Ecuaciones Diferenciales con Mathematica y Aplicaciones a la Ingeniería

Fabbro, Alejandro; Maggi, Claudio; Martín, Héctor; Ribas, Graciela; Talijancic, Iván.
Facultad Regional Reconquista - Universidad Tecnológica Nacional, Argentina
afabbro_487@hotmail.com, ncmaggi@arnet.com.ar, hectordmartin@gmail.com,
mgr@trcnet.com.ar, ivan_taly@hotmail.com.

Palabras Claves: Ecuaciones Diferenciales - Software Mathematica – Aplicaciones en Estabilidad y Física.

Resumen
En este trabajo se presentan los resultados obtenidos en el Taller de Mathematica dirigido a los alumnos que cursan la asignatura Análisis Matemático II en la Facultad Regional Reconquista de la Universidad Tecnológica Nacional.
Se comenta brevemente la experiencia de trabajar en paralelo con la cátedra utilizando el Software de matemática simbólica y luego se presentan algunos trabajos desarrollados por alumnos referidos a la aplicación de Ecuaciones Diferenciales en problemas de Estabilidad y Física.

1) Introducción

En el presente trabajo se comentan las experiencias obtenidas en la implementación de Talleres de Software Mathematica en la asignatura Análisis Matemático II, en el marco de la Unidad Temática Ecuaciones Diferenciales. Esta materia se dicta en el segundo año en la carrera de Ingeniería Electromecánica en la Facultad Regional Reconquista de la Universidad Tecnológica Nacional.

Se describen algunos aspectos la asignatura sobre la cual se trabaja y luego se muestran ejemplos resueltos por los propios alumnos, con aplicaciones en temas de Ingeniería.

2) Fundamentación

A partir del año 2006 se implementan en la Facultad los Talleres de Mathematica. Se trata de un soporte informático para las asignaturas de las áreas Matemática y Física. En el mismo, los alumnos afianzan y amplían los contenidos desarrollados en las cátedras, mediante la utilización del programa de Matemática Simbólica. Se logra además que perfeccionen el empleo de la herramienta informática. Se pretende, al igual que en el taller I dictado en primer año, que los alumnos continúen desarrollando y mejorando los métodos de razonamiento para potenciar sus facultades intelectuales y que los ayuden en la resolución de problemas que se le presenten, tanto en materias de los últimos años de la carrera, como en su futura vida profesional. Se pone énfasis en que durante la mayor parte del desarrollo de este taller, ellos resuelvan problemas planteados en otras asignaturas del mismo nivel de cursado.

3) Descripción de la asignatura Análisis Matemático II y del Taller de Mathematica II

La asignatura Análisis Matemático II se dicta en el segundo año de la Carrera Ingeniería Electromecánica de la Facultad Regional Reconquista. Es de cursado anual, con una carga horaria de 5 horas semanales para la teoría y trabajos prácticos, y 2 horas semanales para el Taller de Mathematica II.

El programa sintético propuesto en el diseño curricular es organizado en tres ejes temáticos: Funciones, Calculo Integral y Ecuaciones diferenciales

3.1) Estrategias Metodológicas

Las actividades se llevan a cabo en el marco de la propuesta metodológica del nuevo diseño curricular que explicita:
"La enseñanza será motivada y no axiomática"
El aprendizaje estará centrado en el alumno, el que aprende haciendo, y al que se tratará de formar como pensador enfrentándolo con problemas básicos desde el principio.
La cátedra distribuye las actividades que hacen el proceso enseñanza – aprendizaje en:

- Clases teórico – prácticas
- Clases de trabajos prácticos
- Clases de consulta
- Taller de Mathematica

Se otorga preponderancia a la utilización en forma reflexiva del software disponible Mathematica.

3.2) El taller de Mathematica

Este espacio curricular posee características didácticas innovadoras:

- Se desarrolla fuera del horario de cursado de la asignatura.
- No posee obligatoriedad de asistencia.
- La modalidad del mismo es del tipo taller: se plantean problemas de asignaturas del mismo nivel, con el apoyo presencial y virtual del docente.
- Los Trabajos Prácticos planteados deben aprobarse mediante un coloquio para poder rendir la asignatura.
- Los temas de aplicación planteados pueden ser el inicio de trabajos de investigación en el futuro.

3.3) Unidad Temática: Ecuaciones Diferenciales

En todo momento los estudiantes están en contacto con las ecuaciones diferenciales, aprenden incluso como resolver las de variables separables antes de abordar específicamente esta temática.

En la asignatura se realiza una introducción al estudio general de este tipo de ecuaciones mostrando como resolver varios tipos básicos. El tema se presenta a partir de problemas que requieren de la aplicación de conocidas leyes físicas, y que se modelizan mediante este tipo de ecuaciones. De la observación de estos problemas se extrae el concepto de ecuación diferencial y su clasificación. Se hace hincapié en la elección del método de resolución a partir del tipo de ecuación planteada.

Las lineales de segundo orden, homogéneas y no homogéneas, se presentan a través de problemas de aplicación. Se analizan y posteriormente se aplicarán distintos tipos de métodos de resolución.

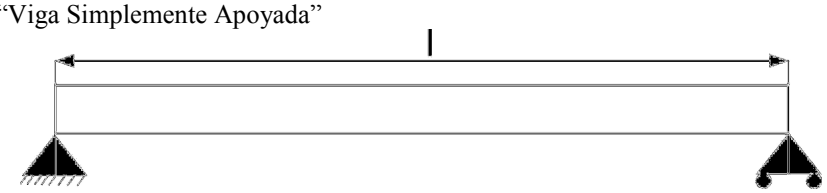
4) Resultados Obtenidos

Se describen a continuación dos trabajos prácticos propuestos en el Taller, y el resultado obtenido por los estudiantes:

4.1) Problema 1: ***Aplicación de Ecuaciones Diferenciales al Estudio de la Elástica de una Viga***

Determine la ecuación que rige la elástica de una viga simplemente apoyada, mediante el uso de la ecuación diferencial correspondiente y grafique luego, a partir de la solución de dicha ecuación, los diagramas de esfuerzos característicos, giro y desplazamiento.

1er Caso: "Viga Simplemente Apoyada"



Resolución: Se conoce de la viga, su módulo de elasticidad E, momento de inercia I, longitud L y la ecuación de la carga q(x) que solicita a la misma:

Tomamos: L = 10, K = 1, q(x) = 4x

En primer lugar planteamos la ecuación diferencial de la elástica:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{EI}{L} q(x)$$

Por cuestiones prácticas tomamos:

$$k = \frac{EI}{L}$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = kq(x)$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos la siguiente solución general:

$$y(x) = \frac{x^5}{30} + C[1] + xC[2] + x^2C[3] + x^3C[4]$$

Para determinar las constantes, y poder así hallar la solución particular de nuestra ecuación diferencial, en función a la configuración de solicitación planteada, procedemos a determinar las constantes de integración, mediante las siguientes condiciones de borde:

La flecha en los extremos es cero, por lo tanto planteamos:

$$y(0) = 0$$

$$\frac{0}{30} + C[1] + 0C[2] + 0^2C[3] + 0^3C[4] = 0$$

$$C[1] = 0$$

Y en el otro extremo:

$$y(l) = 0$$

$$\frac{10000}{3} + C[1] + 10C[2] + 100C[3] + 1000C[4] = 0$$

El momento Flector en los extremos es cero:

Como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

Tenemos entonces:

$$M(0) = 0$$

$$2C[3] = 0$$

Y en el otro extremo:

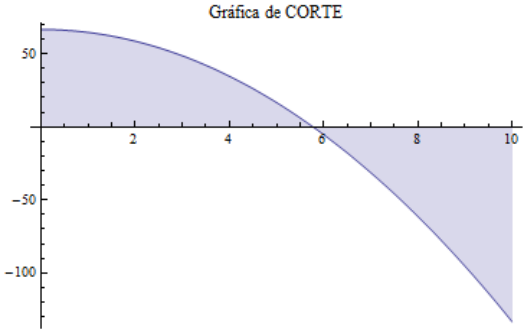
$$M\ (l) = 0$$

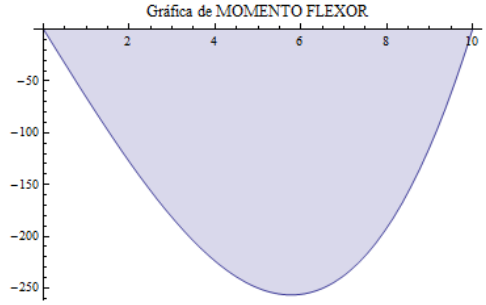
$$\frac{2000}{3} + 2C[3] + 60C[4] = 0$$

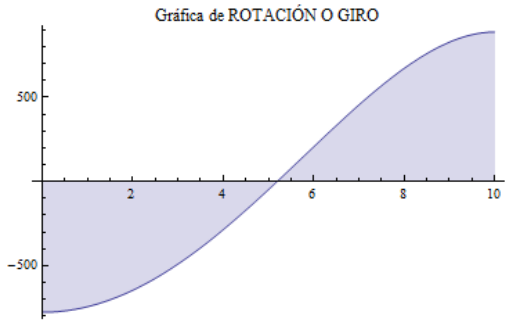
Por último, resolviendo el sistema de ecuaciones para obtener las constantes, obtenemos la siguiente ecuación:

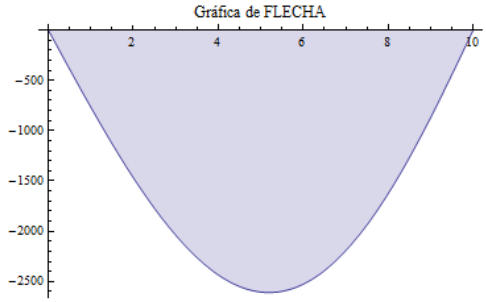
$$y\ (x) = \frac{7000x}{9} - \frac{100x^3}{9} + \frac{x^5}{30}$$

Es esta ecuación obtenida la que rige la flecha de la viga. En función a esta resolución, pudimos obtener los siguientes gráficos:



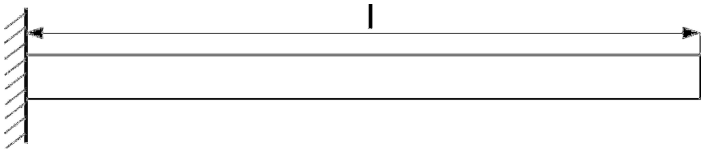






<u>2do Caso:</u> "Viga Empotrada"

Esquema:



Donde: K = 1, L = 5, q(x) = 3

Resolución: Partiendo de la misma ecuación diferencial de la elástica, utilizada en el caso anterior y resolviendo en función a los datos anteriormente detallados, obtenemos:

$$y(x) = \frac{x^4}{8} + C[1] + xC[2] + x^2C[3] + x^3C[4]$$

Para determinar las constantes de integración, nos valemos de las siguientes condiciones de borde:
La flecha en el extremo empotrado es cero:

$$y(0) = 0$$
$$C[1] = 0$$

El momento flector en el extremo en voladizo es cero:

$$M(l) = 0$$
$$\frac{75}{2} + 2C[3] + 30C[4] = 0$$

El giro en el extremo empotrado es cero:

$$\sigma(0) = 0$$
$$C[2] = 0$$

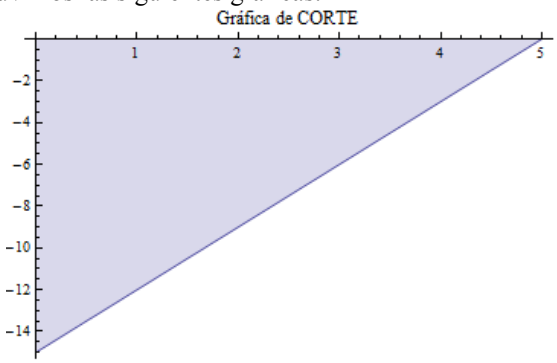
El corte en el extremo no empotrado es cero:

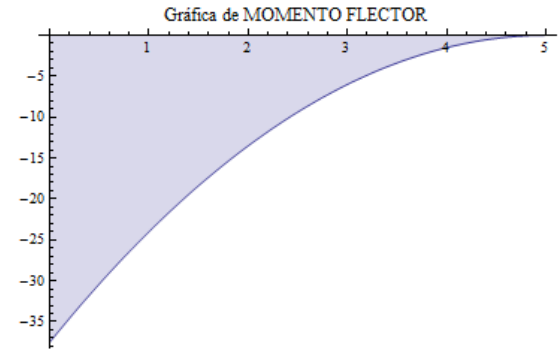
$$Q(l) = 0$$
$$15 + 6C[4] = 0$$

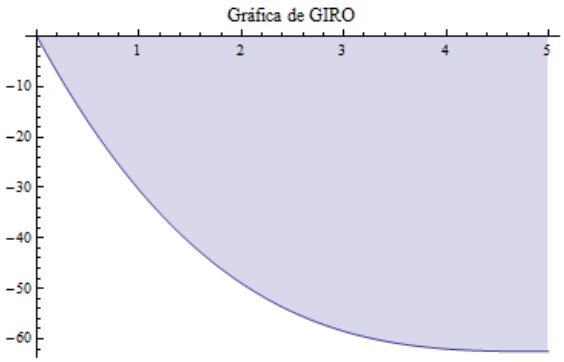
Resolviendo el sistema, llegamos a la siguiente ecuación representativa de la flecha de la viga:

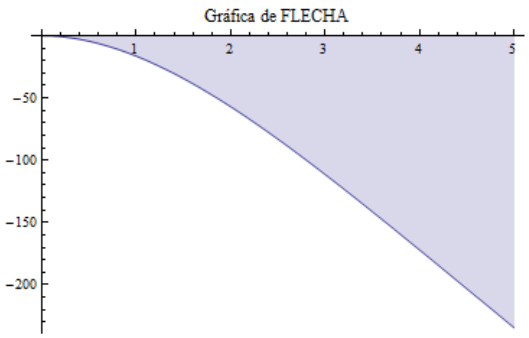
$$y(x) = \frac{75x^2}{4} - \frac{5x^3}{2} + \frac{x^4}{8}$$

A partir de esta ecuación, obtuvimos las siguientes gráficas:



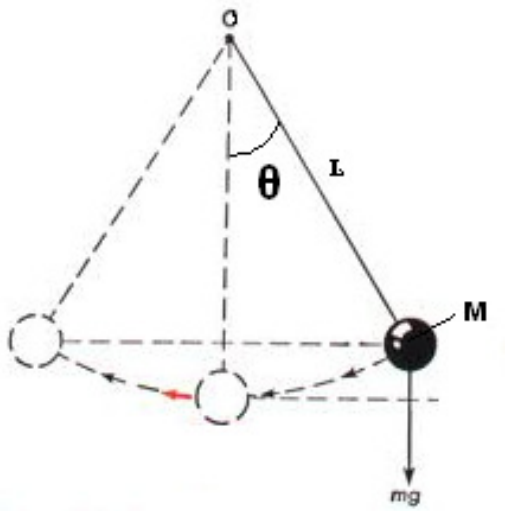






4.2) Problema 2: Péndulo simple

Dado un péndulo simple cuya masa M es una partícula puntual ubicada en el extremo de la cuerda (sin masa) de longitud L, si la única fuerza actuante sobre la masa M es la gravitatoria se desea saber cómo se comportan la posición angular θ, la velocidad angular y la aceleración angular α en función del tiempo de oscilación.



Como la única fuerza que produce un momento de fuerza sobre la partícula es *M.g* y la sumatoria de momentos es igual al producto de la inercia rotacional por la aceleración angular *α*

$$I_0.\alpha = L \times M.g$$

Como $I_0 = M.\ L^2$; $\alpha = \theta''[t]$; $L \times Mg = L.\ Mg.\ Sen[\theta[t]]$ donde *t* es el tiempo, entonces:

$$-Mg.\ Sen[\theta[t]]=M.L.\ \theta''[t]$$

Aproximando $Sen[\theta[t]]$ a $\theta[t]$, para ángulos pequeños se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$-Mg.\ \theta[t]=M.\ L.\ \theta''[t]$$

Dándole valores determinados al ángulo inicial, a *L* y a *M,* se resuelve la ecuación diferencial con las correspondientes condiciones iniciales. Luego se calculan y grafican las funciones de la posición angular, la velocidad angular y la aceleración angular en función del tiempo. Al igual que las energías cinética, potencial y mecánica en función del tiempo.

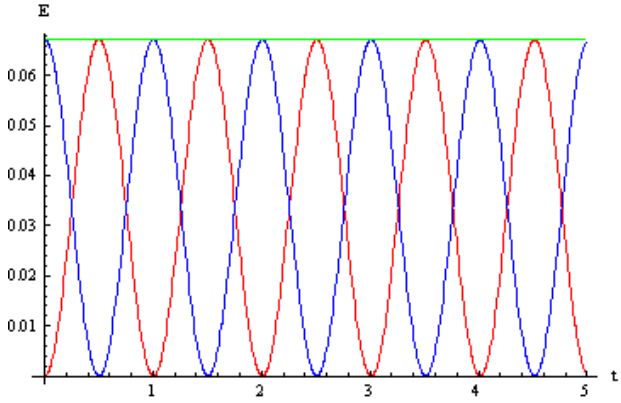


Grafico de energía mecánica, energía potencial y energía cinética en función del tiempo

Con los datos obtenidos de la resolución de la ecuación diferencial, se calcula también la frecuencia del movimiento y se crea una animación del movimiento.

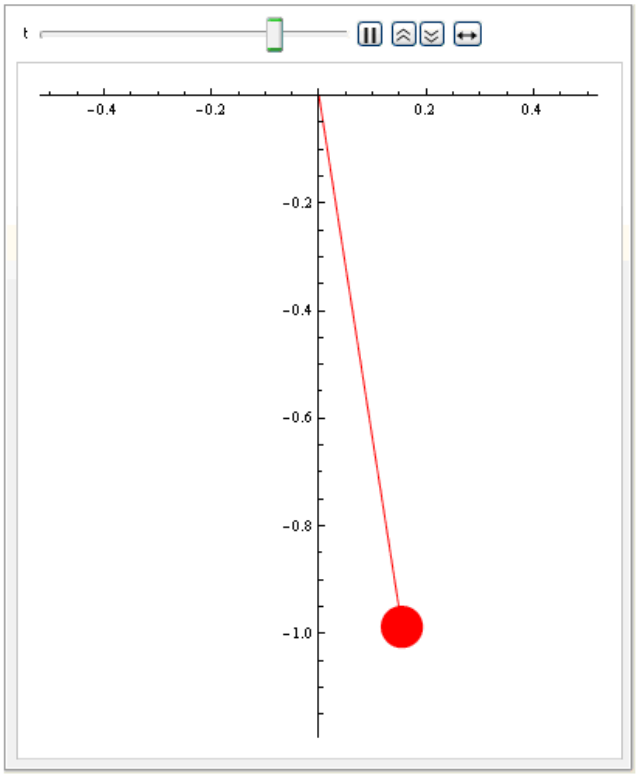


Imagen de la animación obtenida a partir de los cálculos realizados

5) Conclusiones

Después de más de tres años de la implementación del Taller de Mathematica, los resultados obtenidos pueden resumirse en los siguientes logros:

- A pesar de no poseer obligatoriedad de asistencia, los alumnos concurren al Taller de manera espontánea y al número de participantes al mismo no decrece con el transcurso del año, salvo en ocasiones puntuales como exámenes parciales y finales.
- Los trabajos realizados por los alumnos han superado con creces las expectativas de los docentes, con planteos autónomos de temas propuestos por los propios alumnos, habiéndose alcanzado buenos niveles en los mismos.
- La comprensión de los temas desarrollados en la asignatura ha mejorado, como lo prueba el rendimiento académico en los exámenes finales de la cátedra.
- La herramienta matemática que constituye el software ha permitido a los alumnos utilizarla para resolver problemas de otras asignaturas, y ampliar el campo de comprensión de los temas abordados, muchos de ellos pertenecientes a diversas ramas de la Física, Mecánica, Estabilidad, etc...
- Se ha formado un grupo de investigación sobre el uso del software, constituido por docentes y alumnos, que permite incrementar continuamente el número y nivel de las actividades propuestas, y encarar el estudio de nuevos temas.
- Por último, uno de los indicadores más importantes del éxito de este Taller, es el presente trabajo, fruto de la actividad colaborativa entre los docentes y los alumnos, en un ámbito institucional.

6) Bibliografía

C.H. EDWARDS, D. PENNEY .***Ecuaciones Diferenciales Elementales***. Ed. Prentice Hall. Hispanoamericana.1992

CASTILLO, GUTIERREZ, IGLESIAS, ALVAREZ, COBO. ***Mathematica***.

E. PURCELL, D. VARVEG .***Calculo con Geometría Analítica***. 6ta.Mexico. Ed. Prentice Hall. Hispanoamericana.1994

ERICH STEINER . ***Matemática para las Ciencias Aplicadas*** . Madrid. Ed. Reverte. 2005

G.THOMAS, R.FINNEY . ***Cálculo con Geometría Analítica***. 6ta Edición . Ed. Addison Wesley Iberoamericana

H. EDWARDS, D.PENNEY. ***Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera. Cómputo y Modelado.*** Pearson Educación-Cuarta Edición. 2009

JAMES STEWART .***Cálculo Multivariable***. 3ra Edición . Ed. Internacional Thomson-Learning. 2002

MERRIT, F. ***Matemáticas aplicadas a la ingeniería.*** Editorial Labor. 1976.

R.LARSON, R.HOSTETLER, B.EDWARDS. ***Calculo*** - volumen II . 8va Edición . Ed.Mc. Graw Hil-2000.

ROXIN, E.; SPINADEL. ***Ecuaciones diferenciales ordinarias***. UBA. 1979.

SPIEGEL. ***Ecuaciones diferenciales aplicadas***. Mc Graw-Hill.
STEWART, JAMES . ***Cálculo. Trascendentales tempranas***. . 4ª ed. México . Thomson. 2002
TAGLE, SAFF, ZINDER . Ecuaciones Diferenciales. 4ta Edición . Ed. Reverte.
THOMAS GERORGE. ***Cálculo-Varias Variables***. Pearson Addison Wesley. 2006
W. DERRICK, S. GROSSMAN. ***Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones***. Fondo Educativo.
WOLFRAM. ***Mathematica***. Mc Graw-Hill.
SERWAY, JESVTT, ***Física para ciencia e ingeniería***. Volumen 1, 7° Edición. Editorial CENGAGE-Learning.
SEARS SEMANSKY – YOUNG – FREEDMAN. ***Física Universitaria*** 11° Edición, Editorial PEARSON – EDUCACION.
WILLIAM A. NASH. ***Resistencia de Materiales*** Serie Shaum. 2º Edición, Mc Graw-Hill.
LUIS ORTIZ BERROCAL. ***Resistencia de Materiales*** 2º Edición, Mc Graw-Hill.