METODO DEL DISPARO PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Angel Queizan (*)
Emanuel Comin (**)
Ezequiel Garcia de Santos (***)
Luis Godoy (***)
(*) UTN. Regional La Plata. Dpto. de Mecánica. Profesor Cálculo Avanzado. aqueizan@frlp.utn.edu.ar
UCALP. Universidad Católica de La Plata. Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
UNLP. Universidad Nacional de La Plata
(**) UTN. Regional La Plata. Dpto. de Mecánica. Ayudante Cálculo Avanzado. orence_eco@hotmail.com
(***) UTN. Regional La Plata. Dpto. de Mecánica. Alumnos .

Área Temática: Aplicaciones de la Matemática
Palabras Claves: Método del disparo. Problemas de borde. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Newton

Resumen: En este trabajo desarrollamos una técnica que nos permite resolver problemas de borde de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. El método es un proceso iterativo el cual consiste en una secuencia de problemas de valor inicial en los cuales vamos modificando la condición inicial referente a la pendiente.

a) Introducción:

Este trabajo consta de dos etapas, en la primera describimos el método de disparo aplicado a ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y en la segunda analizamos el caso particular de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes para el cual el esquema iterativo se convierte en un esquema directo.

b) Desarrollo del método del disparo para problemas de borde no lineales:

Consideremos el problema de frontera de segundo orden no lineal:

$$\begin{aligned} &y'' = f(x, y(x), y'(x)) \qquad a \le x \le b \\ &y(a) = \alpha \\ &y(b) = \beta \end{aligned} \qquad (1)$$

Al ser no lineal, no se puede expresar la solución de este problema como una combinación de soluciones de problemas de valor inicial, en este caso vamos a obtenerla mediante una sucesión de soluciones de problemas de valor inicial, cada vez mas aproximadas, asociadas a un parámetro t_k el cual es modificado en cada iteración. El problema correspondiente a la k-esima iteración es:

$$\begin{aligned} &y'' = f(x, y(x), y'(x)) \qquad a \le x \le b \\ &y(a) = \alpha \\ &y'(a) = t_k \end{aligned} \qquad (2)$$

donde queremos que la sucesión quede definida de manera tal que

$$\lim_{k \to \infty} y(x = b, t_k) = y(b) = \beta \qquad (3)$$

lo cual nos va a garantizar la convergencia del método.

Comenzamos con parámetro t_0, el cual es la pendiente de la recta que une los puntos $A : (x = a, y(a) = \alpha)$ y $B : (x = b, y(b) = \beta)$, y hallamos la solución del siguiente problema de valor inicial.

$$\begin{aligned} &y'' = f(x, y(x), y'(x)) \qquad a \le x \le b \\ &y(a) = \alpha \\ &y'(a) = t_0 \end{aligned} \qquad (4)$$

luego analizamos si $y(x = b, t_0)$ está suficientemente cerca de β, y vamos corrigiendo la pendiente inicial sucesivamente hasta que $y(b, t_k)$ k=1,2,3 está bastante cerca de β.

Para determinar los parámetros t_k, suponemos el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &y'' = f(x, y(x,t), y'(x,t)) \qquad a \le x \le b \\ &y(a) = \alpha \\ &y'(a) = t_0 \end{aligned} \qquad (5)$$

y si $y(x,t)$ es su solución, entonces el problema consiste en determinar el valor de t tal que se cumpla la siguiente ecuación

$$y(b,t) - \beta = 0 \qquad (6)$$

Esta última expresión es una ecuación no lineal en t, para su resolución podemos usar diferentes métodos, entre los cuales podemos citar:

- Método de la secante
- Método de Regula-Falsi
- Método de bisección
- Método de Newton

En este trabajo usaremos la metodología de Newton para calcular la raíz de la ecuación (6), en este caso la fórmula recursiva de Newton queda expresada por:

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y\left(P_{k-1}\right) - \beta}{\left. dy/dt \right|_{P_{k-1}}} \qquad (7)$$

donde el punto P_{k-1} tiene coordenadas $(x = b, t = t_{k-1})$. En la formula recursiva (7) requerimos el cálculo de $\left. dy/dt \right|_{P_{k-1}}$, y para ello vamos a considerar el siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &y''(x,t) = f(x, y(x,t), y'(x,t) \qquad a \le x \le b \\ &y(x = a, t) = \alpha \qquad (8) \\ &y'(x = a, t) = t \end{aligned}$$

en el cual suponemos que la solución es función de x y de t.

Derivando la ecuación diferencial (8) respecto a la variable t, conservando la notación prima para indicar las derivadas con respecto a x, tenemos

$$\frac{d}{dt}[y''] = \frac{\partial}{\partial t}\left[f(x, y(x,t), y'(x,t)) \right] = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial t} \qquad (9)$$

Y además como la variable x y t son independientes tenemos que $\partial x / \partial y = 0$, entonces la ecuación (9) queda expresada de la forma

$$\frac{dy''}{dt} = \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y(x,t), y'(x,t))]\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y'}[f(x, y(x), y'(x))]\frac{\partial y'}{\partial t} \qquad a \le x \le b \qquad (10)$$

Siendo sus condiciones iniciales

$$\frac{d}{dt}\left\{ y(x = a, t) \right\} = \frac{d}{dt}[\alpha] = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{d}{dt}\left\{ y'(x = a, t) \right\} = \frac{d}{dt}[t] = 1 \;\rightarrow\; \frac{\partial y'}{\partial t} = 1 \qquad (12)$$

Y haciendo que

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = Z(x,t) \qquad (13)$$

Y derivando la expresión (13) respecto de x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ Z(x,t) \right\}$$

y además suponiendo que el orden de derivación de x y de t puede invertirse, nos queda

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ Z(x,t) \right\} \;\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}\left\{ y'(x,t) \right\} = Z'(x,t) \qquad (14)$$

Y derivando nuevamente la expresión (14) respecto de *x* y haciendo la misma hipótesis, nos queda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left\{ y'(x,t) \right\} \right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ Z'(x,t) \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left\{ y'(x,t) \right\} \right\} = Z''(x,t) \qquad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{ y''(x,t) \right\} = Z''(x,t)$$

Remplazando (15), (14) y (13) en la ecuación (12) y teniendo en cuenta las condiciones iniciales (11) y (12), nos queda

$$\left.\begin{aligned} Z''(x,t) &= \frac{\partial f}{\partial y} Z(x,t) + \frac{\partial f}{\partial y'} Z'(t) \\ \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{\substack{x=a \\ t=t}} &= Z(x=a,t) = 0 \\ \left.\frac{\partial y'}{\partial t}\right|_{\substack{x=a \\ t=t}} &= Z'(x=a,t) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Vemos que la expresión (16) es una ecuación diferencial de 2º orden, cuya solución es $Z(x,t)$. La ecuación diferencial de 2º orden se puede expresar como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden, haciendo

$$Z_1(x,t) = Z'(x,t) \quad \rightarrow \quad Z'_1(x,t) = Z''(x,t) \qquad (17)$$

Remplazando (17) en (16) nos queda el siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\left.\begin{aligned} \frac{dZ_1}{dx}(x,t) &= \frac{\partial f}{\partial y} Z(x,t) + \frac{\partial f}{\partial y'} Z_1(x,t) \\ \frac{dZ}{dx}(x,t) &= Z_1(x,t) \\ Z(x=a,t) &= 0 \\ Z'(x=a,t) &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones diferenciales obtenemos $Z(x,t)$ y $Z_1(x,t) = Z'(x,t)$, además por (13) sabemos que

$$\frac{dy}{dt}(x,t) = Z'(x,t) = Z_1(x,t)$$

entonces la expresión de la derivada evaluada en el punto $(x=b, t=t_{k-1})$, requerida por el método de Newton en la formula (7), está dada por

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{p_{k-1}} = Z_1(x=a, t=t_{k-1})$$

donde el punto siendo P_{k-1} tiene coordenadas $(x=b, t=t_{k-1})$.

En resumen vemos que al aplicar la metodología de la técnica de disparo tenemos que resolver dos problemas de valor inicial, asociados a dos ecuaciones diferenciales de segundo orden independientes entre si, para luego poder realizar una actualización de la pendiente t_k haciendo uso de la metodología de Newton.

Problema 1:

$$\left.\begin{aligned} & y'' = f(x, y(x), y'(x)) \\ & a \le x \le b \\ & y(x=a) = \alpha \\ & y(x=a) = t_k \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Problema 2:

$$\left.\begin{aligned} & z''(x,t_k) = \frac{\partial f}{\partial y} z(x,t_k) + \frac{\partial f}{\partial y'} z'(x,t_k) \\ & a \le x \le b \\ & z(x=a, t=t_k) = 0 \\ & z'(x=a, t=t_k) = 1 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Actualización de la pendiente t_k

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y(x=b, t=t_k) - \beta}{z(x=b, t=t_k)} \qquad (21)$$

Para la resolución de los problemas 1 y 2 aplicamos la formulación clásica de Runge Kutta de 4to orden, para lo cual cada una de las ecuaciones diferenciales asociadas a los problemas 1 y 2 las tenemos que expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, quedándonos entonces:

Para el problema 1, nos queda

$$\left.\begin{array}{c} y''=f(x,y(x),y'(x)) \\ y(x=a)=\alpha \\ y'(x=a)=t_k \\ a\le x\le b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{dy_1}{dx}=f(x,y(x),y_1(x)) \\ \dfrac{dy}{dx}=y_1 \\ y(x=a)=\alpha \\ y_1(x=a)=t_k \\ a\le x\le b \end{array}\right. \qquad (22)$$

Donde sabemos que $y_1 = y' \;\rightarrow\; y_1' = y''$

Para el problema 2, nos queda

$$\left.\begin{array}{c} z''(x,t_k)=\dfrac{\partial f}{\partial y}z(x,t_k)+\dfrac{\partial f}{\partial y}z'(x,t_k) \\ z(x=a,t=t_k)=0 \\ z'(x=a,t=t_k)=1 \\ a\le x\le b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{dz_1}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial y}z(x,t_k)+\dfrac{\partial f}{\partial y'}z_1(x,t_k) \\ \dfrac{dz}{dx}=z_1 \\ z(x=a,t=t_k)=0 \\ z_1(x=a,t=t_k)=1 \\ a\le x\le b \end{array}\right. \qquad (23)$$

Donde sabemos que $z' = z_1 \rightarrow z'' = z'_1$.

Para resolver el problema 1 y 2 aplicamos el método numérico clásico de Runge Kutta de 4^{t0} orden, aplicado a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

Problema 1	Problema 2
$\dfrac{dy'}{dx}=f\left(x,y(x),y_1(x)\right)$ $\dfrac{dy}{dx}=y_1$ $y_1(x=a)=t_k \quad y(x=a)=\alpha$ $a\le x\le b$	$\dfrac{dz_1}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial y}z+\dfrac{\partial f}{\partial y'}z_1$ $\dfrac{dz}{dx}=z_1$ $z_1(x=a)=0 \quad z(x=a)=1$ $a\le x\le b$
Resolución numérica del problema 1	Resolución numérica del problema 2
$y_{i+1}=y_i+\dfrac{1}{6}\left(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}\right)$ $y1_{i+1}=y1_i+\dfrac{1}{6}\left(m_1^{(i)}+2m_2^{(i)}+2m_3^{(i)}+m_4^{(i)}\right)$ Donde los coeficientes están dados por: $k_1^{(i)}=h\,y1_i$ $m_1^{(i)}=h\,f(x_i,y_i,y1_i)$ $k_2^{(i)}=h\,(y1_i+\dfrac{1}{2}m_1^{(i)})$ $m_2^{(i)}=h\,f(x_i+\dfrac{h}{2},y_i+\dfrac{k_1^{(i)}}{2},y1_i+\dfrac{m_1^{(i)}}{2})$ $k_3^{(i)}=h\,(y1_i+\dfrac{1}{2}m_2^{(i)})$ $m_3^{(i)}=h\,f(x_i+\dfrac{h}{2},y_i+\dfrac{k_2^{(i)}}{2},y1_i+\dfrac{m_2^{(i)}}{2})$ $k_4^{(i)}=h\,(y1_i+m_3^{(i)})$	$z_{i+1}=z_i+\dfrac{1}{6}\left(r_1^{(i)}+2r_2^{(i)}+2r_3^{(i)}+r_4^{(i)}\right)$ $z1_{i+1}=z1_i+\dfrac{1}{6}\left(l_1^{(i)}+2l_2^{(i)}+2l_3^{(i)}+l_4^{(i)}\right)$ Donde los coeficientes están dados por: $r_1^{(i)}=h\,z1_i$ $l_1^{(i)}=h\left[\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right\|_{\substack{x_i\\y_i\\y1_i}} z_i+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right\|_{\substack{x_i\\y_i\\y1_i}} z1_i\right]$ $r_2^{(i)}=h\,(z1_i+\dfrac{l_1^{(i)}}{2})$ $l_2=h\left[\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right\|_{\substack{x_i+h/2\\y_i\\y1_i}}(z_i+\dfrac{r_1^{(i)}}{2})+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y'}\right\|_{\substack{x_i+h/2\\y_i\\y1_i}}(z1_i+\dfrac{l_1^{(i)}}{2})\right]$

$m_4^{(i)} = h\, f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, y1_i + m_3^{(i)})$	$r_3^{(i)} = h\,(z1_i + \frac{l_2^{(i)}}{2})$ $l_3^{(i)} = h\left[\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_{\substack{x_i + h/2 \\ y_i \\ y1_i}} (z_i + \frac{r_2^{(i)}}{2}) + \left.\frac{\partial f}{\partial y'}\right\|_{\substack{x_i + h/2 \\ y_i \\ y1_i}} (z1_i + \frac{l_2^{(i)}}{2})\right]$ $r_4^{(i)} = h\,(z1_i + l_3^{(i)})$ $l_4^{(i)} = h\left[\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right\|_{\substack{x_i + h \\ y_i \\ y1_i}} (z_i + r_3^{(i)}) + \left.\frac{\partial f}{\partial y'}\right\|_{\substack{x_i + h \\ y_i \\ y1_i}} (z1_i + l_3^{(i)})\right]$

Siendo :

- ✓ m es la cantidad de sub-intervalos en que discretizamos el dominio $[a,b]$.
- ✓ $h = (b-a)/m$ es la equidistancia de los valores sobre el eje x.
- ✓ $x_i = a + (i-1)\,h$ son los valores equidistantes sobre el eje x, siendo $i = 1,2,3,\ldots,m+1$
- ✓ $y(x=a) = \alpha$ es la condición de borde del problema original para $x = a$.
- ✓ $y(x=b) = \beta$ es la condición de borde del problema original para $x = b$.
- ✓ $y_1(x=a) = t_1$ → Condición inicial asociada al problema 1, la cual es propuesta inicialmente como la pendiente de la recta que une los puntos: $y(x=a) = \alpha$ y $y(x=b) = \beta$. La cual esta dada por
$$t_1 = (beta - alfa)/(b-a)$$
- ✓ $z_1(x=a) = 0$ es la condición inicial del problema 2 para $x = a$
- ✓ $z(x=a) = 1$ es la condición inicial del problema 2 para $x = a$

En el caso de ecuaciones diferenciales de segundo orden a coeficientes constantes vamos a demostrar que la expresión $y(x=b) - \beta = 0$ es lineal en la pendiente t_k propuesta en el punto inicial.

Teorema: Sea la ecuación diferencial de coeficientes constantes
$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\,\frac{dy}{dx} + q\,y = 0 \qquad y(x=a) = \alpha \qquad y(x=b) = \beta$$
Siendo la ecuación característica de la ecuación diferencial
$$\lambda^2 + p\,\lambda + q = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$
donde λ_1 y λ_2 son las raíces. La expresión $y(x=b) - \beta = 0$, esta dada según sean las raíces por:

Caso 1) Raíces reales y distintas $\lambda_1 \neq \lambda_2$ la expresión $y(x=b) - \beta = 0$, esta dada por
$$\left[\exp(\lambda_2(b-a)) - \exp(\lambda_1(b-a))\right] t_k + \alpha\left[\exp(\lambda_1(b-a)) - \exp(\lambda_2(b-a))\right] - (\lambda_2 - \lambda_1)\,\beta = 0$$
Caso 2) Raíces reales y iguales $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ la expresión $y(x=b) - \beta = 0$, esta dada por
$$\alpha(1 + \lambda(a-b)) - (b-a)\,t_k - \beta \exp\lambda(a-b) = 0$$
Caso 3) Raíces complejas y conjugadas $\lambda_1 = \sigma + i\omega$ y $\lambda_2 = \sigma - i\omega$ la expresión $y(x=b) - \beta = 0$, esta dada por
$$\exp[\sigma(b-a)]\left[(\alpha\,\sigma + t_k)\sin(\omega(a-b)) + \cos(\omega(a-b))\right] - \beta = 0$$
Vemos que en los tres casos la relación $y(x=b) - \beta = 0$ es lineal en t_k

c) Resultados y ejemplos de aplicación.
Problema 1: Problema pertenece al libro Análisis Numérico, 7ma edición, de los autores Burden-Faires.
Dada la siguiente ecuación diferencial no lineal y sus condiciones de borde

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy') = f(x, y, y') \qquad y(1) = 17 \qquad y(3) = 43/3 \qquad (60)$$

Siendo:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{8}y' \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = -\frac{1}{8}y$$

En este caso partimos en intervalo en 10 partes y una tolerancia en el borde entre la solución aproximada y la solución exacta menor o igual a 10^{-3}, en este caso el algoritmo satisface estas condiciones luego de 5 iteraciones

	Borde β	
Iteración	Valor aproximado	Diferencia entre el valor exacto y el aproximado
1	20.479232605204665	6.145899271871331
2	13.053674679433302	1.279658653900032
3	14.257556165671225	0.075777167662109
4	14.331564369516860	0.001768963816474
5	14.333296089925659	3.7243407675191e-005

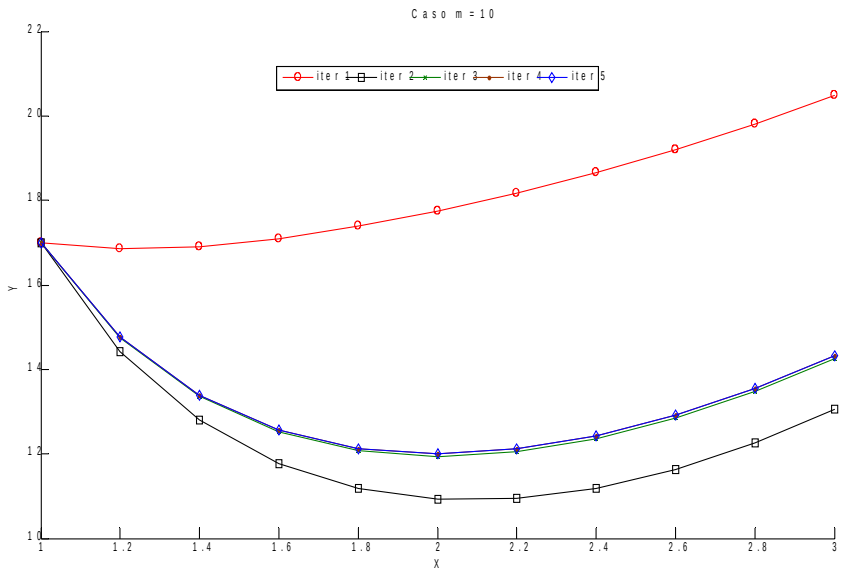

Fig. 1 – Soluciones aproximadas durante el proceso iterativo – 5 iteraciones

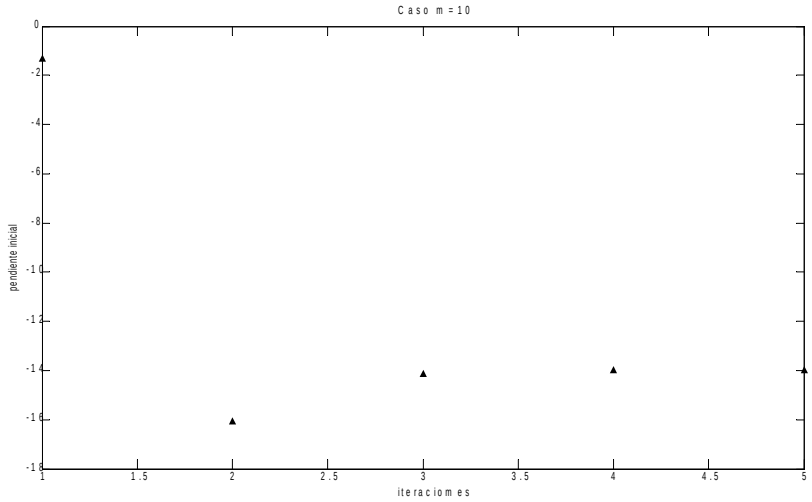

Fig. 2 – pendiente inicial – 5 iteraciones

Este mismo problema formulado con diferentes particiones y tolerancias, obtenemos los siguientes resultados

Caso	Partición del intervalo	Tolerancia	Cantidad de iteraciones	Valor aproximado en el borde β	Diferencia entre el valor exacto y el aproximado
1	10	10^{-3}	5	14.333296089925659	3.7243407675191e-005
2	20	10^{-3}	4	14.332581268829399	7.520645039349e-004
3	40	10^{-3}	4	14.332923405972988	4.099273603461e-004
4	40	10^{-6}	6	14.333333326318801	7.014532954485e-009

Problema 2: Analizamos dos problemas de conductibilidad térmica con distinto grado de no linealidad.
El primero tiene asociado una conductividad dada por $k = 1 + 0.1\,T + 0.02\,T^2$ quedándonos la ecuación diferencial expresada de la forma

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{(0.1 + 0.04\,T)}{(1 + 0.1\,T + 0.02\,T^2)}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 = f\left((x, T(x), T'(x)\right)$$

En el segundo una conductividad $k = 1 + 0.1\,T + 2\,T^2$ quedándonos la ecuación diferencial expresada de la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(0.1 + 4\,T)}{(1 + 0.1\,T + 2\,T^2)}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 = f\left((x, T(x), T'(x)\right)$$

En ambos casos las condiciones de borde son

$$T\left(x = 0\right) = 0 \quad T\left(x = 1\right) = 1$$

Para ambos casos realizamos una partición de 10 partes del intervalo $\left[0,1\right]$ y una tolerancia de 10^{-3}. En el primer caso el algoritmo realizo dos iteraciones mientras que en el segundo caso realizo cuatro iteraciones.
En la siguiente tabla indicamos la diferencia entre el valor exacto y el aproximado en el borde β .

Problema	Iteración 1	Iteración 2	Iteración 3	Iteración 4
1	0.05075546602572	1.8774068523e-004	----------	----------
2	0.27752151837714	0.04871146521974	0.00283655460138	8.518411809e-005

Problema 3: En este caso vamos a aplicar el método del disparo a una ecuación diferencial de segundo orden a coeficientes constante, la cual tiene una estructura del tipo capa límite.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(1+\varepsilon\right)}{\varepsilon}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{\varepsilon}y = f\left(x, y, y'\right)$$

Y las condiciones de borde son $y\left(x = 0\right) = 0 \quad y\left(x = 1\right) = 1$.
La solución exacta esta dada por

$$y\left(x\right) = \frac{\exp\left(-x\right) - \exp\left(-x/\varepsilon\right)}{\exp\left(-1\right) - \exp\left(-1/\varepsilon\right)}$$

Este problema lo vamos a resolver para distintos valores del parámetro ε , el cual controla que la solución cambie mas bruscamente al comienzo cuando mas pequeño lo es.
En la siguiente tabla indicamos la diferencia entre el valor exacto y el aproximado en el borde β , paro los distintos casos

Caso	Parámetro ε	Iteración 1	Iteración 2
1	0.025	0.990567193784765	2.220446049250e-016
2	0.05	0.980637924194730	4.44089209850e-016
3	0.1	0.959129552861331	2.220446049250e-016

d) Conclusiones:
d-1) Vemos que en el caso de ecuaciones diferenciales no lineales esta metodología genera un proceso iterativo explicito, sin tener que caer en la resolución de un sistema no lineal de ecuaciones, esto lo observamos en los problemas 1 y 2, en los cuales aplicamos el esquema explicito de Runge – Kutta de 4to orden.
d-2) El problema 1 fue formulado para tres particiones m = 10, 20 y 40,con la misma tolerancia, en este caso al aumentar la partición sabemos que la resolución numérica es cada vez de mejor calidad y esto se manifiesta en que para la partición m igual a 10 realizamos 5 iteraciones para alcanzar la tolerancia requerida, mientras que para m igual a 20 realizamos únicamente 4 iteraciones.

También vemos que para la partición m igual a 40 y una tolerancia de 10^{-3} no cambia el resultado significativamente con la partición de m igual a 20 y la misma tolerancia, acá estamos viendo que la elección de la partición tiene que estar vinculada a la tolerancia requerida. En este caso tenemos una tolerancia muy grande y no tiene sentido realizar una discretizacion tan fina del problema.

d-3) En el problema 2 resolvemos dos ecuaciones diferenciales con distinto grado de no linealidad. Se puede observar que para la misma partición y la misma tolerancia la formulación con mayor no linealidad requiere un mayor número de iteraciones.

d-4) El problema 3 es una ecuación diferencial de coeficientes constantes, por lo demostrado previamente sabemos que la relación lineal $y\left(x=b\right)-\beta=0$ es lineal en t_k, al aplicar la metodología de Newton a esta formulación lineal, vemos que encuentra la solución en una sola iteración. Por lo cual la cantidad de iteraciones realizadas es independientemente de la pendiente inicial propuesta y del grado de variación que presenta la solución exacta de la ecuación diferencial al comienzo.

e) Bibliografía:

- ✓ Análisis Numérico. R. Burden – D. Faires. Editorial Thomson Learning. Septima edicion. ISBN 970-686-134-3.
- ✓ Métodos Numéricos. Scheid Diconstanzo. Serie Schaum. Segunda edición.
- ✓ Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales. Guillermo Marshall. Tomo 1. Editorial Reverte.
- ✓ Numerical Solution of Diferencial Equations. Willian E. Milne. Editorial John Wiley
- ✓ Numerical Solution of Two Point Boundary. Herbert Keller. SIAM. ISBN 0-89871-021-9