DIFICULTADES EN UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN: UN ANÁLISIS DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO.

Sandra Graciela Baccelli, Sergio Anchorena, Stella Maris Figueroa, Gloria Prieto
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina.
sgbaccel@mdp.edu.ar, pollo_mdp@yahoo.com, stellafigueroa@gmail.com, gloria.prieto1@gmail.com.
4. Investigación educativa
Palabras claves: problemas, optimización, procedimientos, configuraciones.

Resumen

En este trabajo se muestra un análisis exploratorio descriptivo del desempeño de un grupo de 38 estudiantes de Ingeniería de la UNMDP al resolver un problema de optimización. Este análisis se realiza utilizando herramientas teóricas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico, particularmente en base a la configuración epistémica y a las configuraciones cognitivas se diseña un protocolo como instrumento de recolección de datos. Los resultados muestran un bajo porcentaje de alumnos que resuelven satisfactoriamente este problema, en los casos de fracaso se detectan las dificultades en los procedimientos empleados identificando aquellos que son críticos sobre los que se podría intervenir para mejorar el desempeño de los estudiantes.

Introducción

La optimización es acaso la tarea más específica del ingeniero, en cualquiera de las especialidades, los problemas que los ingenieros deben resolver implican optimizar la productividad de los recursos disponibles, ya sea maximizando la producción, ya sea minimizando los recursos utilizados.

En este contexto, los contenidos de matemática, referidos a máximos y mínimos relativos en el estudio de funciones, que se tratan en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, en la asignatura Análisis Matemático, se vinculan directamente con las competencias y capacidades necesarias para llevar adelante exitosamente este tipo de tarea.

Es por eso que resulta preocupante que, en primer año de las carreras de ingeniería, cuando se les proponen a los alumnos y alumnas ciertos problemas donde aplican los conocimientos aprendidos en las materias específicas, que requieren realizar tareas de optimización, la mayoría de ellos fracase en su resolución. Este es el caso de Análisis Matemático, materia que se cursa en el primer y segundo cuatrimestre, donde una vez estudiados los conceptos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos se proponen problemas de optimización que aplican dichos conceptos. Es notorio observar la dificultad en el planteo, el análisis y la resolución de estos problemas, que luego al momento de las evaluaciones parciales se evidencia en la no resolución de los ejercicios que involucran los problemas de optimización.

En este marco se plantea el siguiente interrogante como pregunta directriz de la investigación de la cual forma parte este trabajo[1]: ¿Por qué los estudiantes fracasan en la solución de problemas de optimización en un curso de cálculo diferencial?

Para dar respuesta a esta pregunta tan amplia es necesario indagar en profundidad sobre diferentes aspectos o dimensiones en un proceso de instrucción matemática. En esta etapa se realizó un análisis exploratorio descriptivo destinado a determinar en que práctica matemática se producen las dificultades que obstaculizan la resolución de problemas de optimización, cuyos resultados se exponen en este trabajo. Dicho análisis se focalizó en las soluciones a un problema de optimización efectuadas por estudiantes de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, tomando algunos elementos vertidos en investigaciones vinculadas a este tema (Malaspina, 2007)

La complejidad que subyace en dar respuesta a la pregunta directriz de la investigación se puede abordar considerando herramientas que provee el Enfoque Ontosemiótico, y en particular, analizando los significados que los distintos actores asignan a los objetos matemáticos.

A continuación se presentan algunas de las herramientas del marco teórico que sustenta esta investigación.

Fundamentación

El análisis que se presenta se basa en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2008) explica y valora muchos de los sucesos que se producen en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, teniendo en cuenta el triple aspecto de la actividad matemática como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado.

Uno de los constructos principales es el de *práctica matemática,* concebida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Las

[1] Este trabajo forma parte de la investigación realizada en el marco de una tesis de maestría para optar por el grado de Magíster en Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior de la Universidad Nacional de Tucumán.

prácticas pueden ser idiosincrásicas, de una persona, o compartidas en el seno de una institución. En estas prácticas matemáticas intervienen objetos, que pueden ser *ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Al mismo tiempo, que un objeto matemático es *institucional* cuando emerge de un sistema de prácticas matemáticas en un campo de problemas. Por otro lado, un objeto *personal* emerge de la propia práctica igualmente asociado a un la resolución de cierto tipo de problemas en una institución, donde las personas se encuentran involucradas en la resolución de una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. "Las instituciones se conciben como *"*comunidades de prácticas*"*, e incluyen, por tanto, las culturas, grupos étnicos y contextos socioculturales. Se asume, por tanto, el postulado antropológico de la relatividad socioepistémica de los sistemas de prácticas, de los objetos emergentes y los significados" (Godino, Batanero y Font, 2008, p.5)

Los objetos que emergen de las prácticas van sufriendo transformaciones a lo largo del tiempo, incrementando el campo de problemas y modificando el sistema de prácticas para ampliar sus significados. En un primer nivel, Godino (2008), propone los siguientes tipos de objetos denominados primarios:

"• *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)

• *Situaciones-problemas* (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc.)

• *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, etc.)

• *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos)

• *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc.)

• *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, etc.)" (p. 7)

En particular, estos seis tipos de objetos primarios amplían la tradicional distinción entre entidades conceptuales y procedimentales, al considerarlas insuficientes para describir los objetos que intervienen y emergen de la actividad matemática. Estos objetos se relacionan formando *configuraciones,* pensadas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, incluidas las relaciones que se establecen entre los mismos (Figura 1). Estas configuraciones pueden ser *epistémicas,* desde una mirada institucional, o *cognitivas,* desde un punto de vista personal. Los *sistemas de prácticas* y las *configuraciones* se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble faceta personal e institucional. El análisis de estas configuraciones informa sobre la anatomía de la actividad matemática.

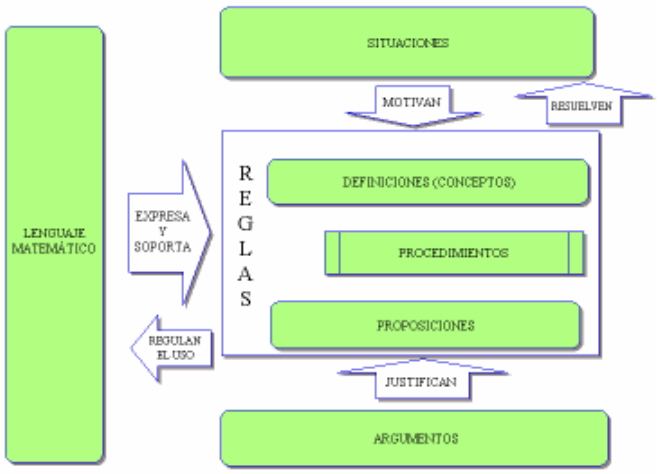

Figura 1. Componentes y relaciones en una configuración de objetos. Fuente: Font y Godino, 2006.

Desarrollo y metodología

El problema de optimización que se presenta en la Figura 2, forma parte del protocolo diseñado para la investigación. El mismo fue administrado a 38 alumnos de un primer curso de Análisis Matemático de las carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Al momento de la toma de los datos ya habían concluido las actividades teóricas y prácticas referidas al tema en cuestión.

Determinar las dimensiones que debe tener un rectángulo con dos de sus lados sobre los ejes X e Y y el vértice opuesto al origen de coordenadas sobre la recta que pasa por (0,3) y (4,0), como el que se muestra en la figura, para que su área sea máxima.

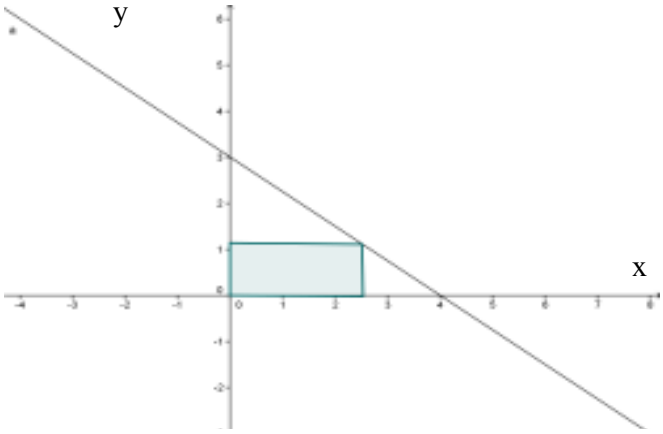

Figura 2. Problema de optimización propuesto

Para realizar un análisis cualitativo de las soluciones obtenidas de los alumnos se confeccionó la configuración epistémica a partir de la resolución de dicho problema efectuada por expertos[2]. La misma se presenta en el Cuadro 1.

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	✓ **Grafico:** ejes cartesianos, gráfica de la recta, rectángulo apoyado en los ejes. ✓ **Términos y expresiones:** dimensiones de un rectángulo, área, notación de derivada, ecuación de la recta de manera no ostensiva pero si evidente por los puntos en los que corta a los ejes, igualdad, implicación. ✓ **Notación: :** f(x) como función área, f'(x) y f´´(x) como derivada primera y segunda respectivamente. x e y como representación de los lados del rectángulo y como variables dependiente e independiente de la recta. ✓ **Símbolos**: números, +, -, ( ) , [ ], =, raíz cuadrada, $\Rightarrow$, <, >. El ostensivo "{" que abarca la expresión que representa el área y la ecuación de la recta o que sirve para agrupar algunas cuestiones con cierta relación.
Situación – problema	✓ Enunciado del problema de optimización.
Conceptos	✓ **Previos:** Área de un rectángulo, derivada primera y segunda, recta que pasa por dos puntos, distancia, dimensiones de un rectángulo, máximo relativo. ✓ **Emergentes**: Área máxima de un rectángulo cuya altura está determinada por la pertenencia de un vértice a una recta dada.
Proposiciones	✓ El área de un rectángulo es el producto de sus lados. ✓ Criterio de la derivada primera o segunda para la obtención de puntos extremos. ✓ Dos puntos determinan en forma unívoca una recta.
Procedimientos	✓ Cálculo de operaciones aritméticas elementales. ✓ Pasaje de la representación gráfica a la representación funcional recta, identificando pendiente y ordenada al origen. ✓ Expresión de la función área en dos variables. ✓ Sustitución de la altura del rectángulo por la función lineal a la que pertenece el vértice libre del rectángulo. Expresar en función de una variable el área. ✓ Expresión de la función área en una única variable. ✓ Cálculo de la derivada primera y segunda, aplicación de las reglas.
Argumentos	✓ Si la derivada segunda en un punto crítico es menor que cero entonces en ese punto existe un máximo relativo. ✓ Si a la izquierda o derecha de un punto de su dominio la función cambia de crecimiento existe máximo o mínimo. ✓ La medida del lado de un rectángulo cuyos lados están sobre los ejes coordenados del primer cuadrante, de vértice libre perteneciente a la recta determinada por dos puntos, que hace máxima su área determina el otro lado.

Cuadro 1. Configuración epistémica del problema de optimización propuesto.

[2] Uno de ellos docente de la asignatura Análisis Matemático y el otro docente de Estadística e investigador.

El protocolo fue diseñado, a partir de la configuración epistémica, tomando como base el modelo presentado por Malaspina (2007). El mismo fue utilizado como una herramienta para registrar los procedimientos y argumentos empleados por los estudiantes en sus respuestas al contrastarlos con la configuración epistémica. Se presenta una síntesis del protocolo en la Tabla 1.

La información que se obtiene del protocolo utilizado se puede analizar desde diferentes aspectos de acuerdo al tipo de objeto primario que se quiere observar y analizar. En este trabajo se presentan los resultados obtenidos al observar los procedimientos en las configuraciones cognitivas, basadas en la configuración epistémica previamente elaborada.

<table>
<tr><td rowspan="2">Hallan lo pedido</td><td colspan="2">Si</td></tr>
<tr><td colspan="2">no</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Procedimiento Utilizado</td><td colspan="2">Plantea la función área</td></tr>
<tr><td colspan="2">Plantea la condición de pertenencia a la recta</td></tr>
<tr><td colspan="2">Expresa la función área en una variable.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Deriva la función área.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Argumenta por que el valor obtenido es óptimo</td><td colspan="2">No</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Si</td><td>Correctamente</td></tr>
<tr><td>Incorrectamente</td></tr>
</table>

Tabla 1. Síntesis del protocolo utilizado para el análisis.

Resultados

La información que se obtiene sobre la base del protocolo utilizado se puede analizar desde diferentes aspectos de acuerdo al tipo de objeto primario que se quiere observar y analizar.

Se consideró como respuesta satisfactoria la de aquellos alumnos que encontraron el punto crítico, sin tener en cuenta que no argumentan por qué el valor obtenido es máximo. Bajo estas condiciones sólo el 18% resuelve correctamente el problema, lo que resulta un porcentaje notablemente bajo.

Sin embargo más allá de este resultado general, es destacable el análisis de los procedimientos involucrados en la resolución, que van determinando la secuencia de pasos que conducen a la resolución final.

En la Figura 3 se detallan los procedimientos estudiados con los correspondientes porcentajes de resoluciones en las cuales aparecen, calculados éstos sobre el total de alumnos a los que se les administró el instrumento.

<table>
<tr><td rowspan="9">Total 100%</td><td colspan="5">No efectúa procedimientos 40%</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Efectúa procedimientos 60%</td><td colspan="4">Sólo plantean la función área 16%</td></tr>
<tr><td colspan="4">Sólo plantean la condición de pertenencia a la recta 12%</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Plantean función área y pertenencia a la recta 32%</td><td rowspan="3">Expresan la función área en una variable 16%</td><td rowspan="2">Derivan 16%</td><td>Correctamente 16%</td></tr>
<tr><td>Incorrectamente 0%</td></tr>
<tr><td colspan="2">No derivan 0%</td></tr>
<tr><td rowspan="3">No expresan la función área en una variable 16%</td><td rowspan="2">Derivan 5%</td><td>Correctamente 5%</td></tr>
<tr><td>Incorrectamente 0%</td></tr>
<tr><td colspan="2">No Derivan 11%</td></tr>
</table>

Figura 3. Procedimientos de las configuraciones cognitivas y sus correspondientes porcentajes.

Teniendo en cuenta que tanto en las clases teóricas como prácticas han resuelto ejemplos y ejercicios del estilo de este problema, el resultado obtenido es esperable y replica una situación similar a la que se ha dado en la oportunidad de la resolución de estos problemas en parciales con otras comisiones.

Se muestran en las Figuras 4 y 5, las resoluciones de dos alumnos con sus comentarios y sus correspondientes configuraciones cognitivas.

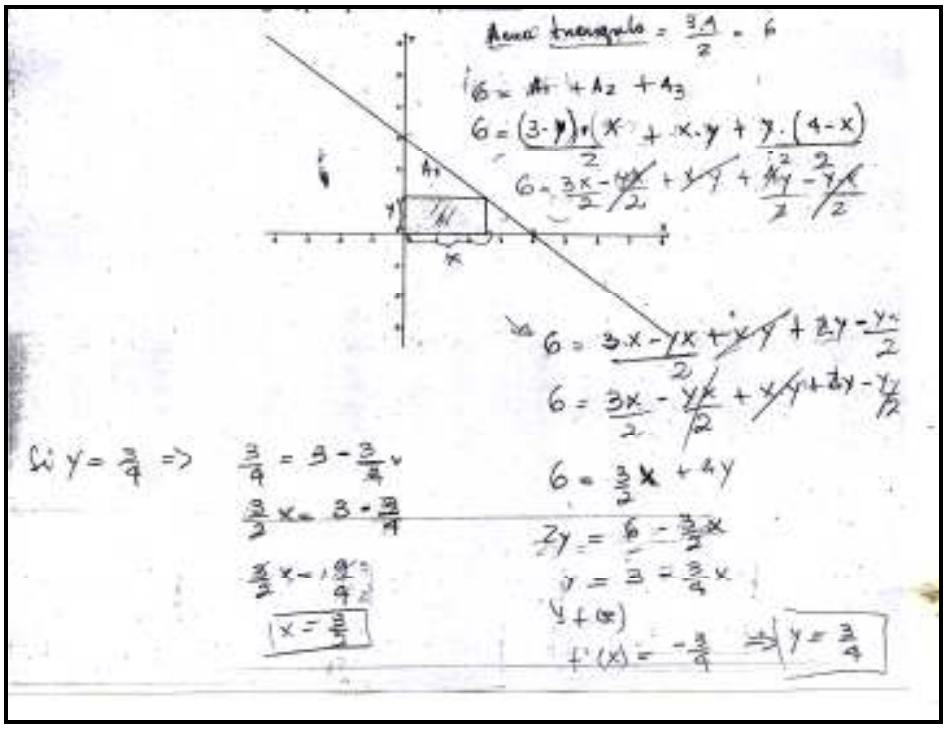

Figura 4. Resolución del Alumno 5 con sus comentarios

Es notable la manera de encontrar la ecuación de la recta determinada por dos puntos. A partir del registro gráfico obtiene el área del triángulo formado por la recta y los semiejes positivos y la iguala a la suma de las áreas del rectángulo y los dos triángulos que la completan. No plantea la función a optimizar correctamente y hace un intento de aplicación del criterio de la derivada primera de manera errónea.

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	✓ **Grafico:** ejes cartesianos, gráfica de la recta, rectángulo apoyado en los ejes. ✓ **Términos y expresiones:** dimensiones de un rectángulo, área, notación de derivada, ecuación de la recta, igualdad, A_1, A_2 y A_3 que indican las áreas que sumadas forman el área de determinada por la recta y los semiejes positivos. Implicación. ✓ **Notación:** f(x) como función área, f'(x) derivada primera. x e y como representación de los lados del rectángulo, para la obtención de los lados de los triángulos y como variables dependiente e independiente de la recta. ✓ **Símbolos**: números, +, -, ( ) , =, ⇒.
Situación – problema	✓ Enunciado del problema de optimización
Conceptos	✓ **Previos:** Área de un rectángulo, área de un triángulo, derivada primera, recta que pasa por dos puntos, dimensiones de un rectángulo
Proposiciones	✓ El área de un rectángulo es el producto de sus lados ✓ Dos puntos determinan en forma unívoca una recta
Procedimientos	✓ Operaciones aritméticas elementales ✓ obtención de la ecuación de una recta a partir de la comparación de las áreas que determina dicha recta ✓ Paso de la representación gráfica a la representación funcional recta ✓ Cálculo de la derivada primera, aplicación de las reglas. ✓ Asignación de un valor para la altura del rectángulo
Argumentos	✓ No explícitos

Cuadro 2. Configuración cognitiva del Alumno 5.

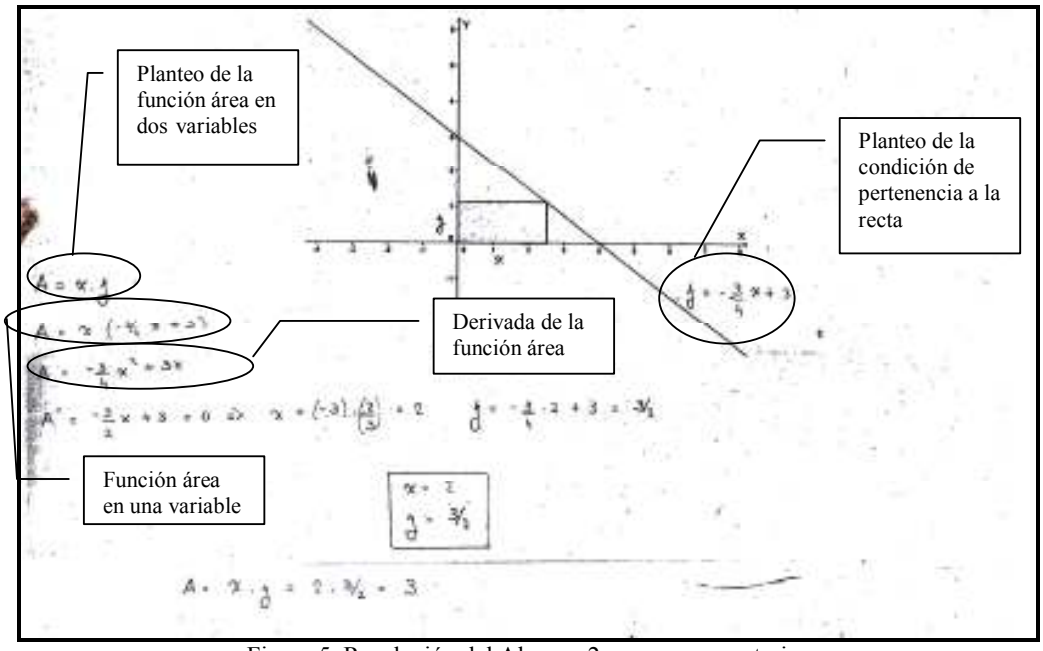

Figura 5. Resolución del Alumno 2 con sus comentarios

Determina la ecuación de la recta a partir de la pendiente y ordenada al origen que le brinda el registro gráfico. Nombra los lados del rectángulo y a partir del planteo del área, que la nombra con una letra A mayúscula, no la expresa como función de una variable pero si hace la sustitución para encontrar la función a maximizar. Busca el punto crítico por medio de la derivada primera y asume que aquel que hace máxima el área, no argumenta porque ese valor es máximo.

Objetos matemáticos	**Especificaciones**
Lenguaje	✓ **Grafico:** ejes cartesianos, gráfica de la recta, rectángulo apoyado en los ejes. ✓ **Términos y expresiones:** dimensiones de un rectángulo, área, notación de derivada, ecuación de la recta, igualdad, ✓ **Notación: :** A como función área, A´ como derivada primera. x e y como representación de los lados del rectángulo y como variables dependiente e independiente de la recta. ✓ **Símbolos**: números, +, -, ( ), =, ⇒.
Situación – problema	✓ Enunciado del problema de optimización
Conceptos	✓ **Previos:** Área de un rectángulo, derivada primera, recta que pasa por dos puntos, distancia, dimensiones de un rectángulo, punto crítico. ✓ **Emergentes**: Área máxima de un rectángulo cuya altura está determinada por la pertenencia de un vértice a una recta dada
Proposiciones	✓ El área de un rectángulo es el producto de sus lados ✓ Criterio de la derivada primera para la obtención de puntos extremos. ✓ Dos puntos determinan en forma unívoca una recta
Procedimientos	✓ Operaciones aritméticas elementales ✓ Paso de la representación gráfica a la representación funcional recta, en forma no ostensiva por la observación de la pendiente y ordena al origen. ✓ Cálculo de la derivada primera, aplicación de las reglas. ✓ Sustitución de la altura del rectángulo por la función lineal a la que pertenece el vértice libre del rectángulo. Expresar en función de una variable el área.
Argumentos	✓ Expresar el área en función de una única variable. ✓ La medida del lado de un rectángulo cuyos lados están sobre los ejes coordenados del primer cuadrante, de vértice libre perteneciente a la recta determinada por dos puntos, que hace máxima su área determina el otro lado.

Cuadro 3. Configuración cognitiva del Alumno 2.

Conclusiones y recomendaciones

Si se tienen en cuenta los procedimientos empleados por los alumnos, más allá de haber resuelto el problema o no, y se los contrasta con la configuración epistémica, se encuentra que algunos son capaces de plantear la función área y, simultáneamente, la condición dada por la ecuación de la recta, pero no logran

expresar la función a optimizar en una variable. Este último es un procedimiento clave en la resolución de este tipo de problema, ya que dados los conocimientos matemáticos en juego es condición necesaria para la obtención de puntos extremos a partir de la derivación de funciones de una variable. Es de observar que los estudiantes que logran expresar la función en una variable son aquellos que la derivan correctamente.

Algunos de los procedimientos y estrategias observadas en las resoluciones de los alumnos, muestran un uso creativo de los objetos matemáticos que no permite su comparación con la solución experta, como el alumno 5, por la utilización de herramientas de manera no algorítmica en los diferentes planteos.

Sólo uno de los alumnos presenta una solución asignando diferentes valores a la variable x, así con la condición dada obtiene el resultado esperado. Ninguna de las soluciones presentadas corresponde al análisis de una función cuadrática, camino posible para la resolución. Es por ello, que se observa que este grupo de alumnos están muy orientados en la búsqueda de herramientas dentro del análisis matemático, dejando de lado los conocimientos previos desarrollados en su curso de ingreso.

A partir de los resultados obtenidos, pueden mirarse críticamente nuestras propias prácticas matemáticas. Estas prácticas, en general, priorizan el cálculo de derivadas dejando en segundo plano la resolución de problemas, que debería ser la actividad central donde intervienen los objetos primarios, en especial los procedimientos fundamentales para dicha resolución. Esta misma situación suele trasladarse a los instrumentos de evaluación, mediante los cuales los alumnos logran la aprobación sin la resolución satisfactoria de problemas de optimización, siendo ésta la tarea más específica del ingeniero que apunta al desarrollo de una de las competencias formuladas en el documento final del XL Plenario del Consejo Federal de Decanos de Ingeniería, CONFEDI(2006): "identificar, formular y resolver problemas de ingeniería"

Los resultados y conclusiones obtenidas impulsan a investigar en propuestas destinadas a contribuir a desarrollar estrategias de enseñanza y evaluación que por un lado contribuyan a identificar y aprender los procedimientos críticos, y, por otro, permitan identificar aquellas falencias que, de permanecer luego de la promoción de una materia, dificulten la adquisición de las competencias propias de la profesión del ingeniero.

Como ya se señaló, este trabajo presenta los primeros resultados de una investigación, que se centro especialmente en los procedimientos, en una próxima etapa, se pretende profundizar el análisis a partir de incluir otro de los objetos primarios propuestos por el EOS, las argumentaciones, que pretenden captar las justificaciones que el resolutor de un problema utiliza para fundamentar su práctica matemática, pero esto, será objeto de futuras presentaciones.

Referencias bibliográficas

Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (2006). Competencias Genéricas de Ingeniería – Documento final. En http://www.confedi.org.ar/component/option,com_docman/task,cat_view/gid,20/Itemid,44/ (Recuperado el 2/12/2010)

Font, V y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa*, 8 (1), 67-98

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14 (3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Versión ampliada del artículo: Godino, J.D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino

Malaspina, U. (2007). Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 10(3), 365-399.