Título de trabajo: Visualización interactiva para la construcción de una imagen conceptual del tema transformaciones lineales en Algebra Lineal utilizando las TICs.

Nombre y Apellido de los autores: Oscar Enrique Ares.
Institución: Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales – Universidad Nacional de San Luis.
Dirección: 25 de Mayo 384 – Mercedes (San Luis)
E-mail: oares@fices.unsl.edu.ar

Area Tematica: Investigacion Educativa.
Palabras Claves: algebra lineal –transformaciones lineales – autovalores autovectores - visualización interactiva

Resumen

En este trabajo se presenta el *diseño* de una propuesta didáctica utilizando nuevas tecnologías para la enseñanza de dos temas vinculados entre si de algebra lineal: *efectos geométricos de las transformaciones lineales* $T:\boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ y *localización de autovalores en el plano.* La propuesta didáctica esta destinada a alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería Electrónica, Ingeniería Industrial, Electromecánica, Química y Alimentos. Una fase del diseño es la construcción de una herramienta didáctica computacional que se materializa mediante la elaboración de un programa (colección de archivos.m) realizada en el entorno de programación GUI, (graphical user interface)la interfase gráfica de MATLAB. La *herramienta didáctica innovadora* es la utilización de esta GUI, conjuntamente con una guía de actividades que ordenan y articulan la secuencia didáctica.

Las etapas de la secuencia didáctica son: diseño, puesta en escena y análisis de resultados (Aguilar, P., Farfán, R. M., Lezama, J., Moreno, J. ,1997). En este trabajo, se muestra en detalle el *diseño y forma de utilizar la herramienta computacional*, conjuntamente con la *guía de actividades*, siendo motivo de otro trabajo, el análisis de la puesta en escena con el consiguiente análisis de resultados. Se menciona que los objetivos perseguidos, se alcanzaron en alto grado, como se desprende del análisis de las respuestas obtenidas de las guías de actividades entregadas.

Se pretende en el diseño de esta secuencia didáctica que el uso de la herramienta computacional permita la *visualización interactiva* que posibilite la construcción de una *imagen conceptual* por parte del alumno de los temas de algebra indicados arriba. Al mismo tiempo el uso este recurso didáctico permite verificación numérica, comprobar o refutar hipótesis y manipular los objetos matemáticos. Una de los ejes teóricos de la ingeniería didáctica de la secuencia, que fueron concretados, es que para enseñar a los alumnos un concepto matemático se debe presentar la reunión de distintos *registros de representación semiótica*, y su *coordinación***.**

Introducción

La evolución que ha experimentado el software matemático, especialmente en la última década ofrece nuevas formas de **enseñar, aprender y hacer matemática.**

En el campo de la ingeniería didáctica, la utilización de software educativos, permite diseñar estrategias donde el alumno sea un participante mas activo en la elaboración de su propio aprendizaje, realice tareas de exploración y elaboración de hipótesis en la que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones. Esto es la finalidad que se persigue con el diseño de esta propuesta didáctica, implementada utilizando el entorno de programación **GUI** de MATLAB, en los tema de algebra lineal: *efectos geométricos de las transformaciones lineales* $T:\boldsymbol{R}^2 \rightarrow \boldsymbol{R}^2$ y *localización de autovalores en el plano.*

Objetivos

Como resultado de evaluaciones escritas de los exámenes finales de Algebra Lineal, se concluye que no hay una imagen visual que identifique la geometría de las transformaciones, aunque si, está entendida la formulación abstracta $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v}$, como surge de la correcta realización de ejercicios. *No hay coordinación* de los registros *algebraico y visual, ni coloquial* puesto que la interpretación de la definición en los términos de *'la imagen de la suma es la suma de las imágenes'* habitualmente no se responde.

Igual dificultad surge con la construcción de un imagen visual para la definición abstracta de la ecuación $T\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, aunque la manipulación algebraica sea efectiva. Habitualmente no es posible que el alumno exprese en un registro coloquial la ecuación anterior, por ejemplo, la solución de $T\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$, es la búsqueda de las direcciones del espacio donde la transformación lineal es la multiplicación por un escalar.

También se verifica que el concepto de transformación lineal no genera una red conceptual que vincule, por ejemplo, el concepto de la diferencial, en análisis matemático.

A partir de la detección de estas dificultades se ha realizado un diseño, utilizando la visualización con computadora, que permita la construcción de una *imagen conceptual* que identifique al objeto matemático y sus propiedades.

Fundamentación

La imagen conceptual es la *primera asociación mental no verbal que aparece en nuestra mente* cuando el nombre del concepto es evocado (Hitt Fernando, 2000).

Puede tratarse de una impresión visual o una colección de impresiones o experiencias. si bien estas imágenes visuales, experiencias pueden luego traducirse en forma verbales, no es así como aparecen en primera instancia.

Para adquirir un concepto *no es suficiente con memorizar su definición*, debe poseerse una imagen conceptual del mismo. es decir, que el aprendizaje, la comprensión, la aplicación y desarrollo de los conceptos matemáticos involucra la construcción de un cierto tipo de estructura mental: la imagen conceptual

La utilización de la computadora como herramienta cognitiva favorece el diseño de "**situaciones de acción, formulación y validación" e "institucionalización**" (Brosseau 1986, [6]).
Se asume como modelo teórico de los procesos cognitivos, el de la formación de **imagen conceptual** y **visualización**. La visualización juega un papel importante en la construcción de la imagen conceptual.
La visualización interactiva y un modelo de construcción de imagen conceptual se aplica a la geometría de las transformaciones lineales de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$.
Sea A_T la representación matricial de una transformación T: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Si A_T es invertible, se puede representar como producto de matrices elementales, es decir como una sucesión de uno o mas transformaciones especiales, esto es, **expansiones**, **compresiones**, **cortes** o **cizalla** a lo largo de un eje, **reflexiones** (Grossman,Stanley,1996)**.** Este producto de matrices elementales, representa composición de transformaciones lineales y en consecuencia composición de sus efectos geométricos. La construcción de una *imagen conceptual a partir de la geometría permite distinguir el mundo de lo lineal de lo no-lineal*. Por ejemplo, si se estudia la imagen de un cuadrado bajo **T**, se observa que sus lados se conservan rectos en la imagen de T.
El cuadro de la geometría de las transformaciones se complementa con la visualización de la transformación lineal que provoca **rotación**.
A partir de una muestra de la metodología de estudio de las transformaciones lineales, el alumno realizará las restantes. Esto es:

Sea T:$\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ siendo $Tx = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + cy \\ y \end{bmatrix}$ ***expansion a lo largo del eje x***

Fases del diseño de la secuencia didáctica
La secuencia metodológica consiste de las siguientes etapas:

1) relevar la existencia de dificultades didácticas y cognitivas en el proceso de enseñanza-aprendizaje del tema transformaciones lineales.

2) Utilizar esencialmente dos recursos proporcionados por la ingeniería didáctica: la visualización interactiva y la coordinación de registros semióticos para posibilitar la construcción de una imagen conceptual, (concep image).

3) Se utilizará como herramienta didáctica innovadora, el diseño y la programación en el entorno gráfico del software MATLAB, GUI graphical usuario interface, como recurso para posibilitar el proceso de visualización interactiva.

4) Se realizara el diseño de una guía de actividades que incorpore la herramienta computacional anterior, y posibilite la articulación de contenidos teórico_prácticos y permita la utilización del programa diseñado para tareas de exploración, verificación de hipótesis y manipulación de los objetos matemáticos involucrados.

5) Puesta en escena.

6) Análisis de resultados

Las etapas de la secuencia didáctica son: diseño, puesta en escena y análisis de resultados (Aguilar, P., Farfán, R. M., Lezama, J., Moreno, J. ,1997). En este trabajo, se muestra en detalle el *diseño y forma de utilizar la herramienta computacional*, conjuntamente con la *guía de actividades*, siendo motivo de otro trabajo, el análisis de la puesta en escena con el consiguiente análisis de resultados.

Breves consideraciones sobre caracteristicas esenciales de software educativos

Partimos de considerar: Un software educativo o (programa educativo) es un programa diseñado especialmente con fines didácticos, que puede tratar diferentes disciplinas (matemática, física, geografía, inglés, ...), de formas muy diversas (a partir de cuestionarios, facilitando una información estructurada a los alumnos, mediante la simulación de fenómenos...) Y ofrecer un entorno de trabajo más o menos sensible a las circunstancias de los alumnos y más o menos rico en posibilidades de interacción (Pere Marqués,1995).

Siguiendo con el mismo autor, podemos decir que todos los software educativos deben contener las siguientes características esenciales:

- Son elaborados con una finalidad didáctica, como se desprende de la definición.

- Utilizan el ordenador como soporte en el que los alumnos realizan las actividades que ellos proponen y que el docente puede usar durante el proceso de enseñanza y aprendizaje.

- Son interactivos, contestan inmediatamente las acciones de los estudiantes y permiten un diálogo y un intercambio de informaciones entre el ordenador y los estudiantes.

- Individualizan el trabajo de los estudiantes, ya que se adaptan al ritmo de trabajo de cada uno y pueden adaptar sus actividades según las actuaciones de los alumnos y las tareas solicitadas por el docente.

- Son fáciles de usar. Los conocimientos informáticos necesarios para utilizar la mayoría de estos programas son similares a los conocimientos de electrónica necesarios para usar un vídeo, es decir, son mínimos, aunque cada programa tiene unas reglas de funcionamiento que es necesario conocer.

Puesta en escena
La puesta en escena esta orientada y articulada por la siguiente *guía de actividades*, que integra e incluye como elemento necesario la herramienta didáctica computacional. Sin entrar en detalles de fundamentación, se menciona que existe en el diseño de la guía una componente *constructivista* del conocimiento.
Cuestionario guia

ALGEBRA I I
Efectos geométricos de las transformaciones lineales en R^2
Problemas y Visualización

Problema N º 1
¿Qué efectos geométricos provocan las transformaciones:

$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ $T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $T_4 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, sobre un cuadrado unitario (vértice inferior izquierdo en el origen)?

Primera secuencia didáctica

1 Visualización para crear una imagen conceptual(computadora)
Utilizar el archivo transformacionlineal.m aplicado al software MATLAB, para **visualizar** los ítems a, b, c y d. Pulsar el botón '*seleccionar curva cerrada'* y seleccionar *'cuadrado'*. A continuación cargar T_1 y pulsar el botón *'matriz'*.
2 **Resolución algebraica** (lápiz y papel)
a) Determinar $T_1(\mathbf{x})$, $T_2(\mathbf{x})$, $T_3(\mathbf{x})$, $T_4(\mathbf{x})$ siendo $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Identificar (dar nombre) a cada transformación.
b) Utilizar a) para hallar las imágenes de todos los vértices, con c=2 y $\theta = 45$.
c) Realizar dos gráficos en coordenadas cartesianas, para representar dominio e imagen de la transformación.
d) Aplicar T_1 , luego T_4 y determinar la matriz de la transformación compuesta de $(T_4T_1)(x)$.
3 Visualización para verificación (computadora)

Problema N º2
¿Qué efectos geométricos provocan la transformación:

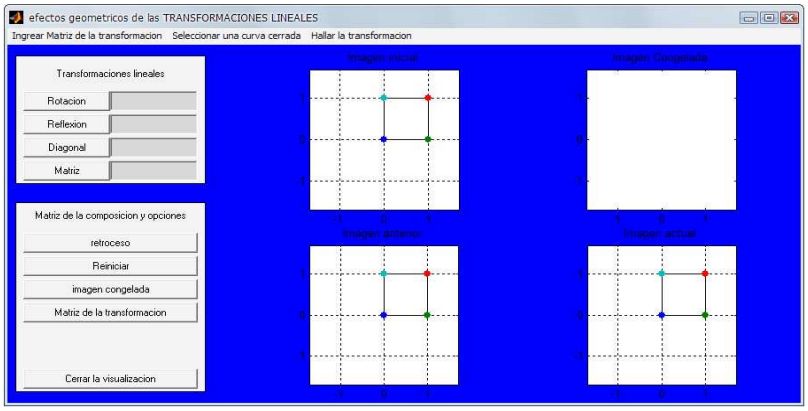
$T = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ actuando sobre sobre un circulo unitario? Identificar (dar nombre) a imagenT.

Segunda secuencia didáctica
1 Visualización para crear una imagen conceptual
Utilizar el archivo transformacionlineal.m aplicado al software MATLAB, para **visualizar**. Pulsar el botón '*seleccionar curva cerrada'* y luego elegir '*circulo"*.
Cargar la matriz T y luego pulsar el botón 'matriz'. Fijar a=2, b=1.
2 **Resolución algebraica**
Determinar T**x** algebraicamente, siendo $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Igualar T**x** = **x'**, siendo $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ corresponden a los ejes de la imagen. Utilizar $x^2+y^2=1$.

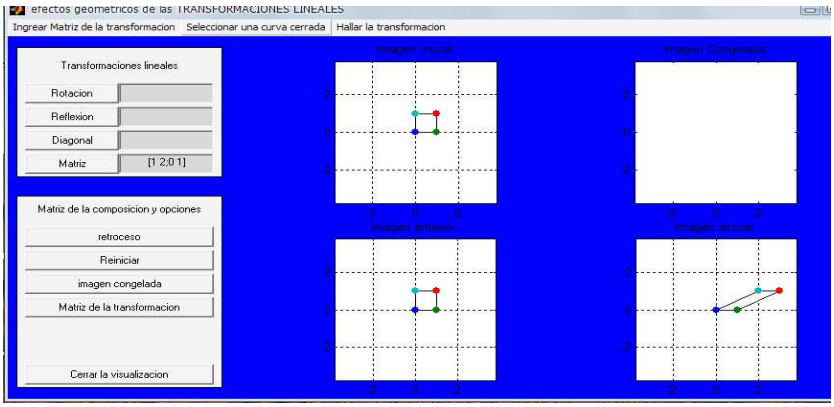
3_Visualización para verificación (computadora)

Secuencia de pantallas

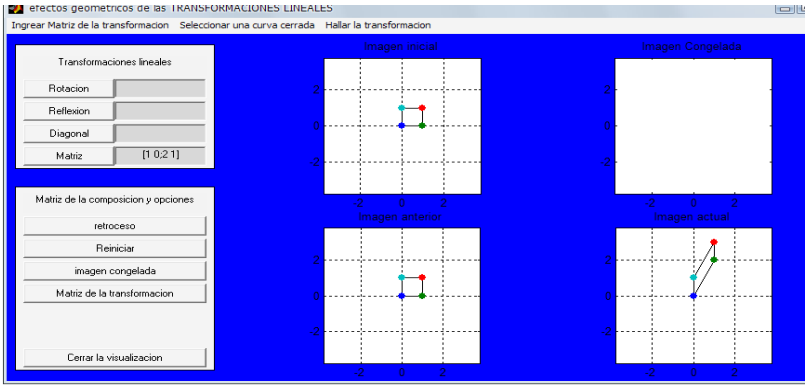
El diseño de la guía de actividades y la secuencia de pantallas está orientada por las cuatro fases para la apropiación del conocimiento matemático (Rosa Farfan y otros,2007). Las fases de adquisición del conocimiento matemático son: *acción, formulación, validación e institucionalización.* La acción consiste en el planteamiento de la tarea, su comprensión y en las acciones que realiza el alumno para cumplir con las exigencias establecidas.
En la formulación se confrontan y analizan los distintos procedimientos y resultados. En la validación se fundamentan los procedimientos y resultados y, finalmente, en la fase de institucionalización se expresan los saberes construidos, correctamente, desde el punto de vista de la forma y del contenido (Brousseau,1983).
En la primera secuencia didáctica se indica pulsar el botón '*seleccionar curva cerrada'* y seleccionar*'cuadrado'*. Se obtiene la pantalla que se muestra a continuación, en la cual puede observarse el cuadrado definido en el dominio e imagen con los vértices distinguidos por distintos colores para seguir su evolución al aplicarle distintas transformaciones conjuntamente con dos botoneras. Una de las cuales contiene las transformaciones de Rotación, Reflexión, Diagonal y se puede cargar una *nueva* matriz y obtener la respuesta. De la segunda botonera el más importante pulsador para esta guía es el que nos permite conocer la matriz de la transformación.



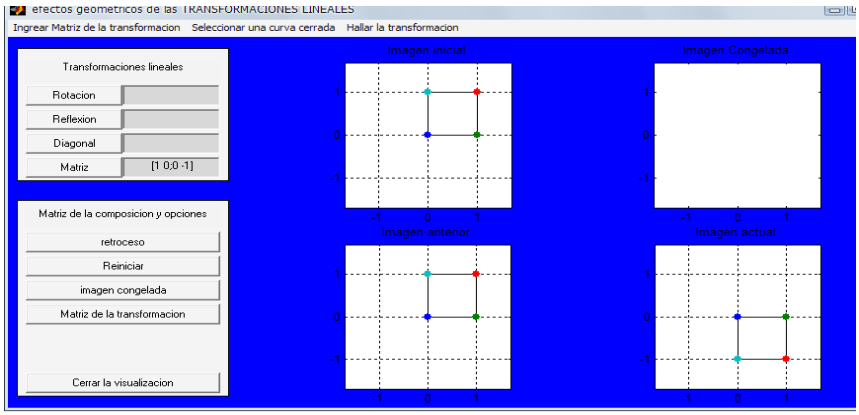
El alumno carga la matriz [1 2;0 1], pulsa el botón matriz y puede observarse la imagen del efecto geométrico de la transformación: *corte a lo largo del eje x.*



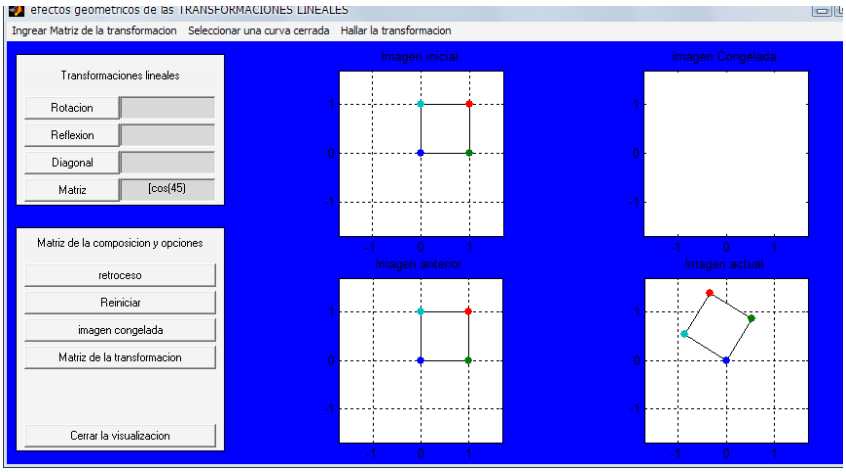
El alumno carga la matriz [1 0;2 1], pulsa el botón matriz y puede observarse la imagen del efecto geométrico de la transformación: *corte a lo largo del eje y.*



El alumno carga la matriz [1 0;0 -1], pulsa el botón matriz y puede observarse la imagen del efecto geométrico de la transformación: *reflexión sobre x.*

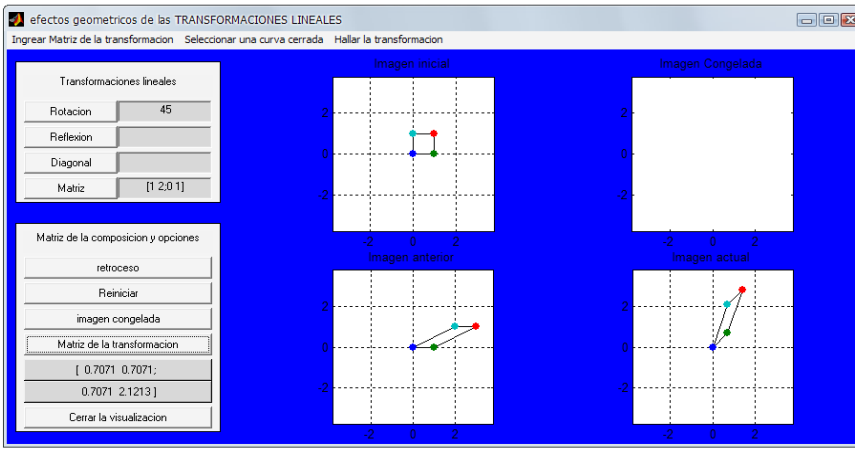


Efecto geométrico que provoca la transformación lineal rotación.

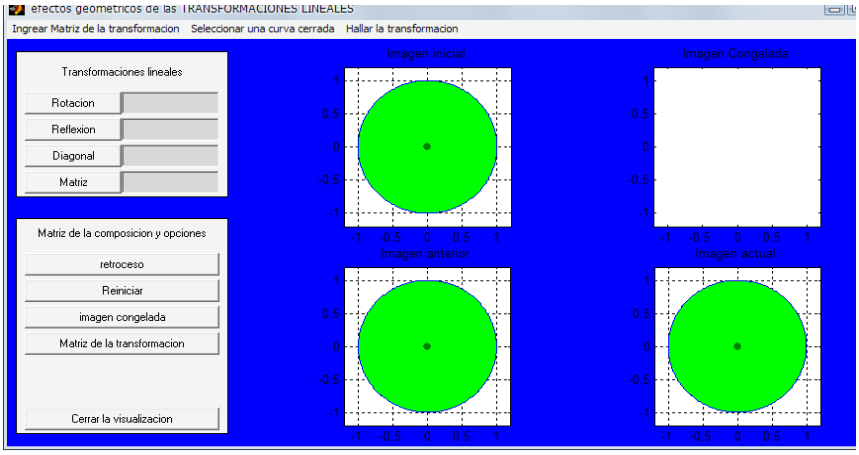


Composición de transformaciones lineales

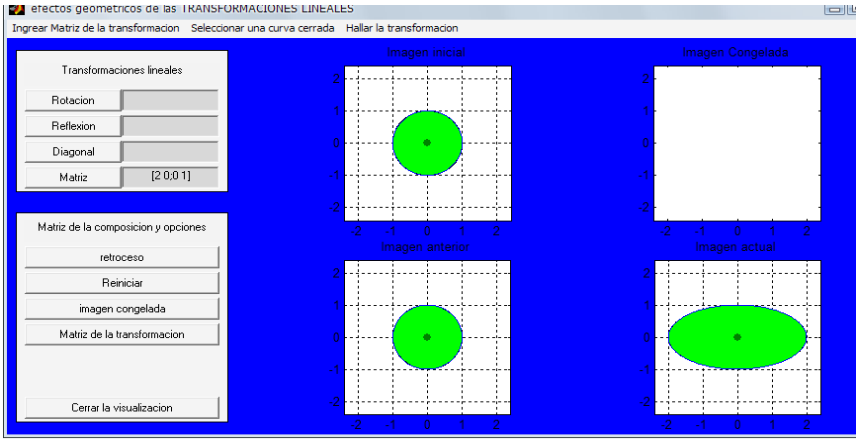
Corte a lo largo de x, seguido de rotación a 45º. Puede observarse el cuadrado del dominio luego la primer transformación, corte a lo largo de x y luego rotación. Al pulsar el botón *matriz de la transformación* se obtiene la matriz de la transformación *compuesta.*



Para la segunda secuencia didáctica, pulsar el botón '*seleccionar curva cerrada'* y luego elegir '*circulo"*.

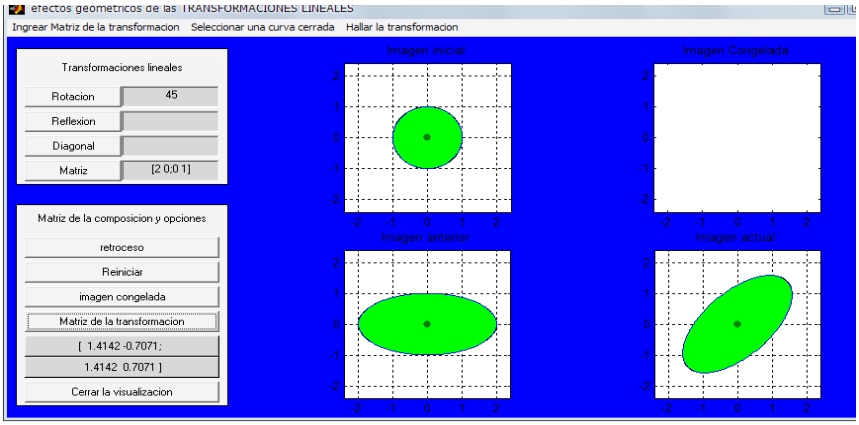


Se carga la matriz [2 0;0 1], se pulsa el botón matriz y puede observarse la imagen del efecto geométrico de la transformación: *la imagen de T es una elipse con semieje mayor paralelo a x.*.

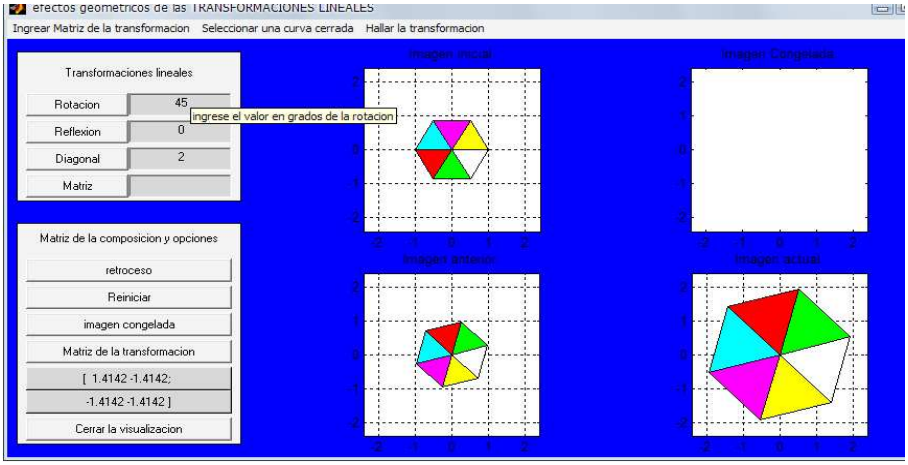


Composición de transformaciones lineales

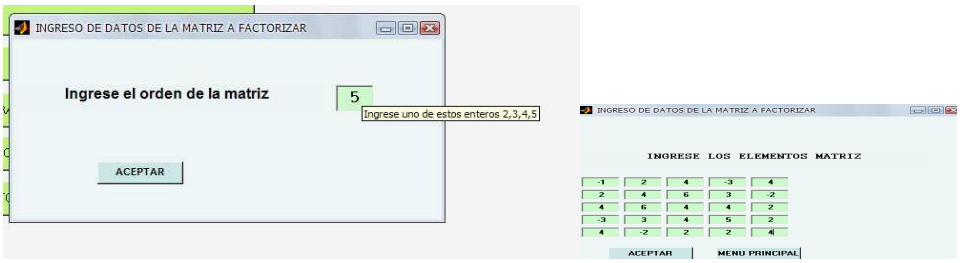
A continuación de la transformación definida por [2 0;0 1], se aplica una rotación a 45º. Al pulsar el botón *matriz de la transformación* se obtiene la matriz de la transformación *compuesta,* al mismo tiempo que puede visualizarse la imagen de T.

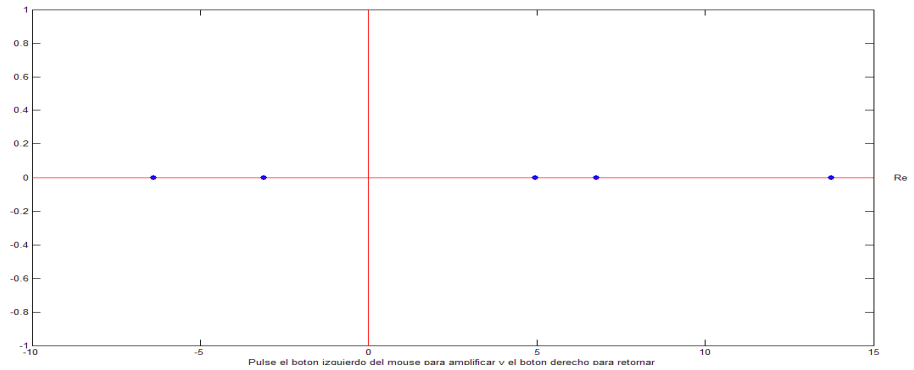


En la siguiente pantalla puede observarse el detalle didáctico siguiente: cada vez que desliza el puntero sobre el edit_text respectivo para cargar los datos aparece una que señala la instrucción respectiva.
Al pulsar sobre el botón del menú *hexágono* y la luego se cargar los datos rotación: 45º, reflexión:0 y diagonal:2, se despliegan las imágenes de las sucesivas transformaciones y la matriz de la transformación compuesta.
Este diseño cumple con la consigna de representación en al menos *dos registros semióticos distintos*: gráfico y numérico. Al mismo tiempo existe *coordinación* entre ambos registros.

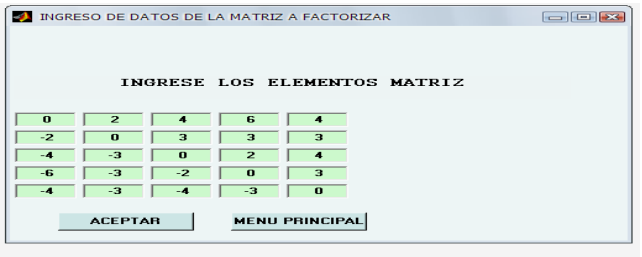


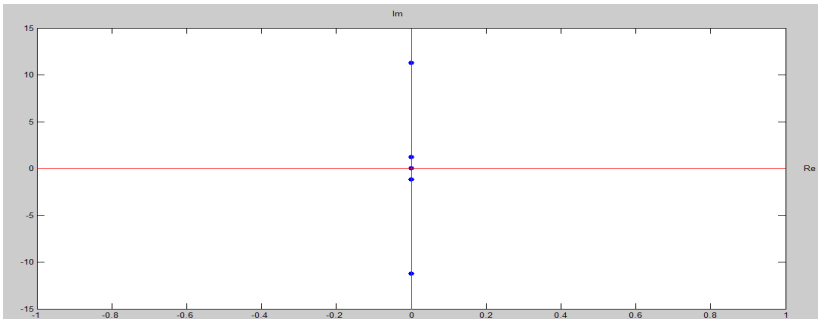
Localización de autovalores en el plano
Puesto que excede los límites de este trabajo no se incluye las guía de actividades correspondiente a autovalores.
Se indica una secuencia de pantallas que persigue como primer objetivo que el alumno *descubra la ubicación* de autovalores de distintas matrices. Aquí el trabajo está restringido a simétricas y antisimétricas, pero se puede extender a ortogonales y herméticas.
Se cargan los siguientes datos: orden de la matriz a ingresar, luego se pulsa el botón aceptar y se despliegan (en este caso 25 casilleros) para ingresar los valores numéricos. Se carga una matriz simétrica, se pulsa aceptar y se analiza la ubicación de los autovalores en el plano, señalados con pequeñas esferitas azules. También puede obtenerse el valor numérico.





Distribución de autovalores para una matriz antisimétrica.





Resultados

Los resultados se obtuvieron a partir de la *corrección y análisis de las respuestas* al cuestionario guía, presentado más arriba y que permite inferior la construcción o no de una imagen conceptual adecuada.

El análisis hecho a las producciones de los alumnos, relativas al tipo de tarea, realizar gráficas en coordenadas cartesianas, para representar dominio e imagen de la transformación lineal, indica un 95% de respuestas *correctas* en problema 1, apartado 2a, 2b y 2c y un 80% en problema 2, apartado 2 (grafico) y 20% apartado (algebraico). Indicando este último resultado una dificultad para hallar la imagen de una transformación lineal sobre un determinado dominio, determinado por una curva cerrada

No es parte del presente trabajo un análisis cuantitativo exaustivo de la recolección de datos. Se menciona que los objetivos arriba definidos, se alcanzaron en alto grado, que se desprende del análisis de las respuestas obtenidas de las guías de actividades entregadas.

Conclusiones

Para validar esta secuencia didáctica se han evaluado las respuestas de los alumnos. El proceso de recopilación y análisis de datos, interpretación y conclusiones motivan otro trabajo. No obstante puede decirse el muy buen resultado en los siguientes ítems:

a) participación activa en todos los casos.
b) Desarrollo completo de la guía de actividades.
c) Formulación y validación (de acuerdo a Brouseau).

Diseñar nuevas propuestas didácticas para la comprensión de temas y conceptos algebraicos requieren de muchas horas de dedicación en la programación de software, en la planificación didáctica y en la puesta en funcionamiento de los distintos desarrollos.

Este diseño persigue como metas que el alumno, posea una herramienta interactiva que le permita verificar, corregir, explorar, plantear y descartar hipótesis, visualizar y finalmente construir su *propia imagen conceptual* del tema.

Bibliografia

1_Aguilar, P., Farfán, R. M., Lezama, J., Moreno, J. (1997). Estudio didáctico de la función 2^x. Actas de la undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. México. Grupo Editorial Iberoamérica, 19-23.

2_Crisologo Dolores, Gustavo Martinez, Rosa Maria Farfan (2007). Matemática Educativa. Ediciones Díaz de santos.

3_ Pere Marqués (1995). Software educativo, Conceptualización. Editorial Estel.

4_Fernando Hitt (2000). Construccion de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas.

5_Grossman,Stanley(1996). Algebra Lineal. McGraw-Hill.