RESOLUCION DE LAS ECUACIONES FISICO-MATEMATICAS

Autores**: Figueroa de Lencina, María Isabel – Estrada de Odstrcil, Graciela Ester**
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología - Universidad Nacional de Tucumán – Argentina
E-mail: mifigueroalencina@yahoo.com.ar - odstrcil@arnet.com.ar

Palabras claves: Ecuaciones Diferenciales Parciales. Fourier

Resumen

La ecuación diferencial de Laplace aparece en el modelado de numerosos sistemas físicos reales. El objetivo principal de este trabajo es presentar la metodología matemática que enfrenta el alumno al resolver este tipo de ecuaciones en distintas geometrías. El método de resolución empleado es el de separación de variables y expansión en series de Fourier. En el desarrollo de esta metodología el alumno percibe la necesidad de resolver problemas de Sturm-Liouville mediante expansiones en autofunciones (trigonométricas, de Bessel, de Legendre, etc.). Esa necesidad despierta su interés y le motiva a involucrarse con este tipo de herramientas matemáticas.

ECUACIÓN DE LAPLACE

Una de las ecuaciones diferenciales parciales más importante que aparece en matemática aplicada es la que está asociada con el nombre de Laplace, en honor de Pierre Simon Laplace, quien, empezando en 1782, estudió sus soluciones detalladamente mientras investigaba la atracción gravitacional de cuerpos arbitrarios en el espacio. Sin embargo, la ecuación apareció primero en una memoria de Euler, en 1752, sobre hidrodinámica.

La ecuación de Laplace en dos dimensiones es: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

Por ejemplo, en un problema bidimensional de conducción de calor, la temperatura *u(x, y, t)* debe satisfacer la ecuación diferencial : $$\alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

donde α^2 es la disipación térmica. Si existe un estado estable, *u* es función de *x* e *y*; en este caso la ecuación se reduce a la de Laplace.

La ecuación de Laplace también se presenta en otras ramas de la física. Al considerar los campos electrostáticos, la función de potencial eléctrico en un medio dieléctrico que no contiene cargas eléctricas debe satisfacer la ecuación: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ dependiendo del número de dimensiones espaciales que intervengan.

De igual forma, la función de energía potencial de una partícula en el espacio libre, sobre la que actúan únicamente fuerzas gravitacionales, satisface la misma ecuación. Consecuentemente a la ecuación de Laplace se la conoce con frecuencia como Ecuación del Potencial.

Otro ejemplo surge en el estudio del movimiento irrotacional, estacionario, de un fluido incomprensible, no viscoso, en dos dimensiones, el cual se basa en dos funciones conocidas como función del potencial de velocidad y función de corriente, las cuales satisfacen la ecuación de Laplace.

En elasticidad, los desplazamientos, que aparecen cuando una barra perfectamente elástica se tuerce, se describen en términos de la llamada función de torsión, que también satisface la ecuación (1).

Puesto que no hay dependencia respecto del tiempo, en ninguno de los problemas mencionados, no hay condiciones iniciales que deba cumplir la solución. Sin embargo, debe satisfacer ciertas condiciones en la frontera, sobre la superficie o curva limitante de la región en la cual la ecuación diferencial deba resolverse. La condición en la frontera más común aparece cuando se especifica el valor de *u* en cada punto frontera; en términos de la ecuación del calor, esto corresponde a prescribir la temperatura en la frontera.

En algunos problemas, por el contrario, se especifica el valor de las derivadas de *u* en la dirección normal a la frontera; la condición sobre la frontera de un cuerpo térmicamente aislado es de este tipo.

El problema de encontrar una solución de la ecuación de Laplace, que tome valores dados sobre la frontera, se conoce como Problema de Dirichlet. En contraste, si se prescriben los valores de la derivada normal sobre la frontera, el problema se conoce como Problema de Neumann.

El problema de Dirichlet en un rectángulo es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad , \qquad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < y < 2$$

$$u(0, y) = u(1, y) = 0$$

$$u(x,2) = 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad , \qquad 0 \le x \le 1$$

El problema de Dirichlet en un círculo es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad , \qquad 0 \le r < 1 \quad , \; -\pi \le \theta \le \pi$$

$$u(1,\theta) = f(\theta) \; , \qquad -\pi \le \theta \le \pi$$

Método de separación de variables

Usaremos el método de separación de variables para determinar soluciones de la ecuación de Laplace con diversas condiciones en la frontera, para dominios rectangulares y circulares. Esta técnica nos permite reemplazar las derivadas parciales por derivadas ordinarias.

Para el problema de Dirichlet en el rectángulo, proponemos un tipo de solución muy particular, a saber, una solución que pueda expresarse como un producto de dos funciones:

$$u(x, y) = X(x)\, Y(y)$$

Al sustituir esta forma de solución en la ecuación diferencial parcial y usar las condiciones de frontera, obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda\, X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''(y) - \lambda\, Y(y) = 0 \\ Y(2) = 0 \end{cases}$$

De la misma manera, para la ecuación de Laplace en coordenadas polares, proponemos una solución de la forma:

$$u(r,\theta) = R(r)\, \Theta(\theta)$$

que derivando y reemplazando en el problema obtenemos:

$$\begin{cases} r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda\, R(r) = 0 \\ R(0) < \infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\, \Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \\ \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi) \end{cases}$$

En ambos problemas llegamos a un *problema de valores y vectores propios.*

Observación: El hecho de que el método de separación de variables pueda o no aplicarse a un problema particular, depende no sólo de la ecuación diferencial, sino de la forma del contorno y de las condiciones de contorno. Para aplicar el método a un problema con dos variables independientes x , y se debe cumplir:

a)El operador diferencial L debe ser separable. Esto es, debe existir una función $\varphi(x, y)$ tal que la expresión: $\dfrac{L[X(x)Y(y)]}{\varphi(x, y)\, X(x)Y(y)}$ sea una suma de una función sólo de x y de una función de y.

b)Todas las condiciones iniciales y de contorno se deben dar sobre las rectas x = const. e y = const.

No obstante, como veremos después, podemos tratar algunos problemas en regiones que no sean rectangulares, o una o más de las condiciones pueden estar en el infinito.

c)Los operadores lineales que definen las condiciones de contorno en x = const. no deben contener derivadas parciales de u respecto de y, y sus coeficientes deben ser independientes de y. Aquellos en y = const. no deben contener derivadas parciales de u respecto de x, y sus coeficientes deben ser independientes de x.

PROBLEMA DE STURM-LIOUVILLE

Los problemas de contorno que encontramos en la resolución de la ecuación de Laplace en distintas geometrías pertenecen a una amplia clase de problemas cuyos valores propios y funciones propias gozan de propiedades muy convenientes. En esta sección desarrollamos esta clase de problema. Para ello recordemos que:

Dado un operador lineal de derivación definido por: $L = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\; D^k$

- Su adjunto es $L^* = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\; D^k(a_k(x)\; .)$
- L es autoadjunto $\Leftrightarrow$ $L = L^*$
- La ecuación $L\, y = 0$ es autoadjunta cuando lo es el operador L.

•Toda ecuación lineal real de segundo orden se puede transformar en autoadjunta.

Trabajaremos en el espacio vectorial C[a , b] , donde definimos el producto escalar:

$\langle f , g \rangle_\rho = \int_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx$. La correspondiente norma asociada a ese producto escalar es:

$$\| f \|_\rho = \left(\int_a^b f^2(x) \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Consideremos la ecuación diferencial junto con las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{cases} (p(x) X'(x))' + (q(x) + \lambda \rho(x)) X(x) = 0 ; \quad a < x < b \\ \alpha_1 X(a) + \alpha_2 X'(a) = 0 \quad ; \quad (\alpha_1 , \alpha_2) \neq (0,0) \\ \beta_1 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \quad ; \quad (\beta_1, \beta_2) \neq (0,0) \end{cases}$$

donde p, p', q, ρ pertenecen a C[a , b], $p, \rho > 0 \quad \forall x \in (a,b)$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ constantes reales e independientes de λ. Este problema se conoce como *Problema de Sturm-Liouville.*

Los problemas de Sturm-Liouville tienen las siguientes propiedades:

1) Los valores propios son reales y forman un conjunto, a lo sumo, numerable y sin punto de acumulación.

2) Si λ_1 , λ_2 son autovalores distintos con X_1 , X_2 las autofunciones correspondientes entonces: $\langle X_1, X_2 \rangle_\rho = 0$. Es decir, X_1 y X_2 son ortogonales respecto al producto escalar que hemos definido. La ortogonalidad existe también en los siguientes casos:

a) cuando $p(a)=0 \quad y \quad \beta_1 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0 \qquad (\beta_1 , \beta_2) \neq (0,0)$

b) cuando $p(b)=0 \quad y \quad \alpha_1 X(a) + \alpha_2 X'(a) = 0 \qquad (\alpha_1 , \alpha_2) \neq (0,0)$

c) si $p(a) = p(b) \quad , \quad X(a) = X(b) \;\; y \;\; X'(a) = X'(b)$ que se denominan condiciones periódicas.

3) Si X_1 y X_2 son dos autofunciones que corresponden al valor propio λ, entonces existe una constante *c*, real, tal que: $X_1 = c\, X_2$. Es decir, el valor propio es *simple* . En el caso del problema de Sturm-Liouville con condiciones periódicas, los autovalores no son simples. (A un mismo autovalor le corresponde dos funciones linealmente independientes en C[a,b]).

Resolvamos ahora el problema de Sturm-Liouville que surgió del problema de Dirichlet en coordenadas cartesianas, al separar las variables:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \quad (2) \qquad\qquad \begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \\ Y(2) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Las autofunciones de (2) son: $X_n(x) = sen\; n\pi x \quad , \quad n = 1, 2, ...$ donde X_n corresponde al valor propio $\lambda_n = n^2 \pi^2$. Para estos valores de λ el problema (3) tiene la solución: $Y_n = sh\; n\pi(2-y)$

Así, cada una de las funciones $u_n(x,y) = A_n \;\; sen \;\; n\pi x \;\; sh\, n\pi(2-y) \quad , \quad n = 1,2,...$ es una solución de la ecuación de Laplace en dos dimensiones que además, satisface las condiciones de frontera homogéneas: $u_n(0,y) = u_n(1,y) = u_n(x,2) = 0$

Para encontrar una solución que también satisfaga la condición de frontera restante *u(x,0) = f(x)*

se forma la serie : $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \;\; sen\; n\pi x \;\; sh\; n\pi(2-y)$

Cuando *y = 0* se tiene: $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \;\; sen\; n\pi x \;\; sh\; n\pi 2 \;\; = f(x) \qquad 0 \leq x \leq 1$

Cómo calculamos A_n para que *u* sea solución?

Lo anterior nos lleva a considerar el estudio del desarrollo de una función en serie de las autofunciones de un problema de contorno.

Desarrollo en serie de autofunciones

Recordemos que en todo espacio vectorial de dimensión finita n, por ejemplo en R^n, todo vector se puede expresar con respecto a la base canónica, como:

$$v = \sum_{k=1}^{n} v_k\, e_k \qquad \text{donde} \qquad v_k = \langle v, e_k \rangle \qquad y \qquad \|v\| = \left\{ \sum_{k=1}^{n} v_k^{\,2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

El concepto de una sucesión o sistema ortonormal de funciones es una generalización natural del concepto de un sistema ortonormal de vectores, con la diferencia que en funciones estamos trabajando en un espacio vectorial de dimensión infinita.

Sea $\{X_n\}_{n\in N}$ un sistema ortogonal de autofunciones. Sea $f : [a,b] \to R$, tal que: $\int_a^b f^2(x)\,\rho(x)\,dx < \infty$. Nuestra meta es expresar f de la siguiente manera:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, X_n(x)$$

Llamemos $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n\, X_n(x)$. Queremos encontrar los coeficientes c_n de tal manera que $S_N(x)$ aproxime a *f(x)* según el método de mínimos cuadrados o, más brevemente en media. Esto es, si

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - S_N(x) \right]^2 \rho(x)\; dx = 0$$

entonces $S_N(x)$ *converge en media* hacia *f(x).*

Como consecuencia de la ortogonalidad de las X_n, se demuestra que si los coeficientes c_n se eligen como:

$$c_n = \frac{\langle f, X_n \rangle}{\|X_n\|_\rho^2} = \frac{\int_a^b f(x)\, X_n(x)\, \rho(x)\, dx}{\int_a^b X_n^2(x)\, \rho(x)\, dx}$$

el error cuadrático medio es mínimo. A estos coeficientes se los llama *coeficientes de Fourier* de *f(x)* respecto al sistema ortogonal $\{X_n\}_{n\in N}$. Si $S_N(x)$ converge en media hacia *f(x)*, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_a^b X_n^2(x)\, \rho(x)\, dx = \int_a^b f^2(x)\, \rho(x)\, dx$$

Esta es la llamada *Ecuación de Parseval.* Se demuestra que ella es válida si y sólo si

$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n\; X_n(x) \right]^2 \rho(x)\; dx = 0$. Si este límite es cero para toda función f para la cual $\int_a^b f^2(x)\, \rho(x)\, dx$ es finita, el sistema $\{X_n\}_{n\in N}$ es *completo.*

Problema de Dirichlet en el rectángulo

Retomemos el problema de Dirichlet en el rectángulo, donde la solución encontrada es:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\; sen\; n\pi x\;\; sh\; n\pi(2-y)$$

Cuando $y = 0$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n\; sen\; n\pi x\;\; sh\; n\pi 2 \;=\; f(x) \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (4)$$

O sea, $A_n \; sh\, n\pi 2$ deben ser los coeficientes c_n del desarrollo de *f* en serie de las autofunciones $sen\; n\pi\, x$. Por lo tanto, $A_n \; sh\; n\pi 2 = 2\int_0^1 f(x)\, sen\, n\pi x\, dx$

Entonces $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{sh\, 2n\pi}\; sen\; n\pi x\; sh\, n\pi(2-y)$$

es una solución formal del problema de contorno.

El método es realmente elegante pero nuestro procedimiento fue bastante negligente, sin preocuparnos del rigor. Observemos que no fijamos ninguna hipótesis sobre *f* . El término solución formal es usado en el sentido de que si el problema tiene solución, y para tal debe imponerse condiciones a *f*, está sujeta a verificación.

Nos preguntamos:

i) La serie solución converge?

ii) Define una función continua?

iii) Qué condiciones sobre *f* para que ocurra (4)?.

Resumiendo: Si *f* es continua en [0,1] con *f(0) = f(1) = 0* y tal que $\int_0^1 f'^2 dx < \infty$ entonces *u* es una solución del problema de Dirichlet planteado. La demostración de este hecho involucra la convergencia uniforme de la serie y de sus derivadas segundas.

Resolución del problema de Dirichlet en el círculo

Una vez separadas las variables en el problema de Dirichlet en coordenadas polares, llegamos a un problema de Sturm-Liouville con condiciones periódicas:

$$\begin{cases} (\Theta'(\theta))' + \lambda\, \Theta(\theta) = 0 \\ \Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \\ \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi) \end{cases}$$

Como Θ debe ser una función periódica de período 2π, se concluye que $\lambda = n^2$, $n \geq 0$, son los autovalores. Obtenemos así el sistema ortogonal: $\{1, \cos n\theta, sen\, n\theta\}_{n\in N}$ que da origen a la serie trigonométrica de Fourier. Reemplazando $\lambda = n^2$ en la ecuación en *R* obtenemos: $r^2 R''(r) + r\, R'(r) - n^2 R(r) = 0$ con la condición de que $R(0) < \infty$.

Para *n = 0* , obtenemos $R_0(r) = 1$. Para $n \in N$, $R_n(r) = r^n$. Por lo tanto,

$$u_n(r,\theta) = r^n (a_n \cos n\theta + b_n\, sen\, n\theta) \qquad n \geq 0$$

Resta mostrar que las $u_n(r,\theta)$ ayudan a descubrir una función *u* que satisfaga también la condición inhomogénea: $u(1,\theta) = f(\theta)$. El candidato natural es $u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n\, sen n\theta)$

Como queremos que $u(1,\theta) = f(\theta)$, será deseable que:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n\, sen n\theta) = f(\theta) \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi$$ lo cual exige que:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta)d\vartheta \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta)\cos n\vartheta\, d\vartheta \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta)\, sen\; n\vartheta\, d\vartheta$$

La solución $u(r,\theta)$ es una solución formal del problema. Para demostrar que realmente es solución tenemos que estudiar las series involucradas, si convergen uniformemente para poder derivar término a término y que verifiquen la ecuación diferencial y las condiciones de contorno. Esto ocurre cuando $f(\theta)$ es una función continua, periódica con período 2π, y $\int_{-\pi}^{\pi} f'^2(\vartheta)\, d\vartheta < \infty$.

Problemas no homogéneos

Nos planteamos ahora el problema de la ecuación de Laplace inhomogénea, llamada *Ecuación de Poisson*, es decir, un problema como el siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x,y)\,, \qquad 0 < x < 1 \;\;,\;\; 0 < y < 2$$
$$u(0,y) = u(1,y) = 0$$
$$u(x,0) = u(x,2) = 0$$

La resolución de este problema usa el método de variación de los parámetros. Para ello recordemos que la solución del problema homogéneo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad , \qquad 0 < x < 1 \;\;,\;\; 0 < y < 2$$
$$u(0,y) = u(1,y) = 0$$
$$u(x,2) = 0$$
$$u(x,0) = f(x) \qquad , \qquad 0 \le x \le 1$$

es: $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \; sen\; n\pi x \;\; sh\; n\pi(2-y)$. Entonces tentaremos una solución del problema inhomogéneo en la forma: $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)\, sen\; n\pi x$

Es decir, suponemos que *u* puede expresarse como una serie de autofunciones $sen\; n\pi x$ donde :

$$b_n(y) = 2\int_0^1 u(x,y)\, sen\; n\pi x\; dx$$

Ahora procederemos a determinar los coeficientes $b_n(y)$ de modo que la ecuación de Poisson sea satisfecha, así como las condiciones *u(x,0) = u(x,2) = 0*. Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos formalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(y)\; sen\; n\pi x \; - n^2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)\; sen\; n\pi x \; = F(x,y)$$

Supongamos que para cada *y*, la función *F(x ,y)* sea representable por su serie de Fourier en senos:

$$F(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(y)\; sen\; n\pi x \qquad \text{donde} \qquad B_n(y) = 2\int_0^1 F(x,y)\, sen\; n\pi x\, dx$$

Luego, $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(y)\; sen\; n\pi x \; - n^2\pi^2 b_n(y)\; sen\; n\pi x \; = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(y)\; sen\; n\pi x$$

Por la unicidad de los coeficientes de Fourier , se tiene:

$$b_n''(y) - n^2\pi^2\, b_n(y) = B_n(y) \qquad \forall n \in N \qquad \text{con } \; b_n(0) = b_n(2) = 0$$

Por lo tanto, los coeficientes $b_n(y)$ son obtenidos como soluciones de un problema de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias. Usando Función de Green obtenemos:

$$G(y,t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{n\pi\, sh 2n\pi}\, sh\; n\pi(2-y)\;\; sh n\pi\, t & 0 \le t \le y \\[2ex] -\dfrac{1}{n\pi\, sh 2n\pi}\, sh n\pi(2-t)\; sh n\pi\, y & y \le t \le 2 \end{cases}$$

Por lo tanto $b_n(y) = \int_0^2 G(y,t)\; B_n(t)\;\; dt$ y $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (\int_0^2 G(y,t)\; B_n(t)\; dt)\; sen\; n\pi x$.

Imponiendo convenientes hipótesis a *F(x,y)* (*F* continua y $\frac{\partial F}{\partial x}$ seccionalmente continua en $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $F(0,y) = F(\pi,y) = 0$), podemos verificar que esta serie puede derivarse término a término, de modo que *u* es una solución.

Ecuación de Laplace en un cilindro

Al escoger otro tipo de coordenadas, tales como coordenadas cilíndricas o esféricas, los problemas conducen a series ortogonales que involucran funciones distintas a las funciones trigonométricas. De hecho, las funciones ortogonales que se usan en tales casos son funciones de Bessel y de Legendre.

Consideremos la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Para una mejor comprensión la resolvemos primero bajo la suposición de que las soluciones son independientes del ángulo polar θ. En este caso, resolvamos el siguiente problema de contorno:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad 0 \le r < 1 \ , \ 0 < z < a$$

$$u(1,z) = 0$$

$$u(r,a) = 0$$

$$u(r,0) = f(r) \quad 0 \le r \le 1$$

Recordemos que sus soluciones pueden interpretarse como distribución de temperatura de estado estable en la región en cuestión. Aplicando el método de separación de variables con $u(r\ ,z) = R(r)\ Z(z)$ se obtienen las ecuaciones:

$$(r\,R'(r))' + \lambda^2 r\,R(r) = 0 \qquad\qquad Z''(z) - \lambda^2\ Z(z) = 0$$

$$R(0) < \infty \qquad\qquad Z(a) = 0$$

$$R(1) = 0$$

La primera de estas ecuaciones es la ecuación de Bessel de orden cero en la variable $\lambda\ r$, y tiene

$$R(r) = A\,J_0(\lambda r) + B\,Y_0(\lambda r)$$

siendo A y B constantes, como solución general. Las exigencias de que $R(0)<\infty$ impone que B=0, mientras que $R(1) = 0$ implica $J_0(\lambda) = 0$. Así, los valores propios son los ceros positivos de J_0 que los llamaremos λ_k, k = 1,2,... y por lo tanto las funciones propias son: $R_k(r) = J_0(\lambda_k r) \qquad k \in \mathrm{N}$

Más aún, cuando $\lambda = \lambda_k$ la solución general de

$$Z''(z) - \lambda_k^{\ 2}\ Z(z) = 0$$

$$Z(a) = 0$$

es : $Z_k(z) = A_k\ sh\,\lambda_k(a-z)$, donde A_k es una constante arbitraria. Así, las funciones

$$u_k(r,z) = A_k\ sh\,\lambda_k(a-z)\ J_0(\lambda_k r), \qquad k = 1,2,...$$

son soluciones de la ecuación diferencial parcial y satisfacen las condiciones de frontera homogéneas. Para que verifique la condición inhomogénea se forma la serie

$$u(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\ sh\,\lambda_k(a-z)\ J_0(\lambda_k r) \quad ,$$

se hace z = 0, y se reemplaza $u(r,o)$ por $f(r)$ para obtener

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\ sh\,\lambda_k(a)\ J_0(\lambda_k r)$$

Se sabe que esta ecuación puede ser satisfecha por cualquier f en PC[0,1] haciendo que $A_k\ sh(\lambda_k a)$ sea el k-ésimo coeficiente en el desarrollo en serie de f relativo a las funciones $J_0(\lambda_k r)$.

En consecuencia: $$A_k = \frac{2}{[J_1(\lambda_k)]^2\ sh(\lambda_k a)} \int_0^1 f(r)\,J_0(\lambda_k r)\,r\,dr$$

Por supuesto, ésta es una solución formal. La tarea de verificar que satisface la ecuación diferencial y las condiciones de contorno no es simple (aún en este caso que estamos suponiendo que la solución no depende de θ).

COMENTARIOS FINALES

De la misma manera que hemos trabajado con la ecuación de Laplace, se puede estudiar la ecuación del calor y la ecuación de la onda.

Para poder resolver la mayoría de las aplicaciones de la física e ingeniería tenemos que pensar en la teoría de los desarrollos en serie para funciones de cualquier número finito de variables independientes. Para ello, necesitamos trabajar en otros espacios vectoriales y definir el producto escalar, por ejemplo, para el caso de dos variables independientes como:

$$\langle f, g \rangle_\rho = \iint_R f(x,y) g(x,y) \rho(x) \rho(y) \, dx \, dy$$

Si trabajamos con coordenadas cartesianas, R es el rectángulo $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ y tenemos que estudiar serie doble de Fourier. Pero, nuestros modelos no siempre están definidos en rectángulos, depende de la geometría con qué coordenadas curvilíneas es conveniente resolverlos. Las más importantes para nuestro propósito, son las ortogonales: cilíndricas, esféricas, etc.

Así, para la ecuación de Laplace en un cilindro usamos las cilíndricas y obtenemos el siguiente problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad 0 \le r < R_1 , \quad -\pi \le \theta \le \pi , \quad 0 < z < \pi$$

$$u(r,\theta,0) = u(r,\theta,\pi) = 0$$

$$u(R_1,\theta,z) = g(\theta,z) \quad , -\pi \le \theta \le \pi, \quad 0 \le z \le \pi$$

Al separar variables tenemos desarrollos en serie doble de Fourier, donde aparecen las funciones de Bessel de argumento imaginario, con lo cual se complica la resolución del problema.

Si la ecuación de Laplace está definida en una esfera, utilizaremos coordenadas esféricas, por ejemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(sen\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{sen^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \ 0 \le r < R_1, -\pi \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le \pi$$

$$u(R,\theta,\phi) = f(\theta,\phi), \qquad ´-\pi \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

Al separar variables, tenemos desarrollos en serie doble de Fourier donde aparecen las funciones asociadas de Legendre.

Todos estos temas son motivo para un próximo trabajo.

CONCLUSIONES

En base a la reciente experiencia realizada en esta primera implementación en la asignatura Cálculo IV, de las carreras de Ingeniería de la FACET, UNT, se pueden enunciar las siguientes conclusiones preliminares:

- Se observa mayor interés de parte de algunos alumnos en estudiar e investigar temas como: Espacios Euclideanos infinitos dimensionales, Series de Fourier y desarrollo de funciones en Series de Fourier.
- Se les presenta le necesidad de estudiar e investigar Espacios Euclidianos de varias variables independientes, en distintas coordenadas, Series dobles de Fourier y el desarrollo de funciones en Series dobles de Fourier.

BIBLIOGRAFÍA

- Figueiredo, D. G.(2000): *Análise de Fourier e Equacoes Diferenciais Parciais,* Brasil: Projeto Euclides.
- Kreider,D.L. , Kuller,R.G. , Ostberg,D.R. ,Perkins, F. W. (1971): *Introducción al Análisis Lineal,* México: Fondo Educativo Interamericano.
- Novo, S. , Obaya , R. , Rojo, J. (1995): *Ecuaciones y Sistemas Diferenciales,* España: Mc Graw-Hill.
- Weinberger, H.F. (1979): *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales,* España: Editorial Reverté.