Facilitando el aprendizaje del retrato de fase a través de una herramienta informática. Una experiencia en Bioingeniería.

Gabriela Alejandra Merino; María Magdalena Añino; Alberto Miyara

Universidad Nacional de Entre Ríos, Facultad de Ingeniería; República Argentina

merino.gabriela33@gmail.com; maena@gigared.com; ajmiyara@fceia.unr.edu.ar

Palabras claves: Ecuaciones diferenciales, modelización, software educativo.

Resumen

En este trabajo se relata una experiencia realizada en un curso de Ecuaciones Diferenciales. Esta asignatura forma parte del Plan de Estudio 2008 de la carrera de Bioingeniería que se dicta en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos. Se describe el proceso de diseño de una estrategia didáctica implementada con el objetivo de facilitar el aprendizaje de un tema específico: "La construcción e interpretación del Retrato de Fase". Se diseñó una aplicación informática con interface gráfica, de sencilla comprensión y accesible para alumnos de segundo año de ingeniería, que complementa de manera interactiva el material bibliográfico de la asignatura.

I. Introducción

En este trabajo se describe una experiencia realizada en la Cátedra de Ecuaciones Diferenciales, del Departamento Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Entre Ríos en la cual se dicta la carrera de grado "Bioingeniería". En la misma, la matemática se desarrolla a lo a través de seis cursos cuatrimestrales: Cálculo en una Variable, Álgebra Lineal y Geometría Analítica, Cálculo Vectorial, Ecuaciones Diferenciales, Probabilidad y Estadística y Variable Compleja.

Los docentes integrantes de la cátedra de *Ecuaciones Diferenciales* participan en un proyecto de Investigación-Acción. El objetivo del mismo es detectar obstáculos y dificultades que afectan el aprendizaje de la asignatura, a partir de lo cual se procede a diseñar actividades que intenten resolver las situaciones problemáticas. Estas nuevas estrategias didácticas son llevadas al aula para luego reflexionar sobre la experiencia realizada, discriminar los beneficios y aspectos negativos de la misma, realimentando de esta forma el siguiente ciclo de investigación- acción [1].

Los cambios metodológicos realizados toman como punto de partida el concepto de aprendizaje y de enseñanza desde una perspectiva constructivista la cual resalta la importancia de comprender el proceso de construcción del conocimiento. En este contexto, el rol del profesor, es el de un mediador que ayuda a desarrollar en el alumno un conjunto de habilidades cognitivas que le permitan optimizar sus procesos de razonamiento (enseñarle a pensar) y animarlos a tomar conciencia de sus propios procesos y estrategias mentales (metacognición) [2].

En este marco, la observación y análisis de las dificultades y los errores que los estudiantes manifiestan en distintas instancias, se ha convertido en una actividad prioritaria para los docentes. La cátedra ha implementado un sistema de evaluación formativa continua a través de la realización de "informes semanales", que los estudiantes deben entregar, exponer y discutir en las clases de práctica. La realización del informe semanal implica una actividad grupal escrita anterior a la clase de práctica y una actividad individual de exposición y discusión en clase.

El informe escrito consiste en realizar tres ejercicios propuestos por la cátedra y responder un cuestionario final cuyo objetivo es ayudar al estudiante a detectar los obstáculos y dificultades que se le han presentado y también a tomar conciencia de su capacidad para sortearlos de manera independiente. Desde el punto de vista del docente, esta parte del informe nos permite descubrir aquellos inconvenientes que no pudieron resolver por sí solos y la frecuencia de ocurrencia de los mismos.

Teniendo en cuenta las observaciones realizadas de las exposiciones en las clases de práctica, y los informes semanales presentados por los alumnos, los exámenes parciales y finales de los mismos, se detectaron

contenidos particulares que resultaban muy complejos y de difícil comprensión. Para cada uno de ellos se elaboran las estrategias didácticas específicas que permitan ir paulatinamente mejorando el aprendizaje de estos temas.

En este trabajo se describe una estrategia didáctica elaborada con el fin de facilitar el aprendizaje de un tema específico: "La construcción e interpretación del RETRATO DE FASE". En este caso particular el recurso utilizado fue la implementación de una herramienta informática que permita superar algunos de los obstáculos observados en el aprendizaje del tema seleccionado.

II. Fundamentación

En una carrera de ingeniería, es fundamental el conocimiento y la comprensión de las ecuaciones diferenciales, ya que éstas aparecen como modelos matemáticos que permiten la representación y el estudio de diversos problemas físicos, químicos, biológicos y otras situaciones reales. La enseñanza de las ecuaciones diferenciales ha experimentado una gran evolución, tanto en términos pedagógicos como de contenido. Durante mucho tiempo se focalizó en la resolución algebraica y numérica, gradualmente se ha ido incorporando a este enfoque el estudio de los aspectos geométricos y cualitativos [3].

Los sistemas de ecuaciones diferenciales en muchos casos expresan matemáticamente la dinámica de un sistema que evoluciona en el tiempo y el análisis cualitativo permite responder preguntas como:

- ¿Qué soluciones representan el sistema en equilibrio? ¿Existen soluciones constantes?
- En caso de existir soluciones constantes (equilibrio) ¿Cómo evoluciona el sistema a partir de un estado diferente al de equilibrio? ¿Estas soluciones tienden a alejarse o a acercarse a la solución constante?
- ¿Cuál es el comportamiento del sistema a largo plazo? ¿Cuál es el comportamiento de las soluciones conforme $t -> \pm\infty$?

Para el estudiante de ingeniería comprender la utilidad del análisis cualitativo en el estudio de los sistemas dinámicos lineales es la antesala para luego abordar los sistemas no lineales, el caos y sus aplicaciones en diferentes áreas como el control automático o la dinámica no lineal, entre otras.

Convencidos entonces de la importancia del tema y teniendo en cuenta la esencia geométrica subyacente en las respuestas a las preguntas planteadas en el párrafo anterior, la herramienta informática con sus facilidades gráficas, numéricas y simbólicas se presenta como la adecuada para diseñar una actividad que facilite el aprendizaje de estos temas. En la actualidad se dispone de calculadoras, computadoras y software que facilitan la introducción y utilización de la tecnología en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales y los textos han incorporado en su ejercitación este recurso [3], [4]. Se encuentran en el mercado un número significativo de software matemáticos, de propósito general, como *Derive*®, *Maple*®. *Mathematica*®. *MATLAB*®, y también hay acceso a software libre como *Octave*, *Scilav*, *Maxima*.

Incluso el mismo docente puede llegar a desarrollar sus propias aplicaciones y/o software y utilizarlo en sus clases. Esta es la opción que este grupo de trabajo ha seleccionado.

Se ha tenido en cuenta que el uso de la tecnología informática puede permitir crear un ambiente de laboratorio experimental en el cual el estudiante puede investigar un objeto matemático, para identificar características, comportamientos y patrones [5]. En el caso de las Ecuaciones Diferenciales, puede ayudar al estudiante a centrarse en la selección de los parámetros de un modelo, observar el comportamiento de las soluciones para distintas condiciones iniciales y además abordar problemas más complejos que los que podrían resolverse en papel.

Sin embargo, es importante que la actividad esté diseñada de manera tal que:

- la utilización del software no sea automática, sino por el contrario debe generar preguntas en el alumno de manera que, motive el estudio de la teoría en búsqueda de respuestas a sus interrogantes,
- el estudiante reaccione con una actitud crítica ante determinados resultados y determine la validez de los mismos,
- promueva en el alumno la combinación de métodos numéricos, gráficos y analíticos a fin de obtener la máxima comprensión del comportamiento de la solución y de del proceso subyacente que el problema modela.

III. Desarrollo de la experiencia

III1. Marco teórico conceptual

Este trabajo se focaliza en la enseñanza y el aprendizaje de los sistemas bidimensionales de ecuaciones diferenciales (ED) lineales de primer orden. Esto resulta interesante ya que cualquier ED de segundo orden puede transformarse en un sistema equivalente de dos ED de primer orden, lo que a menudo permite intuiciones gráficas que muchas veces no se obtiene directamente.

Un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales (SEDOL) homogéneo de primer orden, se expresa:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}, \qquad \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \qquad donde\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\ a_{11}, a_{12}, a_{21}\ y\ a_{22} \in \mathbb{R}$$

(1)

A es la *matriz de coeficientes* del sistema.

Un problema con valor inicial para (1) consiste en encontrar una solución de (2) que satisfaga la condición $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{k}$, y se escribe:

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Se puede demostrar que la Solución General de (1) se puede expresar como una combinación lineal de 2 soluciones de (2) *linealmente independientes* (l.i.)*:* $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$. De manera que se puede escribir:

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{y_1} + c_2\boldsymbol{y_2} \tag{3}$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

La representación gráfica de una solución de (1) es un conjunto de puntos de coordenadas $(t, x(t), y(t))$ que definen una curva en el espacio tridimensional t, x, y. Por otra parte, los puntos (x(t), y(t)) determinan una órbita o trayectoria en el plano x-y, llamado *Plano de fase*, cuya visualización brinda información sobre el comportamiento del sistema modelizado por (1).

Para comprender este tipo de información es necesario definir:

1. Una *solución* del sistema en un intervalo $(t_1,\ t_2)$ esta dada por $x(t)$ y $y(t)$ que verifican (1) para todo valor de *t* en el intervalo $(t_1,\ t_2)$. Entonces, $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son las ecuaciones paramétricas de una curva en el plano x, y, la cual queda definida también por el conjunto imagen de la siguiente función vectorial:
   $$\boldsymbol{c} =< x(t), y(t) >, \forall\ t \in (t_1,\ t_2) \tag{4}$$
2. *Trayectoria*: es una curva contenida en el plano de fase, definida por una función vectorial (4), cuyas funciones componentes son soluciones del sistema dado.
3. *Soluciones de equilibrio*: son soluciones de valor constante, $x(t) \equiv x_c$ y $y(t) \equiv y_c$. En el plano de fase, a este tipo de soluciones les corresponde un punto $p_c(x_c, y_c)$, denominado *punto crítico del sistema.*
4. *Determinación de los Puntos críticos* del sistema (1): $p_c(x_c, y_c)$ *punto crítico* de (1) si $F(x_c, y_c) = 0$ y $G(x_c, y_c) = 0$, siendo $F(x, y) = a_{11}x + a_{12}y$, $G(x, y) = a_{21}x + a_{22}y$
5. *Campo de direcciones*: el sistema (1) define un campo de direcciones $\boldsymbol{V}: \boldsymbol{R^2} \to \boldsymbol{R^2}$:
   $$\boldsymbol{V}(x, y) =< \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} > = < F(x, y), G(x, y) > \tag{5}$$

A cada punto del plano de fase le corresponde un vector tangente a la trayectoria que permite determinar la dirección de la misma y brinda información sobre la evolución temporal del sistema.

6. *Ecuación de las trayectorias*: teniendo en cuenta el sistema (1), la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}$ define una familia de trayectorias en el plano de fase.
7. *Retrato de fase*: es una imagen en el *plano de fase* en la cual se representan los *puntos críticos y* las *trayectorias*.

Para la ED de primer orden $y' = ay$ esperamos una solución de la forma $y = ce^{at}$; para el caso en estudio, sería de esperar una solución de (1) del tipo: $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{v} \cdot e^{\lambda t}$, (6) se demuestra que esto es posible siempre que λ sea un autovalor de *A* y $\boldsymbol{v}$ un autovector asociado a λ; es decir:$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$**,** (7).

En esto se fundamenta el método de autovalores y autovectores para encontrar soluciones de (1).

Encontrar los autovalores de *A* implica resolver la *Ecuación característica* obtenida a partir de (7):

$$|A - \lambda I| = 0, \quad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0, \tag{8}$$

Si el determinante de *A* es no nulo, el único punto crítico de (1) es $P_c(0, 0)$ y es *aislado* ya que no existen otros puntos críticos en un entorno de él. Este es el caso en el que focalizamos el estudio. Teniendo en cuenta (8) los autovalores pueden ser: reales y distintos, reales e iguales o complejos conjugados. La búsqueda de los autovectores asociados para luego definir dos soluciones del sistema (1) linealmente independientes es el paso siguiente. Estas dos soluciones linealmente independientes definen un "*conjunto fundamental de soluciones*" a partir del cual se genera la *Solución General*.

Los diferentes casos dan lugar a distintos tipos de trayectorias y comportamientos en el plano de fase que conducen a una clasificación del Retrato de Fase del sistema la cual se indica en la Tabla 1.

Tabla Nº 1

Clasificación	**Conjunto fundamental de soluciones**	**Estabilidad**
Nodo Impropio Autovalores reales, distintos, de igual signo: λ_1 y λ_2	$\{\boldsymbol{u}\, e^{\lambda_1 t}, \boldsymbol{v}\, e^{\lambda_2 t},\}$	$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$ Inestable $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$ Asintóticamente Estable
Nodo Deficiente $\lambda_1 = \lambda_2$; espacio de los autovectores unidimensional	$\{\boldsymbol{u}\, e^{\lambda_1 t}, (\boldsymbol{u}t + \boldsymbol{w})\, e^{\lambda_1 t},\}$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ Inestable $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ Asintóticamente Estable
Nodo Estrella o Propio $\lambda_1 = \lambda_2$; espacio de los autovectores bidimensional	$\{\boldsymbol{u}\, e^{\lambda_1 t}, \boldsymbol{v}\, e^{\lambda_1 t},\}$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ Inestable $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ Asintóticamente Estable
Punto Silla $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$\{\boldsymbol{u}\, e^{\lambda_1 t}, \boldsymbol{v}\, e^{\lambda_2 t},\}$	Inestable
Centro $\lambda_1 = i\beta$ $\lambda_2 = -i\beta$	$\{Re[\boldsymbol{u}\, e^{i\beta t}], Im[\boldsymbol{u}\, e^{i\beta t}]\}$	Estable
Punto Espiral $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$\{Re[\boldsymbol{u}\, e^{(\alpha+i\beta)\, t}], Im[\boldsymbol{u}\, e^{(\alpha+i\beta)\, t}]\}$	$\alpha > 0$ Inestable $\alpha < 0$ Asintóticamente estable

Tabla1: Se indica la relación entre los autovalores de la matriz de los coeficientes, el conjunto de soluciones linealmente independientes correspondiente y el análisis de la estabilidad el cual indica si las trayectorias que comienzan cerca de un punto crítico permanecen cerca del mismo (sistema estable), tienden al punto crítico (asintóticamente estable) o se alejan de el (inestable).

III2. Observación de las dificultades

A través del seguimiento realizado por los docentes, según fue explicado en la introducción de este trabajo, se ha detectado que los estudiantes manifestaron dificultades para:

- visualizar el campo vectorial asociado a un sistema de ecuaciones diferenciales,
- recuperar el concepto de curva definida por una función vectorial, la relación con sus ecuaciones paramétricas y el vector tangente a la misma.
- obtener información de las trayectorias a partir del campo vectorial, usando el concepto de vector tangente.
- determinar la evolución temporal de las trayectorias solución, a partir de diferentes condiciones iniciales.
- relacionar el tipo de trayectoria con los autovalores de la matriz de los coeficientes en un sistema lineal.
- reconocer trayectorias rectilíneas y su relación con los autovectores de la matriz de los coeficientes.
- encontrar asíntotas a las trayectorias.
- extraer conclusiones sobre la estabilidad de un punto crítico.
- comprender la diferencia entre estabilidad y estabilidad asintótica y observar la importancia de estos conceptos.

III3. Selección de herramienta informática

La siguiente actividad consistió en el diseño una herramienta informática que complemente el estudio de los temas involucrados. La misma debía resultar de fácil comprensión para los alumnos (el curso se dicta en un segundo año), tener una interfaz agradable que los incite a su utilización y cumplir con las características de simular un laboratorio en el cual el alumno experimenta, observa, extrae conclusiones, se plantea preguntas que lo conduzcan a buscar respuestas en la teoría.

Se exploraron las posibilidades que los programas matemáticos ofrecen para la implementación de la aplicación. La selección del software contemplo su aplicación a futuro en otros contextos. También se tuvo en cuenta el idioma, ya que las “ayudas” del software en otro idioma diferente del castellano pueden en un principio crear un obstáculo más o distracción del eje central. De las posibilidades exploradas se optó por el software MATLAB®. Para profundizar acerca del mismo se estudio tanto manuales de uso, como el ayuda que éste ofrece.

Se analizaron los “demos” que contiene, y distintas herramientas propias del programa. MATLAB® cuenta con GUIDE (Graphical User Interface Development Environment) que es un entorno de programación visual disponible para realizar y ejecutar programas que necesiten ingreso continuo de datos. A través de GUIDE, MATLAB® podemos realizar una Interface Gráfica de Usuario (GUI) muy sencilla. Las GUI son la forma en que el usuario interactúa con el programa o el sistema operativo de una computadora. Una GUI contiene botones, campos de texto, menús, gráficos, etc. GUIDE tiene las características básicas de todos los programas visuales como Visual Basic o Visual C++, entre otros, y permite usar distintos controles y maneras de programarlos.

La forma de implementar las GUI con MATLAB® es crear los objetos y definir las acciones que va a realizar cada uno de ellos. Ésto resultó muy atractivo, ya que además de reunír varias de las características que buscábamos para la implementación de nuestra aplicación, las GUI presentan un entorno de programación muy similar al estudiado por los alumnos en asignaturas previas a Ecuaciones Diferenciales, por lo que éstos, si es que lo deseaban, podrían comprender su implementación, e incluso, hasta serían capaces de desarrollar aplicaciones similares por sí solos.

III4. Definición de los objetivos de la aplicación.

Finalmente se procedió al diseño y elaboración de una herramienta informática que permita al alumno, modelar y estudiar problemas cuya dinámica respondan a sistemas de EDOL de primer orden, puntos críticos y estabilidad, el diseño se centro en buscar una aplicación que, mediante la variación de determinados parámetros, sea capaz de abarcar todos los casos de estudio y facilite la comprensión y aprendizaje de tales contenidos. Todo esto debía realizarse a través de una interfaz que resultase cómoda y comprensible para los estudiantes. Teniendo en cuenta este ultimo punto, se trabajó con botones, editores de textos, y gráficos, que se encontraban agrupados de acuerdo a la familiaridad de los parámetros que representaban.

La aplicación debe permitir realizar para un SEDO lineales de primer orden, un análisis de la estabilidad de los mismos, graficar trayectorias para condiciones iniciales prefijadas por el usuario, graficar el campo vectorial asociado al SEDO así como también la evolución temporal de las soluciones. Mediante diversas opciones, el estudiante debe poder variar todos los parámetros del sistema (elementos de la matriz de los coeficientes), las condiciones iniciales y el intervalo de tiempo en el cual se pretende observar la evolución del sistema. Una vez fijados estos valores, se deberá poder visualizar el retrato de fase, los autovalores y las trayectorias del SEDO.

III5. Desarrollo de la aplicación.

El diseño se centro en buscar una aplicación que, mediante la variación de determinados parámetros, sea capaz de abarcar todos los casos mencionados en la Tabla Nº 1 . En la figura 1 se muestra la ventana principal de la aplicación:

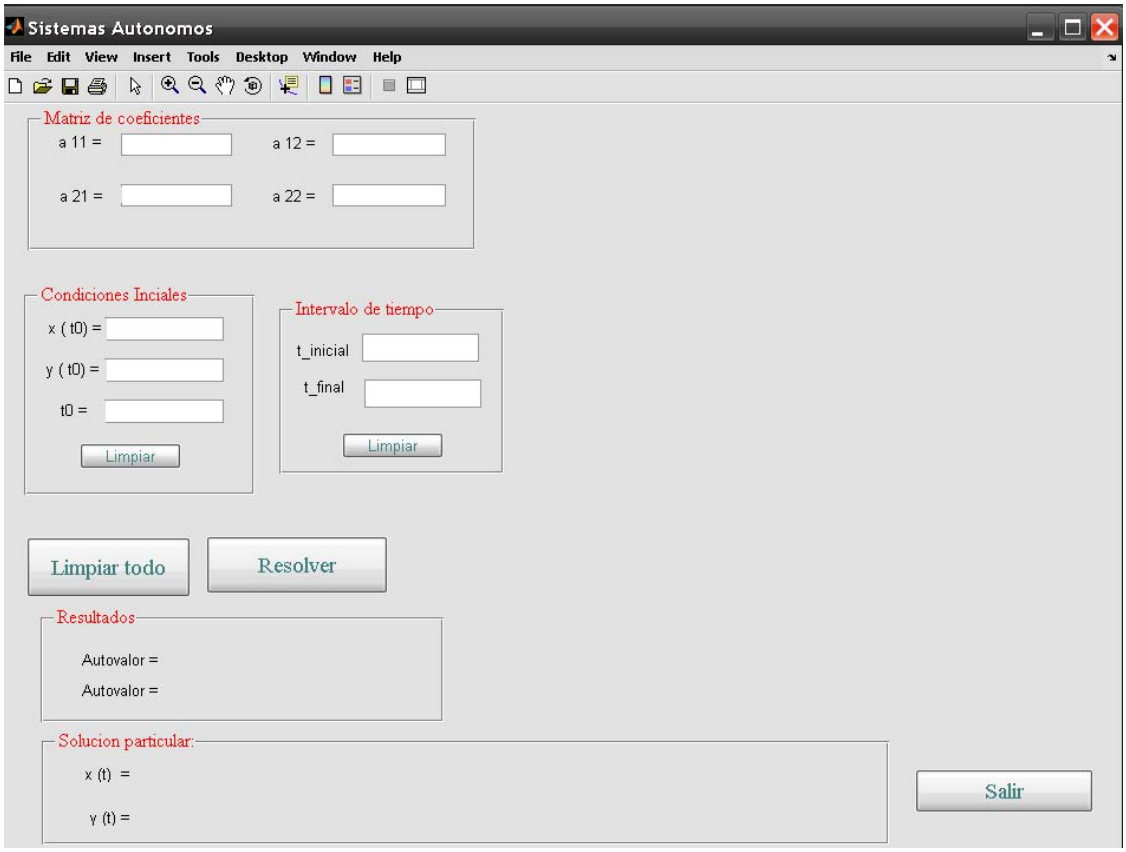


Figura 1: Interfaz de la aplicación

Los parámetros elegidos fueron:

- ✓ Variables de entrada:
  - matriz de coeficientes.
  - condiciones iniciales.
  - intervalo de validez.
- ✓ Variables de salida:
  - Autovalores.
  - Solución del sistema.
  - Retrato de fase.

La ventana principal, cuenta con los siguientes elementos:

✓ Matriz de coeficientes: en este recuadro se dispone de editores de textos, mediante los cuales el usuario puede ingresar los valores de los coeficientes de la matriz A(t).

✓ Condiciones iniciales: aquí es donde deberán ingresarse los valores de las condiciones iniciales que presente el sistema a resolver, para esto se cuenta con tres editores de texto y además con un botón que permite borrar los valores escritos, de modo de poder, para un mismo sistema, variar las condiciones iniciales y observar la trayectoria correspondiente a cada caso.

✓ Intervalo de tiempo: los valores que se ingresen en los dos editores que este recuadro posee, definirán el intervalo de tiempo durante el cual se graficará la trayectoria solución del SEDOL con codiciones iniciales. Posee también un botón que permite modificar el intervalo de graficación, manteniendo los otros parámetros de entradas fijos.

✓ Limpiar todo: es un botón que permite borrar todos los valores ingresados por el usuario.

✓ Resolver: este botón debe pulsarse una vez que se han ingresado todos los parámetros de entrada, ya que su función es resolver el SEDOL con condiciones iniciales y además graficar el retrato de fase del mismo.

✓ Resultados: este recuadro nos mostrará los autovalores del SEDOL definido por la matriz A(t) previamente ingresada.

✓ Solución particular: aquí es donde se informará al usuario la solución del SEDOL, para las condiciones iniciales definidas por el mismo.

✓ Retrato de fase: es una gráfica donde se visualizará el retrato de fase del SEDOL.

III6. Utilidad de la aplicación.

La aplicación creada permite definir un SEDO lineales de primer orden, un análisis de la estabilidad del mismo, observar el conjunto de soluciones para condiciones iniciales prefijadas por el usuario, el campo vectorial asociado al SEDO así como también la evolución temporal de las trayectorias.

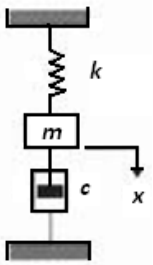
Mediante diversas opciones, es posible variar todos los coeficientes de la matriz A, las condiciones iniciales y el intervalo de tiempo. Una vez fijados estos valores, se muestra el retrato de fase, los valores de los autovalores y las soluciones del SEDO. Es posible modelar todos los casos presentados en la Tabla Nº1.

A continuación se muestra un ejemplo resuelto por la aplicación.

Se considera el sistema masa resorte de la figura 2, con masa $m = 1\ [Kg]$, constante de amortiguamiento $c = 0.2\ [Kg/s]$ y constante del resorte $de\ \ k = 0.5\ [Kg/s^2]$. Se define además un conjunto de condiciones iniciales de modo que la posición inicial sea 0 y la velocidad inicial de 3 [m/s]. La ecuación de segundo orden que define el sistema, puede reescribirse como un SEDOL.

El problema con valores iniciales queda definido por:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -0.2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x'(t) = A(t) * x(t),\ x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{9}$$



$$m * \frac{d^2x}{dt^2} + c * \frac{dx}{dt} + k * x = 0$$

Figura 2: Sistema masa-resorte

Se considera como intervalo de graficación, $0 < t < 50$, luego de introducir todos estos valores, la aplicación brinda el resultado que se muestra en la figura 3. ¿Es el esperado?

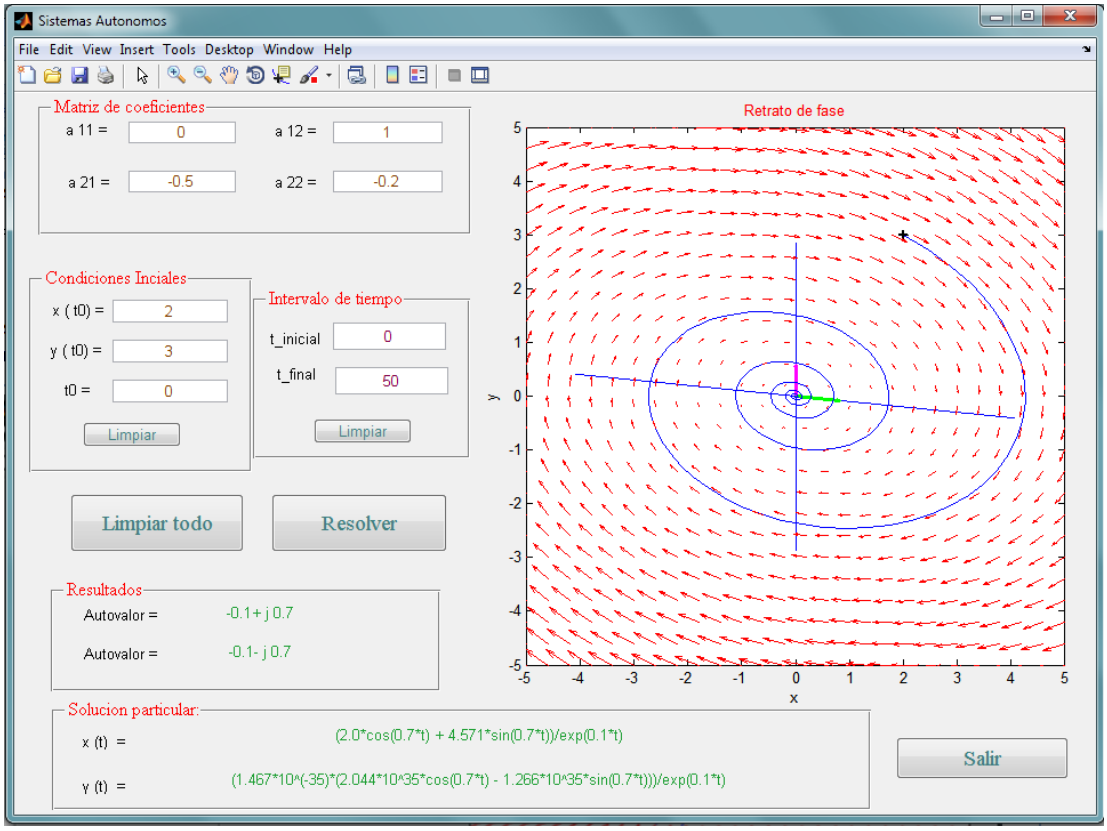


Figura 3: Resolución del problema definido por (9) utilizando la aplicación.

Este análisis es el que se desea promover en los alumnos, que éstos sean capaces de plantearse y responder preguntas como: ¿Es coherente el resultado obtenido con respecto a la interpretación física del modelo? ¿Cómo interpreto la evolución de las trayectorias? ¿Qué representa el punto de equilibrio en el contexto físico del problema? ¿Qué parámetros del sistema determinan que la trayectoria tienda al punto crítico? Si se dejan constantes tres parámetros y se modifica uno ¿Cambia el Retrato de fase?

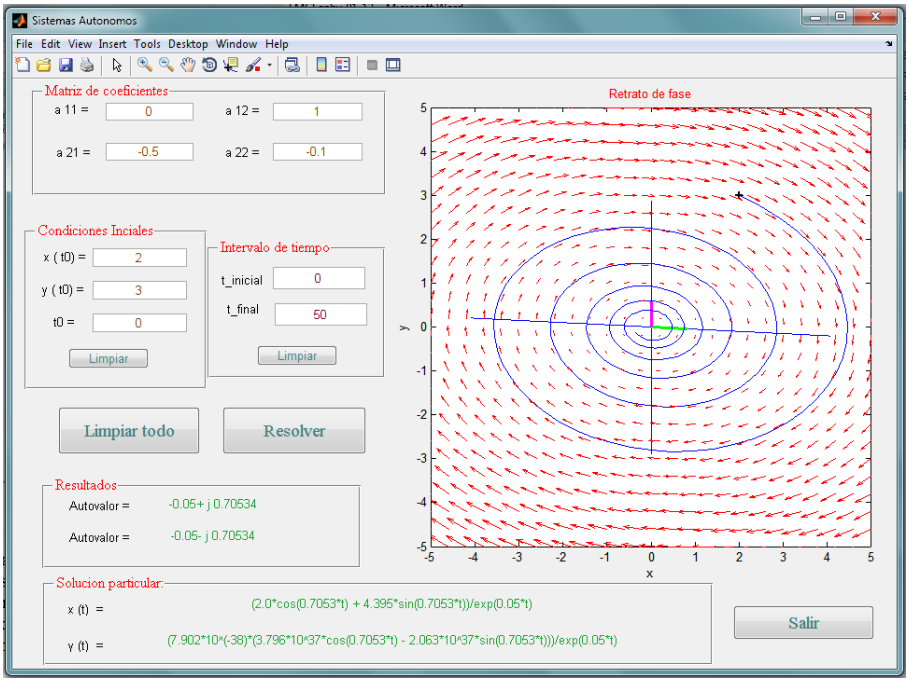


Figura 4: Retrato del sistema con reducción a la mitad del coeficiente de amortiguamiento.

En la figura 2 puede observarse la modificación que sufre el retrato de fase al reducir el coeficiente a_{22} a la mitad de su valor original, el cual a masa constante depende del coeficiente de amortiguación.

III. La experiencia y sus resultados

Con el objetivo de evaluar la aplicación desarrollada, se realizó una primera experiencia en una clase de resolución de problemas. La misma no era una clase habitual, sino que se trató de una clase de repaso de las temáticas que se abordaban en el segundo examen parcial de ED, entre las cuales se encuentra el contenido expuesto en este trabajo.

La experiencia se desarrolló en dos etapas. En la primera, los estudiantes resolvieron los ejercicios con lápiz y papel y luego usaron la aplicación para realizar una autoevaluación pudiendo de esta manera validar los resultados obtenidos o detectar errores que fueron discutidos en conjunto con la coordinación del Docente. En la segunda etapa se experimentó con la perturbación de los coeficientes del sistema lineal lo cual permitió observar los casos sensibles, los cuales corresponden a autovalores reales iguales e imaginarios puros.

Se invitó a los estudiantes a utilizar la aplicación con sentido crítico y como un complemento en la preparación del examen parcial inminente.

En la evaluación parcial, el 70 % obtuvo la máxima puntuación en el ejercicio correspondiente al retrato de fase, los errores conceptuales frecuentemente observados disminuyeron notablemente.

IV. Conclusiones

Se diseñó una aplicación gráfica, de sencilla comprensión y accesible para alumnos de segundo año de ingeniería, que complementa de manera interactiva el material bibliográfico de la asignatura. La experiencia con los alumnos reveló la gran aceptación de la misma, quienes manifestaron conformidad respecto de la interfaz gráfica que presenta, de los problemas que permite resolver, asi como también de su utilidad para la comprensión del tema. Pudo observarse que a partir de la construcción del retrato de fase con el software y su interpretación disminuyeron los errores observados frecuentemente en las evaluaciones parciales.

Desde el punto de vista de los docentes su diseño e implementación favoreció la formación docente, ya que el desarrollo del mismo fue realizado por quien aparece como primera autora de este trabajo y se desempeña como Auxiliar Docente Alumna en la cátedra de Ecuaciones Diferenciales. Durante el proceso, el intercambio con el resto de los profesores fue muy enriquecedor tanto desde el punto de vista disciplinar como pedagógico.

Los resultados observados, motivan a ampliar las situaciones que pueden ser estudiadas a través de esta aplicación informática sumando más complejidad a la misma. Se plantea la resolución de sistemas casi lineales, entre otras posibilidades. Es menester destacar que el objetivo no es reemplazar la resolución de problemas analíticamente con las clásicas herramientas de lápiz y papel, sino que se busca contribuir a una mejor comprensión de los temas estudiados, a una integración de conocimientos y al análisis de diversas situaciones que puedan presentarse en problemas que comparten ciertas características. En síntesis enseñar a pensar el problema en un contexto físico, haciendo estimaciones y conjeturas a partir de la intuición para luego verificar o rechazar.

Referencias Bibliográficas

[1]John Elliott, *Reflecting Where the Action Is: The Selected Works of John Elliott.*: Routledge, 2006

[2] P. R. Pintrich, “The role of metacognitive knowledge in learning, teaching, and assessing”, in , vol.41(4), Theory into Practice,2002, pp219-225.

[3]Henry Ricardo, *Ecuaciones Diferenciales:una introdución moderna* : Editorial Reverté. 2008.

[4] Robert Borrelli, Courtney S. Coleman, *Ecuaciones Diferenciales: una perspectiva de modelación*. Oxford University Press. 2002.

[5] Martin Golubitsky, A*lgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales con uso de Matlab.* Editorial CENGAGE 2001.