del test, sin aplicación de los conocimientos. Los valores en ambos grupos fueron comparados utilizando el paquete estadístico SSPS versión 15.0.

Para decidir las pruebas a utilizar para realizar las comparaciones en las variables numéricas en ambos grupos, se aplicó la prueba de. Kolmogorov – Smirnov y se constató que, para las dos variables, en ambos

[2] Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). (Godino et al, 2008)

grupos, sus distribuciones son semejantes a la distribución normal. En cuanto a la homocedasticidad entre los grupos, pudo corroborarse para la variable Diferencia entre Post-test y Pre-test pero no para la variable Post-Test. Esto determinó la lectura de valores p, no asumiendo varianzas iguales, en este último caso.

Las medias obtenidas en el Post-Test fueron 4,92 y 3,47 para el grupo experimental y el cuasi-control respectivamente. La aplicación de la Prueba t de Student, con un nivel de significancia del 5% arrojó un valor $p=0,006<0,05$ lo cual permite rechazar la hipótesis de igualdad de medias y concluir que existen diferencias significativas entre los grupos. De esto puede deducirse que el grupo experimental tuvo un mejor desempeño en la resolución de conversiones planteadas en el Post-test.

Las medias obtenidas en la Diferencia entre Post-Test y Pre-test fueron 1,67 y 0,52 para el grupo experimental y el cuasi-control respectivamente. La aplicación de la Prueba t de Student, con un nivel de significancia del 5% arrojó un valor $p=0,023<0,05$ lo cual permite rechazar la hipótesis de igualdad de medias y concluir que existen diferencias significativas entre los grupos. Puede inferirse que el grupo experimental tuvo una mejor evolución en la resolución de conversiones propuestas en el test. Esto último también puede corroborarse al comparar la proporción de casos de las categorías de la variable cambios en la habilidad de conversión, en ambas comisiones descriptas en la tabla de contingencia Tabla 1.

		Cambios en Habilidades de Conversión			Total
		Evolución	Involución	Neutro	
Situación de comisión	Intervenido	16	1	3	20
	No Intervenido	10	8	5	23
Total		26	9	8	43

Tabla 1. Tabla de Contingencia entre las variables categórica Situación de comisión y Cambios en habilidades de conversión

Al considerar la hipótesis de existencia de una relación entre las proporciones halladas en los cambios en las habilidades de conversión y la participación en la secuencia didáctica, la aplicación de la prueba Chi-cuadrado arrojó un valor $p=0.028<0.05$; esto permite rechazar la hipótesis de que la proporción de casos para cada categoría de la variable cambios en las habilidades de conversión sea independiente del hecho de haber participado o no en la secuencia didáctica.

Análisis de los resultados

Los puntajes obtenidos por los dos grupos de alumnos en el pre-test permiten tener una medición de la habilidad de realizar conversiones, desde el registro gráfico al algebraico, que los mismos poseían en la etapa final del estudio de la unidad de números complejos. Tomando en cuenta que el puntaje máximo del test es de 6 puntos puede considerarse que, a pesar de que los alumnos habían realizado numerosas ejercitaciones donde debían realizar conversiones de representaciones de números complejos expresadas en el registro algebraico al registro gráfico, estas ejercitaciones no fueron suficientes para la obtención de resultados satisfactorios (apenas el 50%) en las tareas de conversión de representaciones en el sentido inverso, requeridas en el test.

Respecto de la secuencia didáctica, los datos numéricos inclinan a pensar que, a pesar de que la misma fue breve, tuvo un efecto favorecedor sobre la habilidad de realizar conversiones para los alumnos que participaron en la misma. Partiendo de condiciones iniciales similares en ambos grupos, evidenciadas en la homogeneidad en el Pre-test y en el examen de Ingreso, pudo observarse una mayor proporción de alumnos que evolucionaron positivamente en esta habilidad en el grupo intervenido, como así también en la mayor proporción de alumnos con efecto neutro en los no intervenidos. Esto convalida la afirmación de Duval (1998,2004) acerca de la naturaleza no espontánea de la habilidad de realizar conversiones, cuando éstas resultan no congruentes.

Conclusiones

La habilidad de caracterizar representaciones gráficas mediante expresiones algebraicas es una competencia necesaria para la resolución de problemas y para la conceptualización de los objetos matemáticos implicados. A partir de esta consideración, en esta investigación se planteó la posibilidad de darle a esta habilidad el estatus de objetivo pedagógico en el contexto de conjuntos de Números Complejos, estudiando su factibilidad. Para ello fue proyectada una secuencia didáctica específica, en base a los aportes de la Teoría de Registros Semióticos de Raymond Duval (1008,2004), que se implementó en uno de los grupos estudiados; también fue diseñado y validado un cuestionario utilizado como instrumento para evaluar dicha habilidad, el cual se administró a ambos grupos de alumnos, antes y después del trabajo con dicha secuencia con uno ellos.

Los datos empíricos obtenidos son propicios a la idea de que esta habilidad de conversión no resulta trivial para los alumnos, en coincidencia con las afirmaciones de Duval (2004). Esto la posiciona como un posible objetivo de enseñanza.

Los resultados muestran los efectos favorables que tuvo la secuencia didáctica sobre esta habilidad en los alumnos que participaron de la misma. Estos alumnos revelaron haber evolucionado en su habilidad de efectuar las conversiones objeto de esta investigación, en una proporción significativamente mayor que la del otro grupo. Dado que en educación, como en cualquier otra área laboral que requiera una cuidadosa planificación, el establecimiento de cualquier objetivo se encuentra determinado por la relación entre el costo y el beneficio que este objetivo pudiera ofrecer, se impone la necesidad de contemplar esta relación. En este caso se evidenció esta relación como conveniente al mostrar la posibilidad de desarrollar una secuencia de enseñanza en tiempos didácticos relativamente breves.

Cabe preguntarse cuáles serían los resultados obtenidos aplicando modificaciones a la experiencia. Una variación posible sería proporcionar a los alumnos el material utilizado para repasar lo desarrollado en la intervención. Otra modificación, ya ligada al orden de desarrollo de los temas dentro de la asignatura, provendría del hecho de que, si en lugar de estudiarse la representación en forma polar y las representaciones gráficas de conjuntos de complejos al final del estudio de la unidad, se ubicaran al principio de la misma, la secuencia podría abarcar otra clase más y ser vinculada a la conjetura de propiedades de los números complejos, con la ayuda de algún software de geometría dinámica.

Referencias Bibliográficas

ARTIGUE, M.(1995) *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos* en (compiladores) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas pp 97-140 Mexico. Grupo Editorial Iberoamerica.

AZNAR, M.A., DISTÉFANO, S., FIGUEROA, S. MOLER, E. (2010) *Análisis de conversiones entre Representaciones Semióticas de Números Complejos*. Memorias de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática (III REPEM). Facultad de Cs. Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa.

DE GUZMÁN, M. (1997) *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático. Elementos básicos del análisis*. Ediciones Pirámide, Madrid

DISTÉFANO, M.L., URQUIJO, S., GONZALEZ DE GALINDO, S. (2010) *Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico* en UNIÓN Revista Interamericana de Educación Matemática, Número 23, páginas 59-70. Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM). Recuperado de http://www.fisem.org/descargas/23/Union_023010.pdf octubre de 2010.

DUVAL, R. (1998) *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En Hitt, F. (Ed), Investigaciones en Matemática Educativa II (pp.173-201) Grupo Editorial Iberoamérica, México

DUVAL, R. (2004) *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y aprendizajes Intelectuales.* Universidad del Valle, Instituto de Ecuación y Pedagogía Grupo de Educación Matemática, Cali, Colombia

DUVAL, R. (2006) Un tema crucial para la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación en La Gaceta de la RSME, Vol 9.1 (pp 143-168)

FONT, V., GODINO, J. D. Y D'AMORE, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. [Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 2007]. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

GODINO, J. D., CONTRERAS, A. Y FONT, V. (2006). *Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática*. Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26 (1): 39-88.

GODINO, J. D., BATANERO, C., FONT, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Versión ampliada del artículo: Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), 127-135. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino

HITT, F. (2001) *El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática*, en Gomez, P. y Rico, L. (Eds) Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. Editorial Universidad de Granada, Granada, pp 165-177

HITT, F. (2003) *Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes conTecnología* , Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 (pp 213-222)

LEÓN, O., MONTERO, I. (1997) *Diseño de Investigaciones. Introducción a la lógica de la investigación en Psicología y Educación*. Editorial McGraw-Hill. Buenos Aires.