DE LO EUCLIDEO A LO AFIN

Salvador Gigena[1, 2] , Daniel Abud[3] y Moisés Binia[2, 3]
[1]Departamento de Matemáticas – Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario Avda. Pellegrini 250 – (CP 2000) Rosario. Argentina.
sgigena@fceia.unr.edu.ar
[2]Departamento de Matemáticas – Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba – Avenida Vélez Sarsfield 1611 (CP 5000) Córdoba. Argentina.
sgigena@efn.uncor.edu, mbinia@efn.uncor.edu
[3]Departamento de Física – Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales – Universidad Nacional de Córdoba – Avenida Vélez Sarsfield 1611 (CP 5000) Córdoba. Argentina.
dabud@efn.uncor.edu, mbinia@efn.uncor.edu

Área Temática: Aplicaciones de la Matemática
Palabras claves: geometría diferencial – geometría euclidiana y no euclidiana – geometría unimodular afín
Resumen: La Geometría Diferencial tiene mucho para aportar a la Ingeniería. La materia Mecánica Analítica dentro del curriculum de la carrera Ingeniería incluye el estudio de curvas y superficies. En este trabajo, primeramente, se presentan los elementos fundamentales para la introducción de la geometría diferencial en Ingeniería y su vinculación con la Mecánica. Seguidamente, se expresan las consecuencias de cambiar de geometría, específicamente al realizar la transición: de la clásica geometría euclidiana hacia la geometría unimodular afín, en el tema de Teoría de Cáscaras.

Introducción

La geometría usual, o sea la **euclidiana**, es "**la constituida por aquellos objetos, y relaciones entre ellos, que permanecen invariantes bajo la acción del grupo euclídeo**". Este, a su vez es el generado por las **rotaciones** (rígidas) y las **traslaciones** del espacio ambiente (Mecánica). Por lo tanto, se preservan las **distancias** y los **ángulos**: para todo esto basta decir y/o prescribir que se conserve el producto interno usual de vectores. Cuando uno trasunta esto en cuanto a cambios de coordenadas por rotaciones, significa que **los cambios deben ser efectuados bajo la acción de matrices ortogonales**: cuya inversa es igual a su propia traspuesta $\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}^T=\mathrm{I}$, lo que implica $\det\mathrm{A}=\pm 1$. Entonces, se escogen las de determinante igual a uno a fin de evitar las reflexiones [13].

A su vez, la "Unimodular Afín" es la que permanece invariante bajo **traslaciones** y **cambios de coordenadas** que, sin ser necesariamente euclídeas, tienen determinante igual a uno. Por este motivo, se preserva el "**volumen**" del espacio ambiente (o sea, el **área** en el plano; el **volumen** propiamente dicho en el espacio tridimensional; el **n-volumen** en el espacio ambiente real de **n** dimensiones).

Geometría euclidiana

La **Geometría Euclidiana** es la geometría que estudia los objetos geométricos, y las relaciones entre ellos, que permanecen invariantes bajo la acción del grupo euclídeo $ASO(n,\mathbb{R})$, generado por las traslaciones y rotaciones de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

En síntesis, la Geometría Euclídea es el estudio de las propiedades geométricas de los espacios euclídeos. Un **espacio euclídeo** es un espacio vectorial real dotado de un producto escalar. Además, la Geometría Euclídea es, según la filosofía del Programa de Erlangen de Felix Klein, el estudio de los invariantes del espacio euclídeo al aplicarle **transformaciones ortogonales y traslaciones** (la acción del grupo euclídeo sobre la variedad diferenciable $\mathbb{R}^n$).

Se demuestra en Teoría de Grupos de Lie que el invariante esencial, o fundamental, de la **Geometría Euclidiana** es el ***producto escalar usual positivo definido de vectores*** que, denotaremos por un punto:

" • "

Así, si V y $W\in\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, con $V(v_1,v_2,\ldots,v_{\mathrm{n}})$ y $W(w_1,w_2,\ldots,w_{\mathrm{n}})$ resulta,

$$V\cdot W=\sum_{i=1}^{\mathrm{n}} v_i w_i \qquad (1)$$

Geometrías no euclidianas

En general, se denomina **geometría no euclídea** a cualquier forma de geometría cuyos postulados y propiedades difieren en algún punto de los postulados de la geometría convencional formulada por Euclides.

El primer ejemplo de geometría no euclídea fue la geometría hiperbólica, construida independientemente por varios autores a principios del siglo XIX [13].

Los primeros ejemplos de geometrías no euclidianas se lograron tratando de construir modelos explícitos en el que el quinto postulado de Euclides fuera falso.

Conexión

En geometría, la noción de **conexión** es la que hace precisa la idea de **paralelismo, o transporte paralelo,** "de algo", "de información", a lo largo de una curva, familia de curvas u otras imágenes de objetos de dimensión mayor, de manera "paralela" y consistente. Las conexiones son de central importancia en la geometría moderna en gran parte porque habilita la comparación entre la geometría local en un punto con la geometría local en otro punto, de tal manera que dicha comparación no dependa de los sistemas locales de coordenadas escogidos para realizar los cómputos [13].

En el caso, más usual y conocido, de superficies en el espacio ambiente tridimensional real, la **derivada covariante** de un campo de vectores tangentes a la misma es, por un lado e históricamente, la "conexión de Levi-Civita" determinada por la métrica inducida sobre la superficie por la métrica del espacio ambiente y, a su vez, coincide con la proyección sobre el plano tangente, en la dirección de la normal euclidiana, de la derivada usual en $\mathbb{R}^3$, o sea, es la conexión inducida por la conexión del espacio ambiente.

A su vez, cada métrica Riemanniana, o pseudo-Riemanniana, determina una

ÚNICA CONEXIÓN DE LEVI-CIVITA

Según se demuestra, por ejemplo, en Millman y Parker, [13]. Allí se demuestra también que la conexión inducida sobre una superficie, proyectando en la dirección de la normal euclidiana, coincide con la de Levi-Civita, obtenida a partir de la métrica de la superficie, a su vez inducida por la métrica del espacio ambiente. Pero, si se proyecta en cualquier otra dirección, por ejemplo, la **normal afín**, ya la conexión es diferente. De hecho, para cada campo diferenciable de direcciones transversales hay una conexión.

Por eso hay infinitas conexiones inducidas, dependiendo del campo de vectores transversales escogidos sobre la superficie, para realizar la proyección en cada punto.

La **derivada covariante** (∇_i) es una generalización del concepto de **derivada parcial** (∂_i) que permite extender el cálculo diferencial sobre $\mathbb{R}^n$, con coordenadas cartesianas, al caso de coordenadas curvilíneas en $\mathbb{R}^n$ (y también al caso, todavía más general, de variedades diferenciables).

Cada conexión determina un **transporte paralelo**, a través de la correspondiente ecuación diferencial, que involucra a los **símbolos de Christoffel**.
En el casa euclídeo, y a la vez usando coordenadas cartesianas lineales, no necesariamente ortogonales, los símbolos son todos nulos, por eso la ecuación es tan simple.

Una **variedad** es un **espacio topológico** con propiedades adicionales que la convierten en Variedad Diferenciable, ([13] ver, por ejemplo, el capítulo 7 del citado texto de Millman y Parker). No necesariamente está inmerso en otro espacio ambiente.

Otro tipo de inmersión investigada en la literatura matemática es la isométrica: aquí se supone que la variedad diferenciable n-dimensional está dotada de una estructura riemanniana $\left(M^n, g\right)$ y que la función que realiza la inmersión $f : M^n \to \mathbb{R}^m$ "respeta" o "reproduce" la métrica en cada punto. El "***Nash Embedding Theorem***" establece que siempre existe tal tipo de inmersión, bastando con que la función sea de clase C^1, aunque corresponde aclarar que la versión original de Nash fue "mejorada" por Kuiper.

Considérese una superficie bidimensional suave inmersa en $\mathbb{R}^3$. Más precisamente, sea $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$ una **superficie simple,** [13]. Entonces, los objetos geométricos tangenciales y normales a la superficie están relacionados entre sí por la ***Fórmula de Gauss***:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} N_{eu} + \sum_{\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \mathbf{x}_{\gamma} \qquad (2)$$

En cada punto sobre esta superficie es fácil imaginar un **plano tangente**. Suponiendo que una partícula se mueve sobre una curva – su **trayectoria** – en la superficie. Entonces su **vector velocidad** en un punto determinado sobre la trayectoria se encuentra en el **plano tangente** a la superficie en el punto en que se encuentra la partícula. Este concepto se generaliza para una variedad diferencial arbitraria. La variedad, como ya aclarado anteriormente, no siempre se piensa como inmersa en un espacio euclidiano. Para una variedad diferenciable se define el concepto de "espacio tangente" en cada punto. Realizando la unión conjuntista de todos esos espacios se construye el Fibrado Tangente, al que se puede dotar de una estructura diferenciable, inducida por la de la variedad, lo que lo torna a su vez una variedad diferenciable con el doble de dimensión.

Una de las más importantes aplicaciones de la idea de **fibrado tangente** ocurre en Mecánica Analítica donde el fibrado tangente generaliza el concepto de un **espacio de estados**. Un **sistema mecánico** es una colección de partículas con masa, las que interactúan mediante fuerzas y restricciones físicas, tales como, por ejemplo, el péndulo simple. Una **configuración** es una especificación de la posición para cada una de las partículas que constituyen el sistema. El **espacio de configuración** es un conjunto M de elementos tales que, cualquier configuración del sistema corresponde a un único punto en el conjunto M, y cada punto en M corresponde a una **única** configuración del sistema. El espacio de configuración de un sistema mecánico es una variedad diferenciable llamada la **variedad de configuración**. Cualquier sistema de coordenadas locales q sobre la variedad de configuración se llama sistema de **coordenadas generalizadas**.

Las **velocidades generalizadas** $\dot{q}$ son elementos de los espacios tangentes a M, $T_q M$, representados en la base natural. El espacio de estados es el fibrado tangente TM, que tiene coordenadas locales $(q, \dot{q})$. Introduciremos primero el caso de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Supongamos que tenemos **n** campos vectoriales que, en cada punto, forman una base vectorial $\{\mathrm{e}_1, ..., \mathrm{e}_{\mathrm{n}}\}$ y un campo vectorial contravariante adicional v de tal manera que este campo puede expresarse en términos de la base anterior:

$$\mathrm{v}(x) = \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} v^k(x)\, \mathrm{e}_k(x) \tag{3}$$

Donde v^k son las componentes del vector en dicha base. Si se usan coordenadas curvilíneas $(x^1, ..., x^{\mathrm{n}})$, los vectores tangentes a las curvas coordenadas cambian de punto a punto. Eso implica que aún cuando el campo vectorial sea constante, en general, sus coordenadas en la base elegida no serán constantes y, en general, sucederá que la derivada covariante ($\bar{\partial}$):

$$\bar{\partial}_i \mathrm{v} \neq \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x^i} := \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\, \mathrm{e}_k \tag{4}$$

Ya que también es necesario considerar la variación de orientación de la base vectorial al pasar de un punto a otro, es decir, para evaluar la derivada (covariante) anterior necesitamos evaluar:

$$\bar{\partial}_i \mathrm{v} = \frac{\bar{\partial} \mathrm{v}}{\bar{\partial} x^i} := \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\, \mathrm{e}_k + \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} v^k\, \frac{\bar{\partial} \mathrm{e}_k}{\bar{\partial} x^i} \tag{5}$$

Donde el término segundo adicional da cuenta de cómo cambia la base vectorial al recorrer una línea coordenada curvilínea. Es decir, cuando se usan coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ las líneas coordenadas son líneas rectas paralelas a los ejes coordenados, y de alguna manera en cada punto la base vectorial escogida para medir las coordenadas de un campo vectorial en todos los puntos están "sincronizadas".

Pero, en coordenadas curvilíneas al pasar de un punto a otro, los vectores tangentes a las líneas coordenadas usados como base no coincidirán de un punto a otro y es necesario computar su variación al cambiar de punto. En general, los vectores $\mathrm{e}_k(x)$ no sólo dependen del punto, además es necesario especificar cómo se "conectan" los vectores en diferentes puntos y, para ello, se define una **conexión**, que en el caso de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, puede representarse como un conjunto de coeficientes:

$$\frac{\bar{\partial} \mathrm{e}_k}{\bar{\partial} x^i} := \sum_{m=1}^{\mathrm{n}} \Gamma^m_{ki}\, \mathrm{e}_m \tag{6}$$

Los coeficientes Γ^k_{ij} se llaman **símbolos de Christoffel** y definen localmente la conexión. Juntando los resultados de (5) y (6), la derivada covariante parcial de un campo vectorial puede expresarse mediante la ecuación:

$$\nabla_i \mathrm{v} = \frac{\bar{\partial} \mathrm{v}}{\bar{\partial} x^i} = \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\, \mathrm{e}_k + \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} \sum_{m=1}^{\mathrm{n}} v^k\, \Gamma^m_{ki}\, \mathrm{e}_m \tag{7}$$

Usando el convenio de suma de Einstein y renombrando los índices la expresión anterior puede escribirse simplemente como:

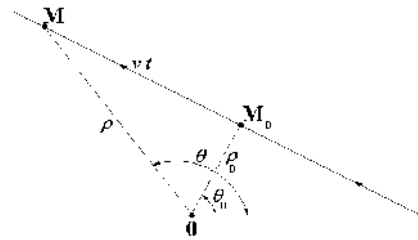
$$\nabla_i \mathrm{v} = \left(\frac{dv^k}{dx^i} + \Gamma^k_{m\,i}\, v^m \right) \mathrm{e}_k \tag{8}$$

La expresión entre paréntesis representa las componentes de la derivada covariante del vector contravariante **v**. Análogamente, dada una curva $t \mapsto \left(x^1(t),....,x^n(t)\right)$ se define la **derivada covariante** temporal a lo largo de dicha curva como:

$$\frac{D\mathrm{v}}{Dt} = \dot{x}^i \nabla_i \mathrm{v} = \left(\frac{dv^k}{dx^i} + \Gamma^k_{m\,i}\ v^m \right) \frac{d\,x^i}{d\,t} \mathrm{e}_k \tag{9}$$

Aplicación a la Mecánica: Caso euclídeo

Veremos un ejemplo, de nuestro aporte a la enseñanza de geometría en carreras de Ingeniería a través de la Mecánica. Como primera aplicación y justificación para la necesidad de introducir la geometría diferencial en la Mecánica, considérese el caso de la generalización de la **derivada ordinaria** en $\mathbb{R}^n$. Esta situación se aprecia mucho mejor cuando se usan **coordenadas curvilíneas**. Veremos un ejemplo de uso muy común en Mecánica: el movimiento de una partícula expresado en **coordenadas cartesianas** y, luego, el mismo movimiento expresado en **coordenadas polares.** Se trata de una masa puntual que se mueve a lo largo de la **trayectoria recta**, **con velocidad escalar constante** v indicada en la figura. Para un tiempo inicial $t = 0$, se supone que $\overline{\mathrm{OM}}_0 = \rho_0 = \rho_{t=0} = \rho_{\theta=\theta_0}$ y para cualquier otro instante *t*: $\overline{\mathrm{OM}} = \rho$, donde, además prescribimos que $\overline{\mathrm{OM}_0} \perp \overline{\mathrm{M}_0\mathrm{M}}$. Entonces, geométricamente se puede ver que:



$$\left.\begin{aligned} \frac{vt}{\rho_0} &= \tan\left(\theta - \theta_0\right) \\ \frac{\rho_0}{\rho} &= \cos\left(\theta - \theta_0\right) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Por otra parte, por el Teorema de Pitágoras: $\rho^2 = \rho_0^2 + v^2 t^2$. Así, despejando de las (10):

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \arctan\left(\frac{vt}{\rho_0}\right) \\ \rho &= \frac{\rho_0}{\cos\left(\theta - \theta_0\right)} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Es decir, si el punto se mueve **con una velocidad escalar constante** v**,** a lo largo de tal recta, se obtienen las citadas relaciones las que, si se usan para calcular las funciones vectoriales: **posición**, **velocidad** y **aceleración** de la partícula en coordenadas cartesianas, dan:

Posición:

$$\begin{cases} x(t) = \rho_0 \cos\theta_0 - vt \sin\theta_0 \\ y(t) = \rho_0 \sin\theta_0 + vt \cos\theta_0 \end{cases} \tag{12}$$

Velocidad:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} = -v \sin\theta_0 & (\ =\ \text{constante}) \\ v_y = \dot{y}(t) = \dfrac{dy}{dt} = v \cos\theta_0 & (\ =\ \text{constante}) \end{cases} \tag{13}$$

Aceleración:

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x}(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \ddot{y}(t) = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Donde se ha usado la notación clásica de Mecánica: $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ y $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

Además, corresponde observar que lo anterior es todo lo que aparece en el cálculo, pues estamos trabajando, en este primer caso, en coordenadas cartesianas. Es decir, que las coordenadas son las usuales euclidianas donde se tiene la carta coordenada definida por la función $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que escribimos:

$X(x,y) = (x,y)$, es decir, $X_1 = (1,0)$ y $X_2 = (0,1)$

Resultando los coeficientes métricos:

$a_{11} = X_1 \cdot X_1 = 1$, $a_{12} = X_1 \cdot X_2 = 0$, $a_{22} = X_2 \cdot X_2 = 1$,

Con lo que la matriz de coeficientes métricos se expresa:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij}.$$

Esto implica que todas las derivadas parciales se anulan: $a_{ij;k} = 0$ y, por lo tanto, también los símbolos de Christoffel: $\Gamma^i_{jk} = 0$, razón por la cual no aparecen en el cálculo de la aceleración, como indicado en (14). Ahora consideramos el cálculo de la aceleración, pero, **en coordenadas polares**, determinadas a través de la función vectorial $X : (0,+\infty) \times (-\pi,+\pi) \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$X(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, con $\rho > 0$

Entonces, resulta $X_1 = X_\rho = (\cos\theta, \sin\theta)$ y $X_2 = X_\theta = (-\rho\sin\theta, \rho\cos\theta)$. En tal sistema, obtenemos los coeficientes métricos:

$a_{11} = X_1 \cdot X_1 = 1$, $a_{12} = X_1 \cdot X_2 = 0$, $a_{22} = X_2 \cdot X_2 = \rho^2$

Con lo que la matriz de tales coeficientes se puede expresar por

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

A la vez, su inversa resulta

$$a^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^{-2} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial \rho} = \frac{\partial a_{11}}{\partial \theta} = \frac{\partial a_{12}}{\partial \rho} = \frac{\partial a_{12}}{\partial \theta} = \frac{\partial a_{21}}{\partial \rho} = \frac{\partial a_{21}}{\partial \theta} = 0$$

pero,

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial \rho} = 2\rho \quad \text{y} \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial \theta} = 0.$$

Calculando ahora los símbolos de Christoffel, vemos que son casi todos nulos:

$$\Gamma^\rho_{\rho\rho} = \Gamma^\rho_{\theta\rho} = \Gamma^\rho_{\rho\theta} = \Gamma^\theta_{\rho\rho} = \Gamma^\theta_{\theta\rho} = \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \tag{15}$$

excepto,

$$\Gamma^\rho_{\theta\theta} = \Gamma^1_{22} = -\rho \quad \text{y} \quad \Gamma^\theta_{\rho\theta} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{\rho} \tag{16}$$

Como la partícula se mueve sobre una recta: la **partícula**, la **distancia al origen** y el **ángulo polar** estarán relacionados, según lo calculado anteriormente, mediante la expresión:

$$\begin{cases} \rho(t) = \sqrt{\rho_0{}^2 + v^2 t^2} = \dfrac{\rho_0}{\cos\left(\theta(t) - \theta_0\right)} \\ \theta(t) = \theta_0 + \arctan\left(\dfrac{vt}{\rho_0}\right) \end{cases} \tag{17}$$

$$\text{donde} \quad \theta_0 - \frac{\pi}{2} < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{2}$$

Las coordenadas de la velocidad de la partícula en este sistema pueden determinarse mediante cálculo directo, a partir de lo anterior, expresando así las componentes **contravariantes** de la velocidad, que serán por definición:

$$\left.\begin{aligned} v^\rho &:= \dot{\rho}(t) = \frac{d\rho}{dt} \\ v^\theta &:= \dot{\theta}(t) = \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Desarrollando separadamente y operando convenientemente nos queda, una de las componentes:

$$v^\theta = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{vt}{\rho_0}\right)^2} \frac{v}{\rho_0} = \frac{v}{\rho} \cos\left(\theta - \theta_0\right), \tag{19}$$

y la otra,

$$v^\rho = \frac{\rho_0 \sin\left(\theta - \theta_0\right)}{\cos^2\left(\theta - \theta_0\right)} \frac{d\theta}{dt} = v \sin\left(\theta - \theta_0\right). \tag{20}$$

Puesto que la partícula se mueve a **velocidad constante**, el vector **aceleración** debería resultar **nulo**. De acuerdo a lo discutido anteriormente, las componentes del vector aceleración pueden obtenerse mediante las **derivadas covariantes**, primero en la componente radial y luego en la componente transversal. En general, la fórmula de la **Derivada Covariante** es:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{dx^i}{dt}\right) = \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}. \tag{21}$$

haciendo, $x^1 = \rho$ y $x^2 = \theta$, queda,

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}\left(\frac{dx^\rho}{dt}\right) &= \frac{d^2\rho}{dt^2} + \Gamma^\rho_{\rho\rho} \frac{dx^\rho}{dt}\frac{dx^\rho}{dt} + 2\Gamma^\rho_{\rho\theta} \frac{dx^\rho}{dt}\frac{dx^\theta}{dt} + \Gamma^\rho_{\theta\theta} \frac{dx^\theta}{dt}\frac{dx^\theta}{dt} \\ \frac{D}{Dt}\left(\frac{dx^\theta}{dt}\right) &= \frac{d^2\theta}{dt^2} + \Gamma^\theta_{\rho\rho} \frac{dx^\rho}{dt}\frac{dx^\rho}{dt} + 2\Gamma^\rho_{\rho\theta} \frac{dx^\rho}{dt}\frac{dx^\theta}{dt} + \Gamma^\theta_{\theta\theta} \frac{dx^\theta}{dt}\frac{dx^\theta}{dt} \end{aligned} \tag{22}$$

Los primeros términos de los segundos miembros, se pueden expresar así:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{d\rho}{dt} = \frac{dv^\rho}{dt} = \frac{\partial v^\rho}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial v^\rho}{\partial \theta}\dot{\theta} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv^\theta}{dt} = \frac{\partial v^\theta}{\partial \rho}\dot{\rho} + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta}\dot{\theta}. \end{aligned} \tag{23}$$

Entonces, las componentes contravariantes de la aceleración:

$$a^\rho = \frac{Dv^\rho}{Dt} \text{ y } a^\rho \neq \frac{dv^\rho}{dt}\ ; \qquad a^\theta = \frac{Dv^\theta}{Dt} \text{ y } a^\theta \neq \frac{dv^\theta}{dt} \tag{24}$$

puesto que, por definición, para la "componente radial de la aceleración" y, similarmente, se obtiene para la "componente transversal". Analizando cada una de estas expresiones por separado, podemos escribir:

$$a^{\rho} = \dot{\rho}\left(\frac{\partial v^{\rho}}{\partial \rho} + \Gamma^{\rho}_{\rho\rho} v^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\theta\rho} v^{\theta}\right) + \dot{\theta}\left(\frac{\partial v^{\rho}}{\partial \theta} + \Gamma^{\rho}_{\rho\theta} v^{\rho} + \Gamma^{\rho}_{\theta\theta} v^{\theta}\right), \tag{25}$$

$$a^{\theta} = \dot{\rho}\left(\frac{\partial v^{\theta}}{\partial \rho} + \Gamma^{\theta}_{\rho\rho} v^{\rho} + \Gamma^{\theta}_{\theta\rho} v^{\theta}\right) + \dot{\theta}\left(\frac{\partial v^{\theta}}{\partial \theta} + \Gamma^{\rho}_{\rho\theta} v^{\rho} + \Gamma^{\theta}_{\theta\theta} v^{\theta}\right) \tag{26}$$

donde, si recordamos que las componentes se expresan $v^{\rho} = v\sin\left(\theta - \theta_0\right)$ y $v^{\theta} = \frac{v}{\rho}\cos\left(\theta - \theta_0\right)$, entonces derivando correspondientemente:

$$a^{\rho} = 0 \tag{27}$$

y

$$a^{\theta} = 0. \tag{28}$$

Es importante notar cómo, en este caso, y según lo ya adelantado, las derivadas parciales ordinarias no coinciden con las componentes de la aceleración:

$$\begin{cases} a_{\rho} \neq \dfrac{dv_{\rho}}{dt} = \dfrac{\partial v_{\rho}}{\partial \rho}\dot{\rho} + \dfrac{\partial v_{\rho}}{\partial \theta}\dot{\theta} \\ a_{\theta} \neq \dfrac{dv_{\theta}}{dt} = \dfrac{\partial v_{\theta}}{\partial \rho}\dot{\rho} + \dfrac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta}\dot{\theta}, \end{cases} \tag{29}$$

ya que, en **coordenadas polares** los vectores de la base varían punto a punto, y es por ello que, sólo usando la **derivada covariante** se obtiene un vector de aceleración nulo tal como cabía esperar a partir del cálculo en coordenadas cartesianas.

Nuestro aporte: Caso general

En una **variedad diferenciable** o, por ejemplo, una **hipersuperficie** de $\mathbb{R}^n$, por otra parte, el concepto de derivada direccional se define a partir del **espacio tangente a cada punto** [13]. En el caso general, al presentar la variedad o la hipersuperficie, curvatura, los espacios tangentes de cada punto difieren del de los puntos cercanos y, por tanto, se necesita alguna manera de "***conectar***" o identificar vectores de diferentes espacios vectoriales, mediante una conexión sobre la variedad. En una variedad riemanniana, comúnmente, se escoge una conexión, que se supone además sin torsión, que sea compatible con la métrica, expresada por las componentes del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, en el sentido de que:

$$\nabla_{\mu}\, g_{\alpha\beta} = 0. \tag{30}$$

O sea, en otras palabras, que la métrica sea "paralela" con respecto a tal conexión. Entonces, de ambas condiciones se obtiene unívocamente la siguiente expresión para los símbolos de Christoffel de dicha conexión [13]:

$$\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma}}\right) \tag{31}$$

Aplicación a la Mecánica del Continuo: Caso Afín

Veremos cómo las formas fundamentales de la geometría unimodular afín tienen un origen diferente al de la geometría euclidiana. [8], [9], [10], [11] Entonces, para una misma superficie tenemos dos nociones, en general diferentes, de ***"vector normal"***, como se indica en la siguiente figura:

Así también, tenemos dos conexiones:

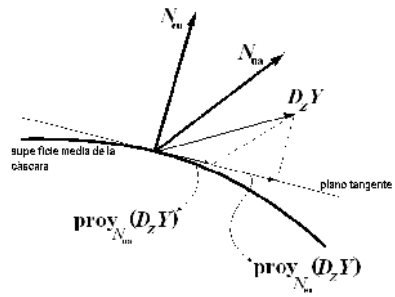
1) La ***conexión de Levi-Civita*** con respecto a la pseudométrica I_{ua}: $\widetilde{\nabla}$.
2) La ***conexión inducida normal afín***, ∇, o sea la proyección de D, la conexión playa natural de $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial, en la dirección de N_{ua}, i.e.: $\nabla_Z Y = \mathrm{proy}_{\mathrm{N_{ua}}}\left(D_Z Y\right)$,

donde Z e Y denotan ***campos vectoriales tangentes*** a una superficie. [8], [9], [10], [11]

A partir de lo anterior, también, se define a la ***segunda forma fundamental (cúbica) unimodular afín*** $\nabla\left(I_{ua}\right) = II_{ua}$, que en coordenadas locales se escribe:

$$II_{ua} = g_{\alpha\beta\gamma} du^{\alpha} du^{\beta} du^{\gamma} \tag{32}$$

Los coeficientes $g_{\alpha\beta\gamma}$ resultan totalmente simétricos en sus índices α, β y γ, [5, 6, 7]. Algunos autores la llaman ***forma cúbica***, debido a que es de tercer orden, lo que ya demuestra un cambio de situación de la presente geometría con respecto a la euclidiana. [8], [9], [10], [11]



Ahora, las derivadas segundas del vector posición, en términos de la base natural de los vectores tangentes y del vector normal afín, en el presente caso resulta: $\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \sum_{\delta=1}^{n} \hat{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta} \mathbf{x}_{\delta} + B_{\alpha\beta} N_{ua}$, donde $\hat{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta}$ son las componentes (***símbolos de Christoffel***) de la ***conexión normal afín inducida*** y los coeficientes $B_{\alpha\beta}$ son simétricos, [8], [9], [10], [11]. Entonces, la ***tercera forma fundamental afín*** se define por la expresión

$$III_{ua} = \sum B_{\alpha\beta} du^{\alpha} du^{\beta} \tag{33}$$

A partir de lo anterior, además, tenemos la ***forma de Weingarten***, también llamada ***operador de forma afín***, que es de cuarto orden, siendo sus componentes:

$$B^{\alpha}_{\beta} = \sum B_{\beta\gamma} g^{\alpha\gamma} \tag{34}$$

Conclusión

La Mecánica aparenta ser una materia de Física pero parece mucho más del área Matemática. La Geometría Diferencial y la Mecánica son indispensables para el Ingeniero de hoy. La formación del mismo debe ser completa. La ***física*** y la ***economía***, ambas son la base disciplinar fundamental de la Ingeniería, cuyo lenguaje es la ***matemática***. Los ingenieros tienen, en su formación profesional, como materias básicas, el Análisis Matemático y el Algebra Lineal, además de las materias de métodos numéricos y probabilidad, pero sería aconsejable suplementar esa formación avanzando en la teoría de curvas y superficies y aún en geometría diferencial, conteniendo tópicos más avanzados, ya que en varios temas, como por ejemplo el citado pasaje de la geometría euclidiana hacia la afín, involucrando a la Teoría de Cáscaras de la Ingeniería, ha quedado demostrada su utilidad y versatilidad en el desarrollo de nuevas tecnologías. La citada especialidad en la Ingeniería de hoy es una novedad [8], [9], [10], [11].

Referencia Bibliográfica

[1] Bedford A. Fowler W.*Mecánica para Ingeniería,Dinámica* Ed.Addison-Wesley, 1996.

[2] Cabannes, H. *Curso de Mecánica General.* Edit. Mont. Simon. 2ª ed. Barcelona, 1967.

[3] Gigena, S. Joaquin, D. Binia, M. Cabrera, E Abud, D. *Análisis Matemático II – Teoría, Práctica y Aplicaciones*, Ed.GALEON, ISBN Nº 987-9363-04-3, Córdoba. 1998.

[4] Goldstein, H. *Mecánica Clásica*. Editorial Aguilar. 2ª edición. Madrid, 1972.

[5] Gigena S. *Constant Affine Mean Curvature Hypersurfaces of Decomposable Type*, Proc of Symp. in Pure Math, Am Math Society, Vol. 54, Part 3, pp.289-316, 1993.

[6] Gigena, S. *Hypersurface Geometry and Related Invariants in a Real Vector Space,* Editorial Ingreso, Córdoba, Argentina, 1996a.

[7] Gigena, S. *Ordinary Differential Equations in Affine Geometry*, Le Matematiche,Vol. LI, Fasc.I, pp.119-151, 1996b.

[8] Gigena, S., Binia, M. y Abud, D. *Condiciones de Compatibilidad para Cáscaras Afines*, Mecánica Computacional Vol. XXI, pp.1862-1881, 2002.

[9] Gigena, S., Binia, M. y Abud, D. *Ecuaciones de equilibrio en Cáscaras Afines*, Mecánica Computacional, Vol. XXII, pp.1953-1963, 2003.

[10] Gigena, S., Abud, D. y Binia, M. *Teoría de Cáscaras Afines: Desigualdades Básicas*, Mecánica Computacional, Vol. XXIII, pp.639-652, 2004.

[11] Gigena, S., Abud, D. y Binia, M. *Teoría de Cáscaras Afines: Estimativas de la Tensión y la Deformación*, Mecánica Computacional, Vol. XXIV, 2745-2758, 2005.

[12] John, F. *Estimates for the Derivatives of the Stresses in a Thin Shell and Interior Shell Equations*, Comm. Pure Appl. Math. Nº 18, pp.235-267, 1965.

[13] Millman, R. y Parker, G. *Elements of Differential Geometry*, Prentice-Hall, N. Jersey, 1977.