MATHLETS Y ANTIMATHLETS EN LA ENSEÑANZA DE LA INGENIERÍA

Marcela Martins, Fernando Acero
Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires, Argentina.
mmartins@fi.uba.ar, facero@fi.uba.ar

Palabras clave. Mathlet. Antimathlet. Interactividad.

Resumen. Embebido en las nuevas tecnologías de la información, el objeto digital de aprendizaje denominado *mathlet*, introduce la interactividad y la multiplicidad de registros semióticos en la enseñanza de conceptos específicos en la ingeniería. El propósito de este trabajo es la fundamentación de los principios de diseño del género mathlet, el desarrollo de su aplicación en dos ejemplares en sendas áreas de la formación básica y la naturaleza de las actividades que impiden que el mathlet relegue los aspectos teóricos que lo animan, denominadas *antimathlet*. En la conclusión, se evalúan los resultados, y se hace una breve estimación de las implicancias de dejar en manos de los expertos en informática el desarrollo de estos objetos.

I. Introducción

En este apartado se describe sumariamente el contexto de nivel macro en el que se inscribe el mathlet, sus coordenadas entre las tecnologías de la información, y la importancia de introducir un antimathlet que remita necesariamente a los principios teóricos que el mathlet objetiva.

El mundo actual se ha transformado de un modo radical, cambiando el universo de la enseñanza y hasta la definición misma de aprendizaje. Se reconocen diversos tipos de alumnos (alumnos táctiles, alumnos visuales, alumnos verbales), diversos métodos de diseño de material didáctico (constructivistas e instructivistas en una clasificación gruesa), a la vez se insiste en la complejidad de las relaciones que pueden establecerse entre el uso de la tecnología y los procesos de enseñanza y aprendizaje en la ingeniería (Badia 2006, 1-6). Actualmente, aunque con sensibles matices, se ha instalado un paradigma dominante que presenta al estudiante como un sujeto que participa muy activamente de su aprendizaje, y que ajusta constantemente sus conocimientos previos con la nueva información que debe integrar y reconfigurar con suma flexibilidad. Es de señalar que, teorías muy influyentes en la actualidad, tales como las constructivistas y las socio-culturales emparentadas con Vygotsky, aunque no han sido desarrolladas para la matemática en particular, no resultan inconsistentes con esta modalidad en tanto se considere que en la matemática "el conocimiento es adquirido por construcción y no mera transmisión, en un proceso que es restringido internamente por los conocimientos previos, y externamente por los productos culturales como el lenguaje y la notación" (Engelbrecht y Harding 2005b, 254).

Desde la perspectiva constructivista se afirma que la educación en general en una sociedad con altos niveles de incertidumbres debiera incorporar en los procesos educativos una orientación que deje lugar a la personalización de los procesos de aprendizaje, permitiendo a los alumnos la oportunidad de construir sus propios aprendizajes (Tedesco 2009, 50-55). En esta perspectiva, la enseñanza es considerada como la provisión articulada y flexible de un conjunto de ayudas educativas a los estudiantes durante un período determinado. Allí interviene el concepto de andamiaje, basado en la *zona de desarrollo próximo* (Vygotski 2006, 133), que refiere la conveniencia de reducir los grados de libertad disponibles para el estudiante en el momento de encarar la resolución de un problema. El profesor que construye un *objeto digital de aprendizaje* identifica los rasgos relevantes de un problema y modela posibles soluciones, permitiendo que el estudiante acceda a la ejecución de tareas que, sin el andamiaje, se hallarían en un nivel inaccesible. El andamio educativo se presenta como "una forma de ayuda proporcionada por el profesor, que posibilita los estudiantes el progreso desde sus habilidades cognitivas actuales hasta un pretendido objetivo educativo" (Allen 2003, 270-274, Badia 2006, 1-8).

Tales ayudas no sólo pueden introducirse mediante las tecnologías de la información y comunicación actuales: también puede decirse que, posiblemente, resulten ser el soporte más natural en el que conviene implementarlas, en tanto que se hallan alineadas con la cultura digital connatural al alumno universitario, en la que intervienen la flexibilidad y la interactividad. Su presencia, además, debiera ser especialmente intensa en los primeros años de estudio de las carreras de ingeniería, donde tienen lugar los aprendizajes de los saberes básicos en su doble acepción de imprescindibles a la vez que esenciales (Tedesco 2009, 77).

¿Pero de qué naturaleza pueden ser esa ayudas? Es precisamente entre estas ayudas donde logran ubicación los *mathlets*, tal como aquí son tratados. *Mathlet* es el nombre de una especie que pertenece al género de los *objetos de aprendizaje*, siendo la diferencia específica determinada por el tema del que trata, siendo ese tema la matemática para un *mathlet*. Un objeto de aprendizaje es[1] "cualquier recurso que pueda ser reutilizado como ayuda del aprendizaje" (Wiley 2001, 5), se inscribe en el paradigma computacional del lenguaje orientado a objetos, y la idea es diseñar objetos flexibles que permitan el aprendizaje de segmentos de conocimiento que puedan ser utilizados por una variedad de usuarios en una diversidad de contextos de aprendizaje, y que el

[1] El uso todavía no ha sancionado aún una definición común aceptada por todos los investigadores. La lista siguiente permite, sin embargo, deducir sus notas esenciales: "herramientas interactivas en web que permiten el aprendizaje de conceptos específicos para ampliar, potenciar y guiar los procesos cognitivos de los aprendices" (Kay y Knaack 2007, 6); "material al que puede accederse desde la red, diseñado para ilustrar, complementar o asistir el aprendizaje de diversos usuarios en variadas localizaciones" (Cramer, 2007, 127); "un segmento de información digitalizado, reutilizable y accesible desde la red" (Walsh, 2006).

profesor integra y recombina los segmentos de acuerdo a sus propósitos de enseñanza. Refiriéndose al siglo XXI, (Cramer 2007, 130) afirma que el estudiante actual se halla disconforme con la baja tecnología presente en su educación formal, donde a menudo el cumplimiento de las tareas no implica la utilización de Internet, y sugiere la conveniencia de disponer en red de material de calidad para contribuir a los buenos aprendizajes. En síntesis, que el estudiante actual reclama la utilización de tecnología actual para aprender: un mathlet puede ser una respuesta parcial a tal reclamo. La presencia de los objetos digitales de aprendizaje en la educación, desde su aparición a principios de la década de 1990 ha ido creciendo exponencialmente (Walsh 2006, 13ss.), y en particular ha sido mayor el crecimiento de la especie mathlet, con la interactividad y flexibilidad de uso.

Siendo el mathlet un objeto de utilización sencilla en el aspecto operativo, y especialmente creado para dotar de significado y profundizar la naturaleza de la comprensión de un concepto, que por su misma definición es de naturaleza teórica, este aspecto podría quedar ensombrecido por la intensidad y facilidad de operar con él. Si el mathlet está diseñado para iluminar un concepto, no debe ser su luz de tal intensidad que deje fuera de foco al concepto mismo. Más aún, el material mismo que constituye el mathlet, su propia lógica de funcionamiento es precisamente el concepto para el que ha sido construido. En un lenguaje aristotélico podría decirse que su causa formal y su causa material quedan prácticamente fundidas en el mismo objeto. Una manera de mantener el alerta en el estudiante acerca de la importancia fundamental de la teoría que *posibilita* la práctica con la que está interactuando, es lo que puede denominarse *antimathlet*. Se denomina así a cualquier actividad, incluida en el mathlet, que exija una respuesta que no sea posible mediante la manipulación del mathlet (Cf. Kalman 2005, 790). La respuesta específica a una actividad de tal naturaleza es menos importante que la constatación del alumno que no puede llegar a ella por ninguna acción emprendida con el mathlet.

II. Fundamentación

En esta sección se presentan los dos niveles de los argumentos que introducen los objetos digitales de aprendizaje: los que sustentan la conveniencia de su presencia en el contexto educativo y los que los caracterizan en sí mismos mediante la noción de interactividad.

Del contexto cuyas variables macro sociales se describen en el apartado anterior, surgen varias vertientes que sustentan tanto la oportunidad como la conveniencia de la introducción del mathlet entre las ayudas educativas destinadas a los alumnos de las carreras de ingeniería. Se trata de un objeto que, en sus formas externas, se asemeja a los que el estudiante está acostumbrado a manipular cotidianamente. Permite, además, que el alumno pueda trazar sus propias rutas de aprendizaje a través de sus operaciones sobre el mathlet, dentro del mapa más o menos suelto que haya sido previsto por el autor del mathlet.

En cuanto al antimathlet, encuentra su razón de ser en la cada vez más poderosa necesidad de ascender de la información al conocimiento. En efecto, se acepta normalmente que las informaciones adquiridas en la formación universitaria no serán suficientes para el ejercicio de las profesiones durante toda la vida activa de los egresados. Por el contrario, en períodos cada vez más breves, los conocimientos adquiridos ingresarán en la categoría de obsoletos, o por lo menos insuficientes, obligando al profesional a procesos permanentes de reconversión. En esta realidad, se ha distinguido (Tedesco 2009, 105-106) entre dos órdenes de conocimiento: el conocimiento inferior –las aplicaciones en segmentos específicos de problemas– y el conocimiento superior –los conocimientos de conocimientos– ambos necesarios; pero mientras que el primero se halla sujeto a desactualizarse varias veces en el curso de una vida, el segundo mantiene su vigencia. Este núcleo, el conocimiento del conocimiento, está integrado por los aspectos propios del pensamiento mismo, nociones tales como hipótesis, prueba, demostración, validez. En pocas palabras: menos gravita el conocimiento de los hechos de un determinado segmento disciplinar, que la capacidad de dar una explicación de las relaciones entre esos hechos, lo que usualmente queda comprendido en la connotación de lo que se denomina *teoría*[2]. La educación superior incluye en sus propósitos que los estudiantes puedan dar cuenta no sólo de cómo son las cosas, sino por qué son de esa manera, lo que se llama una explicación (Kalman 2005, 789).

En lo que respecta a rasgos deseables salientes en un mathlet (además de su inherente interactividad), (Heck, Boon y van Velthoven 2008, 235-252) señalan su capacidad de contribuir a la visualización de conceptos, exploración de situaciones contextuales (incluyendo contextos de la misma matemática), cubriendo la brecha entre el conocimiento informal y el formal en matemática Se distinguen entre dos tipos de mathlets: el mathlet-modelo (que ayuda a desarrollar comprensión matemática, con una estructura semiabierta), el mathlet-ejercicio (ayuda a desarrollar habilidades matemáticas específicas, con una estructura más cerrada en la que se proponen tareas cuyas respuestas son evaluadas para devolver una realimentación). Uno y otros intervienen en la motivación y permiten a los estudiantes trabajar en sus personales niveles de pensamiento, adaptándose así a la diversidad de rasgos individuales; por otra parte, la interacción visual y las características dinámicas del mathlet, junto a su poder de cálculo, permiten una mejor comprensión de la matemática liberándolos de los aspectos algorítmicos, para centrarse en los contenidos sustanciales, y la realimentación es mucho más poderosa que la que podría obtenerse con textos simples.

[2] La teoría entendida como el "conjunto de reglas, incluso de las prácticas, cuando estas reglas, como principios, son pensadas con cierta universalidad y, además cuando son abstraídas del gran número de condiciones que, sin embargo, influyen necesariamente en su aplicación" y también de la "facultad de juzgar por el que el práctico diferencia si el caso cae o no en la regla" Cf. (Kant 2008, 10-11).

La interactividad es, si no el rasgo definitorio del mathlet, sí al menos una condición necesaria para ser considerado como tal. La amplitud, alcance y connotación del término se han tornado sumamente borrosos, con su uso como argumento de venta en el marketing de las tecnologías informáticas amigables, lo que no impide que sea considerado como el "…concepto más importante en la cibercultura" (Silva 2005, 19). Para este estudio, se aceptará como definición de trabajo que una aplicación es interactiva si permite una relación activa constante y prácticamente instantánea entre el estudiante y la información, con acciones recíprocas entre el usuario y reacciones del simulador visibles en pantalla. Se postula que la esencia de la interactividad se halla en el flujo bidireccional de acciones y reacciones entre el objeto y el sujeto, o utilizando el lenguaje de las teorías de la comunicación, en una suerte de fusión entre el emisor y el receptor, denominada hibridación (Silva 2005, 161).

El rasgo más notable del *mathlet* es esa capacidad de alterar instantáneamente su estado ante las acciones ejercidas sobre é por el alumno, devolviendo informaciones de esas alteraciones en formatos que, preferiblemente, conviene sean múltiples: cambio de posición de los objetos que lo componen, modificaciones en su velocidad, transformaciones de sus colores, actualización de valores numéricos, para mencionar algunas de las manifestaciones visibles que constituyen la esencia de su interactividad.

Se debe a (Engelbrecht y Harding 2005a, 243-244) un marco conceptual clasificatorio, en el que es posible ubicar los sitios web de educación en un espacio bidimensional cuyas categorías son interactividad y contenido, tal como puede verse en la figura 1, elaborada a partir de la presentada por los autores. En realidad, nada impide aplicar el esquema a los recursos educativos en sí mismos antes que a los sitios que los alojan. En el tercer cuadrante se ubican los recursos didácticos diseñados, básicamente, para contener y presentar información, como podrían ser los libros de texto[3], mientras que en el segundo cuadrante se encuentran los recursos diseñados para adquirir una habilidad, como podría ser un taller. El lugar natural del mathlet debiera ser el primer cuadrante. Para lograr posicionarlo en esas coordenadas deben satisfacerse algunos principios de diseño, tal como se desarrollan y aplican en el siguiente apartado.

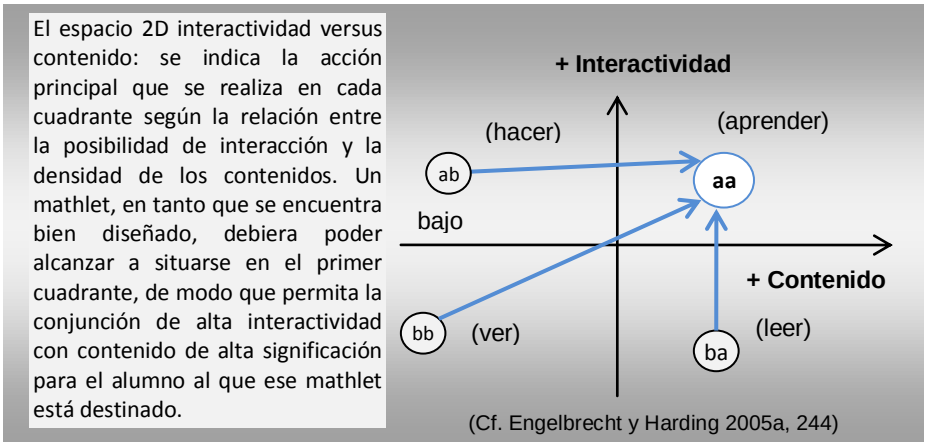

Figura 1. El espacio bidimensional de interactividad-contenido y sus principales actividades

III. Desarrollo

En este apartado se presenta y aplica el sistema de principios de diseño alineados con el entorno conceptual presentado y que permiten que cada uno de los mathlets, se encuentre ubicado netamente en el primer cuadrante del espacio bidimensional de Engelbrecht y Harding de la sección anterior.

Los dos mathlets se construyen, entonces, siguiendo los siguientes principios de diseño[4]: (a) Cada mathlet está dirigido a un concepto claramente delimitado, minimizando la complejidad de la herramienta y maximizando la simplicidad de la ilustración. Los valores de los parámetros son escogidos para maximizar la claridad. (b) La información es presentada en una variedad de formas (gráfica, simbólica, numérica), permitiendo a través de sus conexiones (señaladas o sugeridas por una correspondencia de colores o posición) una comprensión más profunda del concepto apuntado). (c) Se incorpora un alto nivel de interactividad que resulte significativo al estudiante y puedan ser manipulados, pudiendo seleccionar valores de los parámetros moviendo un cursor, inicializando controles deslizantes, seleccionando mediante botones. Las representaciones son actualizadas de inmediato, de manera que puedan percibirse instantáneamente los efectos de las manipulaciones operadas sobre los controles. (d) La información es con frecuencia exhibida de manera progresiva según los botones de visualización tildados por el usuario. (e) La matemática subyacente en el mathlet debe ser rigurosa, rasgo esencial, ya que no está diseñado para dar una vaga idea visual de un concepto, sino proporcionar datos experimentales para que el estudiante pueda medir y comparar sus resultados con las predicciones teóricas. Es esa la matemática a la que debe remitir el antimathlet.

Al repasar las habilidades que habría que disponer para su construcción, (Moreau 2002) señala que un mathlet exige de su creador (por lo general, un docente) que anticipe los escenarios, estimando las reacciones de un auditorio no presente, produzca y gestione un conjunto de medios, animando y formando una dimensión temporal anticipada. De hecho, aun cuando en ciertos docentes puedan reunirse todas estas habilidades, un curso

[3] Desde luego que el lector aprende leyendo un texto, pero no lo hace interactivamente, en los términos de la definición adoptada (Littau 2008, 66-79). Claro que en este cuadrante hay aprendizaje, pero la actividad que lo desencadena es la *lectura*, que identifica al cuadrante.

[4] Adaptado de los mismos principios seguidos para la generación de mathlets en el MIT, en su proyecto AIMP (Arbeloff Interactive Mathematics Project) de transformación de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Puede verse en (Miller y Upton 2008).

de un número de horas respetable no podrá ser preparado por una sola persona, por la elevada relación entre los tiempos de edición del material y el del resultado visible. Este cociente puede variar entre 100 y 400; a modo de ejemplo, los mathlets presentados aquí por los autores de este trabajo, pueden ser recorridos en unos pocos minutos, mientras que la preparación de cada uno ha insumido unas treinta horas, de modo que la relación es próxima al valor superior.

Para reducir ese cociente a la vez que permitir el acceso a la generación de estos objetos digitales a docentes sin formación específica como programadores, la aplicación de uso libre GeoGebra[5], plataforma sobre la que se han construido los dos mathlets de este trabajo. El primer mathlet [Mathlet 1, en lo sucesivo] yace en la teoría de curvas y está diseñado para hacer visibles las nociones de parametrización, inyectividad, regularidad, velocidad y aceleración de una curva parametrizada por las funciones vectoriales $P: [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ tal que $P(t) = (x_o + a\cos(t), y_o + b\,\mathrm{sen}(t))$, $Q: [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ tal que $Q(t) = (x_o + a\cos(kt), y_o + b\,\mathrm{sen}(kt))$, dejando que los valores de a, b, x_o, y_o, k puedan ser modificados por el alumno mediante el deslizamiento de los controles sobre un cursor o ingresándolos desde el teclado. Al mismo tiempo que se acciona sobre los cursores, los efectos de tales modificaciones se manifiestan por una modificación de las posiciones y los movimientos que animan a los objetos incluidos en el mathlet (básicamente, la elipse parametrizada, los puntos que indican las posiciones, como también sus vectores velocidad y aceleración, las figuras de batman, el hombre araña y el logo de la universidad nacional del centro).

La correspondencia entre el control que se modifica y el objeto que es modificado queda sugerida por la consistencia de los colores, que actúan como una dimensión más del gráfico. Las alteraciones gráficas que sufren los objetos son también informadas en tiempo real en el registro numérico del tablero de control ubicado a la derecha del mathlet. En el mismo tablero puede apreciarse la posibilidad, que queda abierta al alumno, de regular la densidad de información con la que se quiere interactuar, para lo que basta la selección o no de las seis casillas de verificación en la que se introducen o quitan elementos específicos, tal como se muestra en la parte inferior de las figuras 2 y 3, donde, por ejemplo, al tildar la casilla de verificación correspondiente, el hombre araña se incorpora al mathlet y sus movimientos son también objeto de análisis en las actividades propuestas.

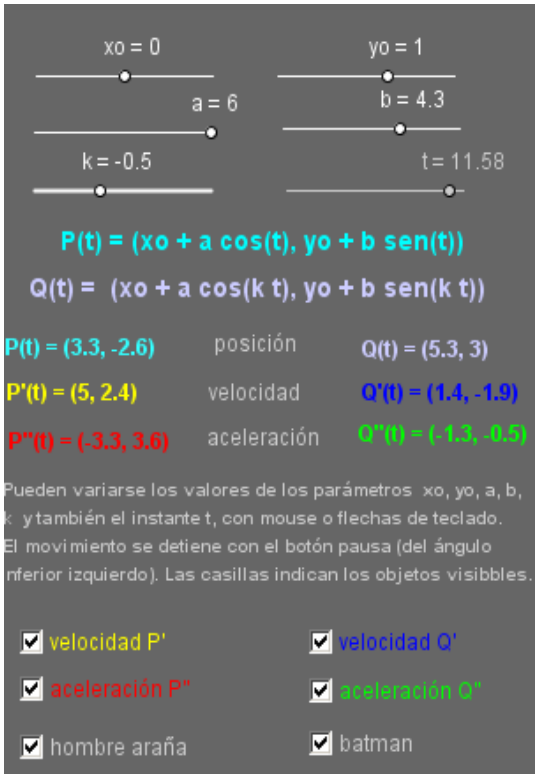

Figura 2. Panel de control del Mathlet 1

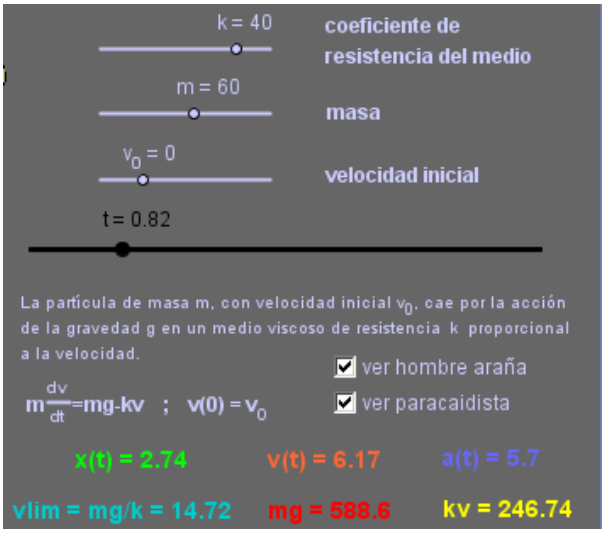

Figura 3. Panel de control (fragmento) del mathlet 2

El segundo mathlet [Mathlet 2] reside en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias y está diseñado para trabajar los diferentes enfoques (cualitativos, cuantitativos y numéricos) con el que se puede abordar la solución del modelo autónomo de un paracaidista con masa *m* que cae en el medio con resistencia proporcional (*k*) a su velocidad *v*, con velocidad inicial v_o. El problema de valor inicial está dado por $m\, dv/dt = mg - kv$, $v(0) = v_o$, y el mathlet permite al alumno generar diversos escenarios, ya que deja como parámetros la masa, el coeficiente de resistencia y la velocidad inicial. A través del panel de control (figura 3) el alumno ingresa o modifica los parámetros, recibiendo la información instantánea en el panel y en los gráficos asociados. El mathlet devuelve la animación del paracaidista, que puede ser comparado con el descenso en caída libre de un cuerpo similar, al mismo tiempo que grafica la velocidad versus el instante, la distancia recorrida, y las fuerzas que obran sobre el paracaidista, vectores cuya

[5] GeoGebra - Dynamic Mathematics for Everyone. Copyright 2001-2009 GeoGebra Inc. La aplicación puede descargarse en forma libre del sitio http://www.geogebra.org/, donde se detallan las condiciones de uso (You are free to copy, distribute and transmit GeoGebra free of charge for non-commercial purposes).

norma se actualiza dinámicamente en el registro gráfico, para apreciar visualmente la dinámica de su diferencia; la pauta de diseño (b) es aquí cumplida mediante la correspondencia de colores entre el vector peso (mg, rojo) y el vector de resistencia (kv, amarillo, ver figura 4) y sus respectivos registros numéricos del mismo color en el panel de control de este mathlet, tal como se presentan en la figura 3. Naturalmente, todos estos objetos o señales, varían ante cada modificación de los parámetros de entrada, introducidos por el alumno, de modo que se reinicia la simulación animada con el nuevo escenario definido interactivamente.

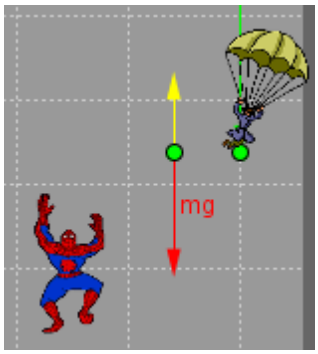

Figura 4. Peso, resistencia y recorridos comparativos (Fragmento del Mathlet 2)

Los correspondientes antimathlets resultan de la incorporación de las actividades específicas que el alumno debería responder para dar por completa su interacción con el mathlet en cada caso. Para el mathlet 1, de la serie completa de actividades[6], se presenta en este trabajo, a modo de ejemplo, la siguiente: "Determinar todos los valores reales de k para los que la parametrización Q es inyectiva; indicar cómo se manifiesta la pérdida de inyectividad con el mathlet, y determinar además todos los valores *alcanzables con el mathlet* para los que la función Q es inyectiva". Esta actividad, que actúa como un antimathlet, requiere, además, del mathlet: si bien son infinitos los valores reales de k para los que el Q es inyectiva, sólo un subconjunto finito es alcanzable por el mathlet, que depende de la discretización de su cursor, y que aquí se reduce a ocho valores. La actividad, por consiguiente, remarca la insuficiencia del mathlet, debida en este caso a su naturaleza necesariamente discreta, pero al mismo tiempo exige reconocer en qué consiste esa discretización de los valores que puede tomar el parámetro que se modifica con el cursor.

Para el mathlet 2, el añadido de una actividad tal como: "Determinar, para todo *k* y *m* el instante y la posición del paracaidista en el que la magnitud del peso duplica la de la resistencia; determinar ambos para el caso particular en el que, en unidades homogéneas, sea $k = m = 1$". La actividad es suficiente para mostrar las limitaciones del mathlet. Aunque su manipulación podría dar, con cierto esfuerzo, un intervalo que contenga al instante pedido para el caso particular, no podría de manera alguna dar su valor, puesto que se trata de un número trascendente. Y, desde, luego, no podría contestar de manera alguna la pregunta para todo *k* y *m*, ya que si bien está en sus manos variar ambos, no lo está el agotar con esas variaciones todas sus posibilidades.

IV. Resultados

Una vez producidos los mathlets, es preciso que sean accesibles fácilmente a los alumnos, y también es deseable, de acuerdo a los parámetros de diseño, que su manipulación sea muy simple. El modo más directo de lograr este requisito, es alojarlo en una página web, tal como puede verse el mathlet 1, en la dirección apuntada en la nota de pie de página anterior[7]. Las figuras 5 y 6 muestran las imágenes en un instante de las animaciones.

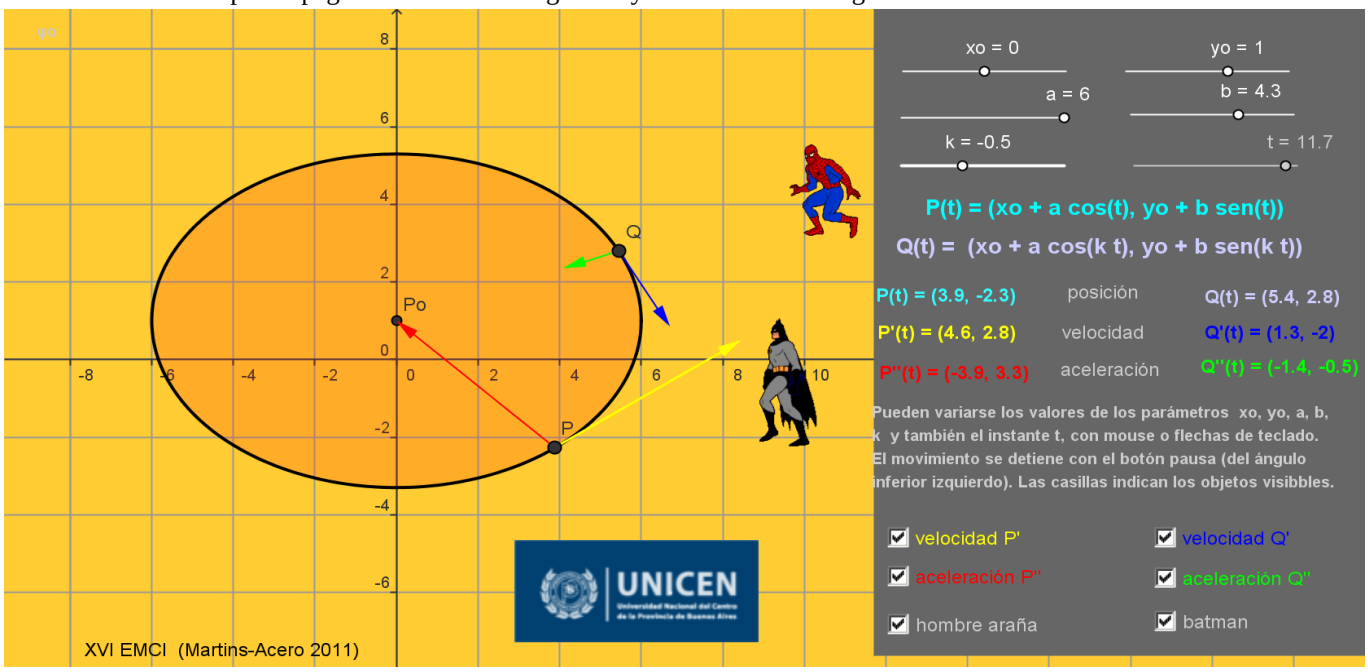

Figura 5. Imagen estática del Mathlet 1, sin incluir las correspondientes actividades que prueban su insuficiencia. Todas las casillas de verificación se hallan activadas. Se muestran los vectores velocidad y aceleración para cada parametrización. La componente vertical parametriza las caricaturas.

[6] Para ver el conjunto completo de actividades de este Mathlet puede accederse libremente desde la página de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires, url: http://materias.fi.uba.ar/6103/contribuciones/fa/paramelipfer01b.html, al mismo tiempo que apreciar las animaciones y respuestas del mathlet a las acciones sobre los controles.

[7] La aplicación GeoGebra permite generar automáticamente una página html (archivo, exporta..., hoja dinámica como página web), tras lo cual sólo es necesario disponerla, con los archivos subsidiarios, en un servidor de páginas web.

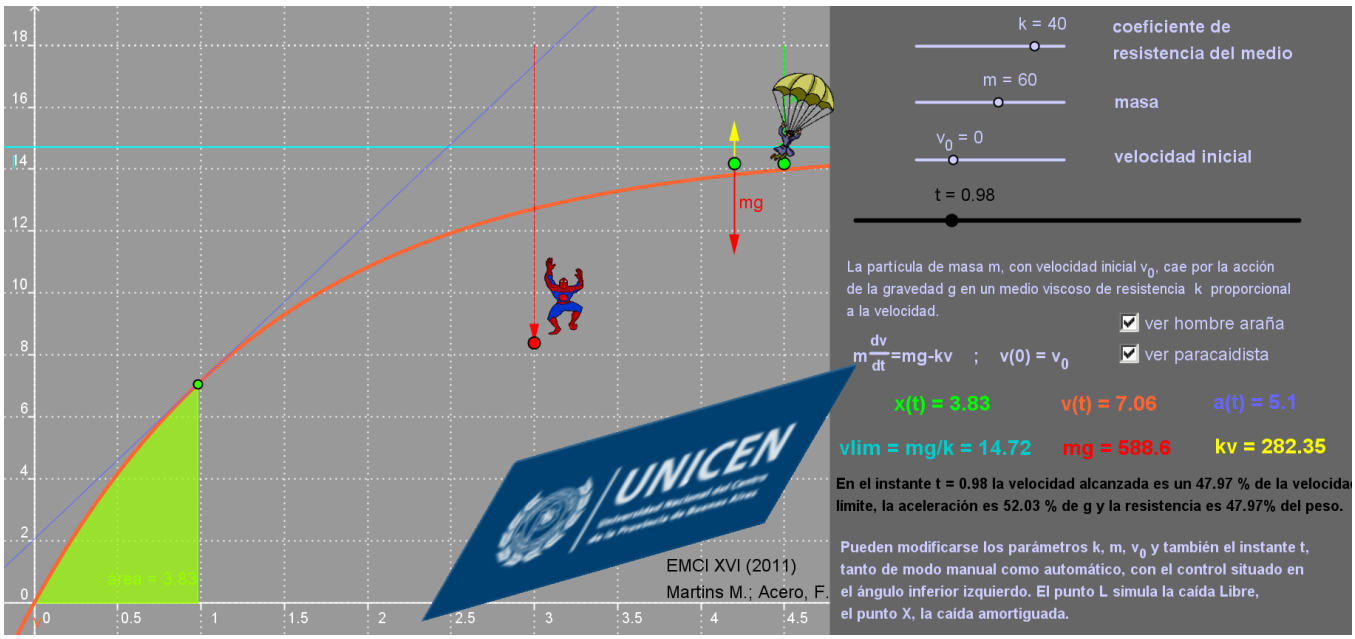

Figura 6. Imagen estática del Mathlet 2. No se incluyen las actividades que prueban su insuficiencia. El paracaidista se halla animado con la solución del problema de valor inicial; la caricatura, con el movimiento en caída libre. El área sombreada es $x(t) = \int_0^t v(\xi)d\xi$, la posición instantánea del paracaidista.

Los dos mathlets resultantes satisfacen los principios de (buen) diseño propuestos en el apartado III. En efecto, se satisface el principio (a), puesto que el concepto al que cada uno de ellos está dirigido, tal como se ha expuesto, está delimitado y acotado, la herramienta no lo excede en complejidad y la ilustración es suficientemente sencilla. El criterio (b) está cumplido dado que la información de los resultados de las operaciones es presentada en al menos dos registros (gráfico y numérico), con correspondencias intuitivas entre el significante y el significado. La condición (c) de la interactividad está satisfecha por la multitud de escenarios que el alumno puede introducir a través de los diversos estados de sus parámetros, con actualización dinámica de sus efectos. El requisito (d) se verifica satisfactoriamente al permitir que sea el mismo estudiante que escoja qué objetos desea que intervengan en la animación. Finalmente, la exigencia (e) de que la matemática que sustenta el mathlet mismo sea rigurosa se satisface internamente, puesto que las manifestaciones visibles del mathlet no son sino los correlatos de los conceptos abstractos que le dan origen. La verificación de los cinco criterios anteriores permite situar, cualitativamente, a cada uno de los dos mathlets en el primer cuadrante del espacio interactividad-contenido de la figura 1, conforme al propósito establecido a priori.

El cumplimiento de los principios de diseño establecidos ha permitido la producción de dos mathlets que, por su misma naturaleza, se constituyen en objetos que pertenecen al mundo digital en el que se desenvuelven los alumnos. Esta pertenencia, sin embargo, no significa de manera alguna que el alumno sea capaz de reflexionar críticamente sobre las operaciones y manipulaciones a las que el mathlet es sometido. Si el mathlet permite realizar experiencias, siendo un laboratorio virtual para ejecutarlas, no se sigue de allí que el alumno pueda dotar de significado a los resultados de tales experiencias. Más aún, ni siquiera puede presuponerse que el alumno pueda ordenar o planear la secuencia de experimentaciones que podría permitir un incremento de la comprensión de un concepto, puesto que en la cultura digital, la mayoría de las veces se alcanza la capacidad de operar los instrumentos digitales antes que la de reflexionar sobre su contenido (Gutiérrez Martín 2003, 55). Para que el mathlet tenga la oportunidad de alcanzar los objetivos para los que ha sido creado, es necesario añadirle las actividades

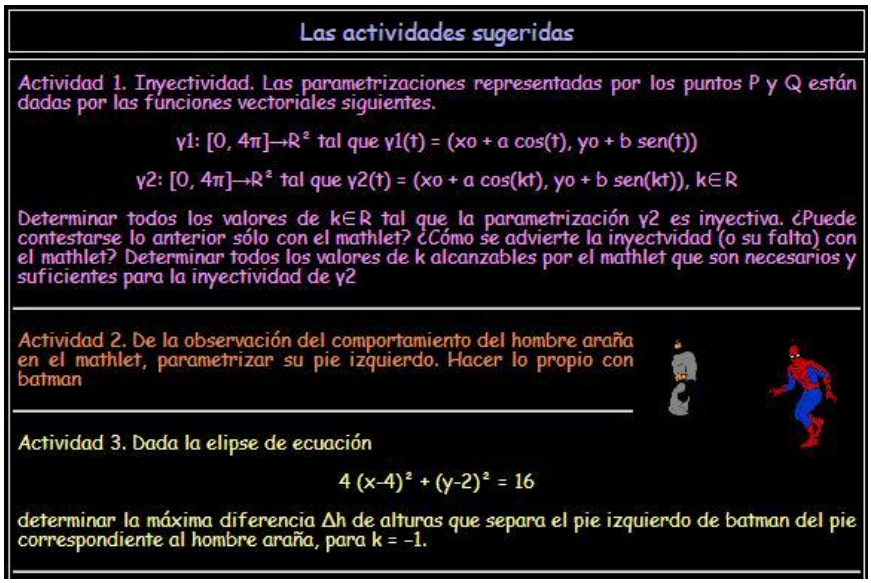

Figura 7. Tres actividades del mathlet 1 (fragmento)

que orienten al alumno en el tipo de experimentaciones que de él se espera, cuidando que sus interpretaciones se encuentren en la probable zona de desarrollo próximo que cabría esperar del estudiante al que se halla dirigido.

Las actividades de esta naturaleza —tal como se ven en la figura 7— están elaboradas de modo que, aunque circunscriben el terreno en el que se espera que el alumno responda, deja abiertas las rutas que pueden ser recorridas, mediante el mathlet cuando resulte conveniente, o rehusando al mathlet si resultara o bien inútil o bien superfluo (el caso de la actividad 1, ya descripta como un antimathlet). No obstante, atendiendo a la necesaria flexibilidad que surge de calcular la necesariamente heterogénea audiencia que podría manipular el objeto digital, se añade a cada actividad una sugerencia mínima, que asegure una puerta de acceso adicional a aquellos alumnos que la necesiten, tal como se ve en la figura 8.

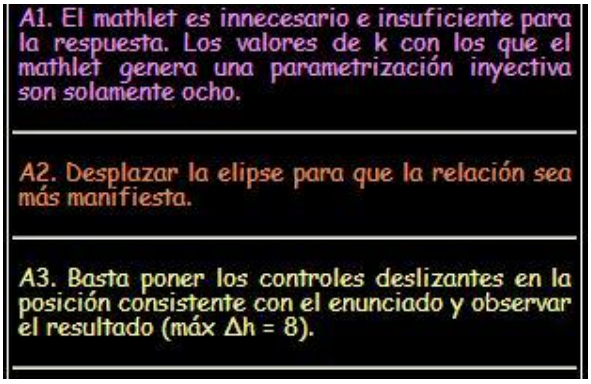

Figura 8. Sugerencias mínimas para las actividades del mathlet 1

V. Conclusiones

Aceptado que, en el entorno de la sociedad del conocimiento, la enseñanza a la vez que los modos de aprender sufren transformaciones profundas y se diversifican, generando nuevas necesidades en una sociedad con altos niveles de incertidumbres; entre las nuevas demandas de los estudiantes se encuentra la de una enseñanza que no se mantenga a espaldas de las tecnologías con las que conviven.

La interactividad, entendida como la capacidad del alumno de intervenir no sólo en sus procesos de aprendizaje, sino también en los recursos mismos de su enseñanza, puede alcanzarse mediante la introducción de los objetos digitales de aprendizaje, género cuya especie específica en la matemática es el *mathlet*. Mediante estos objetos, se produce una transformación radical, que básicamente se asienta en que el alumno no tiene ya que limitarse a ver o indagar sobre lo que ve, sino que es invitado a participar generando conocimiento a través de la modificación misma de aquello que ve, o de aquello sobre lo que debe indagar, o ambas cosas. Para que esa generación resulte posible, fue necesario dotar a cada mathlet de un conjunto de actividades que, dejando abierta la interacción, cierre suficientemente el campo de operaciones para circunscribirlas a aquellas que se hallen al alcance efectivo de las reestructuraciones de significado que se esperan del alumno.

Entre las actividades que orientan las acciones de los alumnos *con* el mathlet, se intercalaron otras que le remiten a la necesidad de construir los conocimientos caracterizados en el apartado II como superiores, al exigir respuestas que se hallan fuera del alcance mismo del mathlet en el que esas actividades se insertan. Se logra así la introducción en los fundamentos teóricos que son el elemento formal invisible que da vida al mathlet, y bajo cuyos principios mismos el mathlet genera los movimientos y cambios de estado.

Si bien las habilidades necesarias para la construcción de un mathlet posiblemente no concurran en demasiadas ocasiones en un docente (gestor de contenidos, diagramador, diseñador, programador, estimador de audiencias, entre otras), muchas de ellas, y en especial la más crítica, esto es la de programador, pueden ser atenuadas cuando no anuladas con el auxilio de alguna aplicación. Los mathlets construidos en este trabajo con la aplicación libre GeoGebra® prueban esta afirmación. Los cinco principios de diseño que han dirigido la construcción son suficientes para asegurar un resultado que satisfaga los estándares mínimos de interactividad y contenido que los caracteriza.

Para los docentes que compartan la afirmación de Carmen Luke[8] de que "si los educadores no toman la iniciativa para desarrollar una metodología adecuada de incorporación de estos nuevos medios electrónicos y formas de comunicación a la educación, serán los expertos en informática y diseñadores de software quienes decidan cómo aprenderá la gente, qué aprenderá, y qué constituye la alfabetización", este trabajo les permite un panorama de las dimensiones principales a tener en cuenta para llevar a cabo esas iniciativas. Al mismo tiempo, proporciona una estimación, por omisión, de las consecuencias de renunciar a emprenderlas: el carácter de las cuestiones propias de la disciplina involucradas es de una profundidad tal que no es sencillo transmitirlas sin deformaciones a un profesional de otras áreas. La alternativa óptima, desde luego, consiste en la formación de equipos interdisciplinares, tal como el mencionado proyecto del MIT, lo que exige ya una escala de recursos y de proyectos no siempre al alcance de las posibilidades reales de los docentes en la Argentina.

VI. Referencias Bibliográficas

Allen, Donald. «A Survey of Online Mathematics Course Basics.» *The College Mathematics Journal, Vol. 34, No. 4* (Mathematical Association of America) 34, nº 4 (2003): 270-279.

Badia, Antoni. «Ayuda al aprendizaje con tecnología en la educación superior.» *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento* (Universitat Oberta de Catalunya) III, nº 2 (octubre 2006): 5-18.

[8] Technology Literacy, citado en (Gutiérrez Martín 2003, 79).

Cramer, Susan. «Update Your Classroom with Learning Objects and Twenty-First-Century Skills.» *Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, v80 n3 p126-132 Jan-Feb 2007.* Editado por Heldref Publications. Febrero de 2007. http://heldref.metapress.com/app/home/ (último acceso: 26 de septiembre de 2009).

Engelbrecht, Johann, y Ansie Harding. «Teaching undergraduate mathematics on the Internet. Part 1: Technologies and taxonomy».» *Educational Studies in Mathematics. Vol. 58, n.º 2, pág. 235-252.* 2005a. http://www.springerlink.com/content/g813211q40551v29/ (último acceso: 14 de junio de 2009).

—. «Teaching undergraduate mathematics on the Internet. Part 2: Attributes and Possibilities.» *Educational Studies in Mathematics. Vol. 58, n.º 2, pág. 235-252.* 2005b. http://www.springerlink.com/content/g813211q40551v29/ (último acceso: 14 de junio de 2009).

Heck, Andre, Peter Boon, y Wim van Velthoven. «Mathematica Empowered Applets for Learning School Algebra and Calculus.» *Proceedings of the 9th International Mathematica Symposium (IMS'08). The Mathematica Journal volume. pp. 1-21.* 2008. http://staff.science.uva.nl/~heck/research/art/IMS%202008%20Paper.pdf (último acceso: 14 de noviembre de 2009).

Jessup, Stephanie. «Processes used by instructional designers to create elearning and learning objects.» *A Dissertation Presented in Partial Fulfillment Of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy. Capella University.pp. 1-130.* 2007. http://www.dgdocph.cpu/ddhj/pro/jes.pdf (último acceso: 14 de octubre de 2009).

Kalman, Dan. «Virtual Empirical Investigation: Concept Formation and Theory Justification.» *American Mathematical Monthly 112, no. 9 (November 2005): 786-798. Academic Search Complete, EBSCOhost.* 2005. http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=18926322&lang=es&site=ehost-live (último acceso: 20 de junio de 2009).

Kant, Immanuel. *Teoría y praxis.* Tercera edición [Original 1793, Über den Geneibspruch: Das mag in der Theorie richting sein, taugt aber nicht für dis Praxis]. Traducido por Carlos Correas. Buenos Aires: Leviatán, 2008.

Kay, Robin, y Liesel Knaack. «Evaluating the learning in learning objects.» *Open Learning. Vol. 22, N. 1, February 2007, pp. 5-28.Academic Search Complete, EBSCOhost .* 2009. http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=a9h&AN=24078579&lang=es&site=ehost-live (último acceso: 27 de septiembre de 2009).

Littau, Karin. *Teorías de la lectura. Libros, cuerpos y bibliomanía.* Primera edición. Traducido por Elena Marengo. Buenos Aires: Manantial, 2008.

Miller, Haynes, y Deborah Upton. «Computer Manipulatives in an Ordinary Differential Equations Course: Development, Implementation, and Assessment.» *Journal of Science Education and Technology, v17 n2 p124-137 Apr 2008. DataBaseERIC.* 2008. http://www.jstor.org/ (último acceso: 27 de septiembre de 2009).

Moreau, Ives. «De véritables simulations accessibles en ligne pour l'enseignement des sciences et des techniques 'applet learning.» *Centre d'Electronique et de Micro-Optoélectronique, Courrier 084 -Université Montpellier II.* 2003. (último acceso: 21 de junio de 2008).

Silva, Marco. *Educación interactiva. Enseñanza y aprendizaje presencial y on-line.* Primera edición. Barcelona: Gedisa, 2005.

Tedesco, Juan Carlos. *Educar en la sociedad del conocimiento.* Segunda edición. Buenos Aires: Fondo de cultura económica, 2009.

Vygotski, Lev. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona: Crítica, 2006.

Walsh, Karen. «Object-Oriented faculty development: training teachers with learning objects.» *Thesis for the Degree Doctor of Philosophy, pp. 1-114, Capella University.* 2006. http://www.jstor.org (último acceso: 10 de septiembre de 2010).

Wiley, David A. «Connecting learning objects to instructional design theory: a definition, a metaphor and a taxonomy.» *The instructional use of learning objects, Association for Educational Communications and Technology.* 2001. http://www.elearning-reviews.org/topics/technology/learning-objects/2001-wiley-learning-objects-instructional-design-theory/ (último acceso: 8 de octubre de 2010).