DETERMINACIÓN DEL RADIO DE GIRO DE UN CUERPO: TRATAMIENTO DE DATOS EXPERIMENTALES

Bianchi, Norma; Dominguez, Hugo; Marchioni, Marcelo.
Facultad de Ingeniería UNCPBA, Cátedra de Física. Olavarría, Argentina.
nbianchi@fio.unicen.edu.ar; hdomingu@fio.unicen.edu.ar; mmarchio@fio.unicen.edu.ar
Área temática: Aplicaciones de la Matemática

Palabras claves: Radio de giro. Linealización. Centro de masa. Péndulo físico.

Resumen

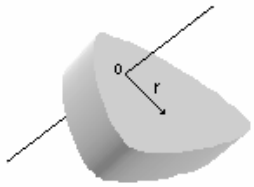
Este trabajo presenta una aplicación de conceptos matemáticos en el desarrollo de una actividad experimental de Física en carreras de Ingeniería: "Determinación del radio de giro de un cuerpo".
Estos conceptos, adquiridos en cursos previos al de Física, son, entre otros: propiedades del valor absoluto, funciones (linealización, parámetros, interpretación gráfica y cálculo de extremos) y tratamiento estadístico de resultados experimentales.

Introducción

El desarrollo de actividades de laboratorio en la cátedra de Física involucra, además de una serie de mediciones experimentales que, en la mayoría de los casos es sencilla, el uso de herramientas matemáticas en el análisis, resolución e interpretación de los datos recolectados. El buen manejo de estas herramientas es fundamental para lograr el objetivo de la práctica y es una de las complicaciones que a menudo se observan en las clases.
En el presente trabajo se expone una aplicación matemática en el desarrollo de la actividad experimental: "Determinación del radio de giro de un cuerpo", tal como lo hacen los alumnos de la Cátedra de Física de la Facultad de Ingeniería de la UNCPBA.

Fundamentación

El conocimiento del momento de inercia de un objeto que gira alrededor de un eje es fundamental para la descripción de su dinámica.
Cuando la forma del objeto es asimilable a un cuerpo geométrico sencillo su momento de inercia puede ser calculado por definición:



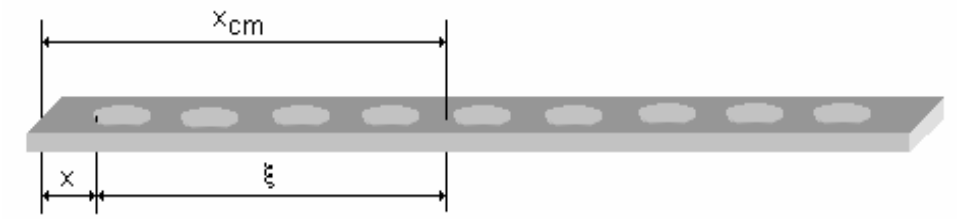
$$I_0 = \int_V r^2 dm$$

Donde: r es la distancia desde el eje de giro hasta un punto cualquiera del cuerpo
y dm es el diferencial de masa del cuerpo

Sin embargo, en la práctica, son más frecuentes los objetos irregulares, donde la resolución analítica de esa integral resulta complicada o imposible. En estos casos conviene definir el radio de giro y calcularlo experimentalmente.
Se llama radio de giro (**K**) a la distancia respecto al centro de masa a la que habría que colocar una masa puntual igual a la del objeto, de tal manera que verifique la ecuación

$$\int_V r^2 dm = m K^2$$

Conocido este radio, el momento de inercia del objeto respecto a un eje que pase por el centro de masa se puede obtener haciendo $\mathbf{m\,K^2}$.
En nuestra experiencia, el cuerpo cuyo radio de giro se quiere calcular, es una barra prismática de hierro con perforaciones circulares distribuidas regularmente a lo largo de ella:



Cuando se suspende la barra de un eje que pasa por una de las perforaciones y se la pone a oscilar alrededor de él con una amplitud pequeña, se obtiene un péndulo físico cuyo período de oscilación es aproximadamente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + m\,\xi^{2}}{m\,g\,\xi}}$$

donde
I_{cm}: momento de inercia respecto al centro de masa,
ξ: distancia desde el centro de masa hasta el punto de suspensión,
m: la masa de la barra.

Si las distancias se miden desde un extremo de la barra, conviene sustituir ξ por $|x - x_{cm}|$, quedando entonces:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + m\left(x - x_{CM}\right)^{2}}{m\,g\,|x - x_{CM}|}}$$

Trabajando matemáticamente esta expresión, obtenemos:

$$\frac{gT^{2}}{4\pi^{2}} = \frac{I_{CM} + |x - x_{CM}|^{2}}{|x - x_{CM}|}$$

Llamando $T^{*} = \dfrac{gT^{2}}{4\pi^{2}}$ y teniendo en cuenta que $\mathbf{I_{CM} = m\,K^{2}}$ se llega a:

$$\boxed{T^{*} = \frac{K^{2}}{|x - x_{CM}|} + |x - x_{CM}|} \qquad \textbf{(1)}$$

El inconveniente de la ecuación (1) es que tiene dos incógnitas: el radio de giro (*K*) y la posición del centro de masa (x_{CM}). En la siguiente sección se explica el procedimiento para resolverla.

Desarrollo experimental

Se suspende la barra de manera que un eje de giro pase por el primer orificio. Se hace oscilar el péndulo así formado con pequeña amplitud y se determina el tiempo que emplea en efectuar **20 oscilaciones**. Con estos valores se calcula el período de cada oscilación y se repite esta operación tres veces con cada orificio, para obtener una serie de valores experimentales que permitan una mejor aproximación de los resultados.
Tomando $\mathbf{x_i}$ y $\mathbf{x_j}$ con **i,j < 10** y los T^{*}_{i} y T^{*}_{j} correspondientes, se puede obtener, a partir de la ecuación **(1)**, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para luego hallar $\mathbf{x_{CM}}$, resultando:

$$x_{cm} = \frac{x_j^{2} - x_i^{2} + A_j x_j - A_i x_i}{2\left(x_j - x_i\right) + A_j - A_i} \qquad \textbf{(2)}$$

Tomando cinco pares (x_i ; T^{*}_{i}) , (x_j ; T^{*}_{j}) se obtienen, con la ecuación (2), cinco valores de x_{CM}; luego, el valor medio de x_{cm} y su respectiva desviación, $\boldsymbol{\sigma}_{x_{cm}}$.

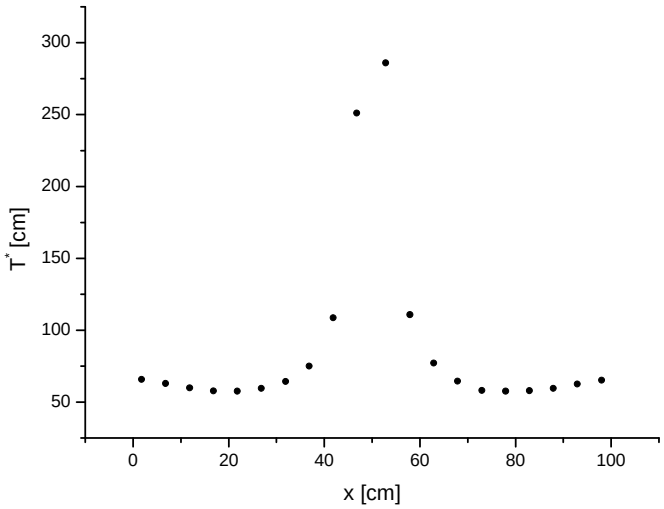
Con el valor de $\boldsymbol{x_{cm}}$ hallado anteriormente, y multiplicando ambos miembros de la ecuación **(1)** por $|x - x_{cm}|$ se puede linealizar la expresión:

$$T^{*}|x - x_{CM}| = K^{2} + |x - x_{CM}|^{2} \qquad \textbf{(3)}$$

Luego, la representación de $T^*\left|x - x_{cm}\right|$ en función de $\left|x - x_{cm}\right|^2$ se puede aproximar con una recta. A partir de la ecuación de la recta que mejor se aproxime al conjunto de puntos, se obtiene el valor de K con su respectivo error.

Resultados

Representando gráficamente T* vs x, se obtiene:

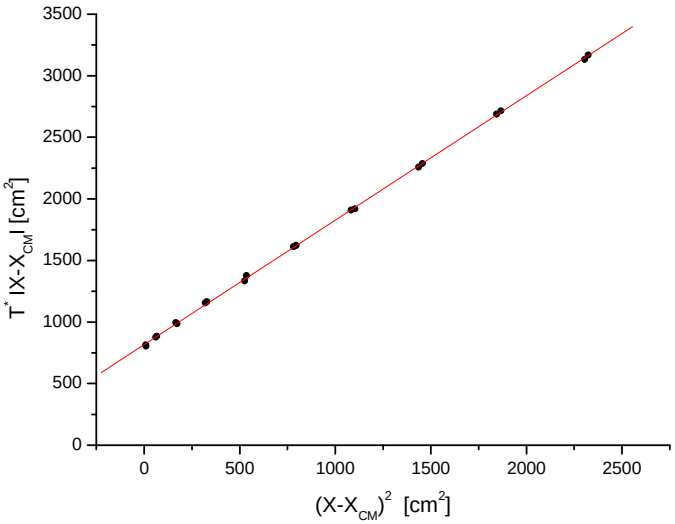


Cuya curva responde a la función:

$$T^* = \frac{K^2}{\left|x - x_{CM}\right|} + \left|x - x_{CM}\right|$$

Como se puede observar, hay una asíntota vertical en $x = x_{CM}$, por lo que, a partir del gráfico, se puede obtener el valor de x_{CM}.
Se puede demostrar mediante el uso del cálculo diferencial que el mínimo de la función en el intervalo $(0 , x_{CM})$ se encuentra en $x=x_{CM} - K$ y en el intervalo (x_{CM} , L),la función tiene un mínimo en $x = x_{CM} + K$.

La representación gráfica de la ecuación (3) es



$$T^*\left|x - x_{CM}\right| = K^2 + \left|x - x_{CM}\right|^2$$

El valor del radio de giro se obtiene a partir de la ordenada al origen de esta recta.
Una vez hallado *K*, y midiendo la masa *m* del cuerpo, se puede calcular el valor aproximado del momento de inercia.

Conclusiones

La física básica requiere la aplicación de herramientas del cálculo diferencial y del álgebra que los alumnos debieran haber adquirido previamente en las asignaturas correspondientes al área de Matemática.
Entre las herramientas matemáticas aplicadas en esta experiencia, podemos mencionar:

- Propiedades del valor absoluto, necesarias para llegar a la ecuación (2).
- Linealización de funciones, para llegar de la ecuación (1) a la expresión (3)
- Reconocimiento de los parámetros de funciones lineales, para la obtención de características físicas de un sistema.
- Tratamiento estadístico de resultados experimentales, en el cálculo de valores medios y errores.

Bibliografía

- Halliday, Resnick y Krane, “Física para estudiantes de ciencias e ingeniería”, 4ta. Ed., Vol. I, Cía. Editorial Continental, S.A. México, (1985).
- J. E. Fernández y E. Galloni, “Trabajos prácticos de Física”, , Editorial Nigar, Buenos Aires (1968).
- Guía de Trabajos Prácticos de Laboratorio, Cátedra de Física I, Facultad de Ingeniería UNCPBA.
- Stewart, “Cálculo. Conceptos y contextos”, 3ª ed., (2006).