LABORATORIO DE ÁLGEBRA LINEAL. AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Marta G. Caligaris, Georgina B. Rodríguez y Lorena F. Laugero

Grupo Ingeniería & Educación
Facultad Regional San Nicolás
Universidad Tecnológica Nacional
Colón 332 (2900) San Nicolás, Argentina
gie@frsn.utn.edu.ar

Área temática: Investigación educativa
Palabras Claves: autovalores, autovectores, obstáculo del formalismo, Scilab, ventanas personalizadas.

Resumen

Dos conceptos que comúnmente se estudian en el álgebra lineal en carreras de ingeniería son los de autovalor y autovector. Es importante que los alumnos aprendan adecuadamente estos conceptos con la finalidad de que puedan aplicarlos en las situaciones problemáticas de la especialidad.

En este trabajo se muestran las ventanas personalizadas que se han diseñado en SCILAB para enseñar los objetos del álgebra lineal anteriormente mencionados. Las autoras consideran que las aplicaciones presentadas constituyen una herramienta poderosa para reducir o prevenir el denominado obstáculo del formalismo.

Introducción

El álgebra lineal es reconocida generalmente como una asignatura difícil de aprender. Esto se debe a que la mayor parte de los conceptos se presentan como definiciones formales de objetos cuya existencia no tiene, en la mayoría de los casos, conexión con conocimientos previos ni argumentos geométricos o físicos que motiven la definición presentada [1]. Es por ello, que los estudiantes consideran al álgebra lineal como *"un catálogo de nociones muy abstractas, que no se llegan a representar; además esas nociones están sumergidas bajo una avalancha de palabras nuevas, de símbolos nuevos, de definiciones nuevas y de teoremas nuevos"* [2].

Esta situación genera en los alumnos lo que muchos autores, como Dorier o Sierpinska, han llamado ***obstáculo del formalismo***.

El obstáculo del formalismo es la tendencia de los estudiantes a comportarse como si las representaciones simbólicas formales de los objetos del álgebra lineal fueran los objetos en sí mismos, por lo cual los alumnos manipulan las representaciones mecánicamente sin comprender su significado y sin percibir las relaciones entre ellas [3].

Según Sierpinska, el obstáculo del formalismo es de corte didáctico y se debe tratar de evitar. La tarea de diseñar situaciones con este fin no es fácil dada la complejidad de dicho obstáculo [4].

Dos conceptos que comúnmente se estudian en el álgebra lineal en carreras de ingeniería son los de autovalor y autovector, debido a la gran utilidad que tienen los mismos en diversas aplicaciones de las distintas especialidades. Para ayudar a los alumnos a construir y entender adecuadamente dichos conceptos, se hizo uso de las potencialidades que brindan los recursos tecnológicos como instrumentos que permiten representar diversos registros semióticos de un mismo concepto, así como también, favorecer la participación activa de los estudiantes en su proceso de aprendizaje. Para ello, se diseñaron ventanas personalizadas donde los estudiantes, por medio de su visualización y manipulación, podrán incorporar no sólo los conceptos de autovalor y autovector sino también deducir las propiedades que éstos verifican.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar las ventanas personalizadas, elaboradas en SCILAB, como una herramienta más para enseñar el tema "autovalores y autovectores".

Las autoras consideran que el uso de este tipo de herramientas en el proceso de aprendizaje puede ayudar a prevenir la construcción del obstáculo del formalismo y así lograr una sólida formación en cuanto a los contenidos del álgebra lineal, condición esencial para cualquier futuro ingeniero.

Las dificultades en el aprendizaje del álgebra lineal

Diversas investigaciones muestran que las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje del álgebra lineal son las mismas, independientemente de los métodos de enseñanza aplicados. Según Dorier, las dos causas fundamentales de las dificultades que presentan los estudiantes son: la naturaleza de álgebra lineal en sí misma (las dificultades conceptuales), y el tipo de pensamiento requerido para la comprensión del álgebra lineal (las dificultades cognoscitivas) [5]. Cabe destacar que, estos dos aspectos a menudo son inseparables.

Estas dificultades, junto con la forma en que usualmente se presentan los conceptos del álgebra lineal, hacen que los estudiantes enfrenten lo que se ha denominado el ***obstáculo del formalismo***. El alumno desarrolla “mecanismos de defensa” que consisten en intentar reproducir un discurso formalmente escrito similar al del libro de texto o al de la clase pero sin entender el significado de los símbolos y la terminología [5]. Es decir, el obstáculo del formalismo se manifiesta en los estudiantes cuando éstos manipulan las representaciones formales simbólicas sin comprenderlas.

Por esta razón, resulta importante que los estudiantes aborden los diversos conceptos del álgebra lineal a través de sus distintos registros semióticos para lograr así una comprensión profunda y adecuada de los mismos.

Autovalores y autovectores

El tema de autovalores y autovectores se encuentra prácticamente en la totalidad de los programas de distintas asignaturas del ciclo básico de las carreras de ingeniería. Sus aplicaciones en mecánica del sólido, mecánica de fluidos, vibraciones, electromagnetismo, entre otros, abarcan un amplio campo de estudio y acción de los futuros profesionales [6]. Por esta razón, es importante que los alumnos aprendan adecuadamente estos conceptos con la finalidad que de que los mismos puedan aplicarlos en las situaciones problemáticas de la especialidad que los requieran.

No obstante, es común que los estudiantes en su proceso de aprendizaje trabajen con ambos conceptos en forma algorítmica, es decir, apliquen rutinariamente determinados procedimientos sin comprenderlos y sin articular sus diferentes representaciones. Esto hace que los alumnos no logren un aprendizaje duradero y significativo.

Es por ello que, teniendo en cuenta la disponibilidad creciente de los recursos tecnológicos como medio para facilitar la visualización, la exploración, la manipulación y el cálculo, resulta interesante que el docente proponga en el aula actividades que hagan uso de tales recursos y que permitan que el alumno logre integrar los nuevos conocimientos en sus estructuras cognitivas.

Uso de recursos tecnológicos

El empleo de los recursos tecnológicos en el proceso de aprendizaje permite que el docente genere situaciones de enseñanza que favorezcan el aprendizaje significativo por parte de los alumnos.

En particular el empleo de programas computacionales, ya sean de cálculo simbólico o numérico, posibilita que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos por medio de la exploración, visualización y experimentación. Esto se debe a que los mismos facilitan la manipulación de múltiples registros semióticos del objeto matemático que se quiere aprender. Además, el uso de estos programas favorece el protagonismo del alumno ya que se reducen los cálculos rutinarios y permite que el estudiante oriente su esfuerzo hacia la adquisición de conceptos y propiedades por medio de su interacción dinámica.

Todas estas cualidades hacen que los programas computacionales sean una herramienta poderosa para reducir o prevenir el denominado obstáculo del formalismo, dificultad muy ligada a las manipulaciones simbólicas del álgebra lineal [7].

Laboratorio de Álgebra lineal

Las versiones más recientes de programas computacionales de matemática ofrecen la posibilidad de diseñar interfaces gráficas personalizadas por medio de las cuales es factible generar laboratorios virtuales.

El empleo de este tipo de herramientas en el proceso de enseñanza posibilita generar actividades que permiten potenciar en los alumnos un tipo de pensamiento matemático diferente. Es decir, permiten crear situaciones donde se estimula a los estudiantes a que formulen conjeturas, analicen, verifiquen hipótesis, argumenten, descubran conceptos matemáticos con sólo modificar los datos y repetir el experimento cuantas veces se requiera [8].

Existen distintos trabajos de investigación donde se propone el uso de un entorno computacional en la enseñanza del álgebra lineal como una forma para lograr un aprendizaje significativo. Así por ejemplo, en el estudio realizado por Sierpinska y Dreyfus hacen uso del programa CABRI GEOMETRY II como una herramienta de ayuda pedagógica para trasmitir las nociones generales de espacio vectorial, transformación lineal y autovector a través de una intuición geométrica, creando un ambiente de aprendizaje adecuado con el software [3].

No obstante, no existen prácticamente aplicaciones donde se vinculen distintos registros semióticos de los conceptos de autovalor y autovector. Por esta razón, para el estudio de tales conceptos, se hizo uso de la posibilidad que brinda SCILAB para diseñar interfaces gráficas personalizadas utilizando la potencia de cálculo y graficación que dispone el programa.

La elección del software se basa fundamentalmente en el hecho de que los alumnos pueden obtenerlo fácilmente debido a que se encuentra disponible en forma gratuita en Internet. En el sitio www.scilab.org se puede obtener el programa así como también documentación de introducción al uso del mismo.

Ventanas personalizadas

El laboratorio de Álgebra lineal que se presenta en este trabajo está compuesto por una serie de ventanas que permiten trabajar con el cálculo de autovectores y autovalores, sus propiedades y una interpretación gráfica.

La capacitación que se requiere para utilizar estas ventanas es mínima debido a que las mismas fueron diseñadas de manera que presenten una interfaz muy sencilla de interpretar y manipular. Esto posibilita a los alumnos concentrarse en los conceptos o propiedades que el docente quiere destacar.

En la Figura 1 se muestra la ventana de cálculo de los autovalores y autovectores asociados a una matriz.

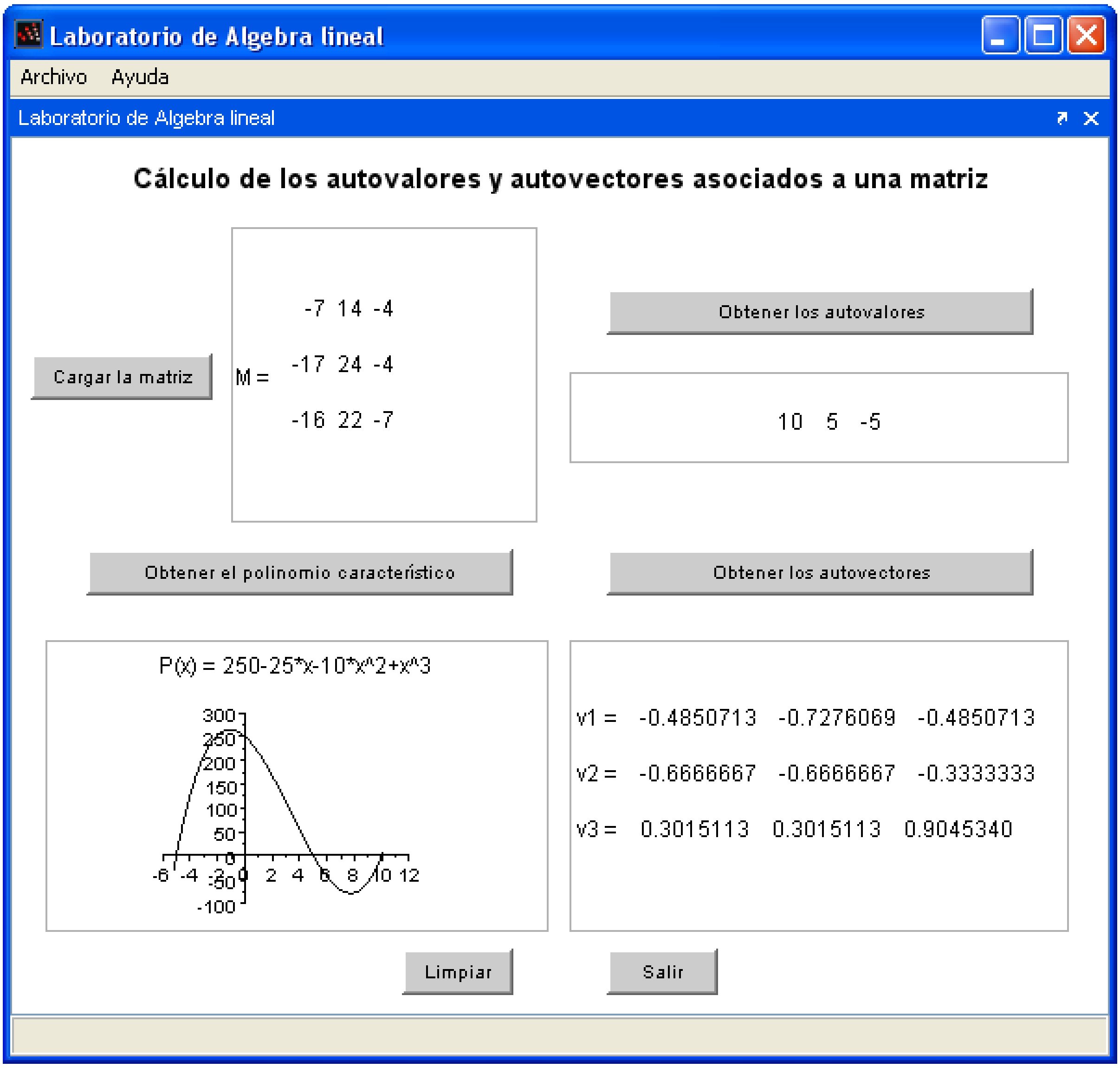

Figura 1. Cálculo de los autovalores y autovectores asociados a una matriz.

Para la utilización de esta ventana, se debe ingresar, en primer lugar, la matriz a la cual se le quiere calcular los autovalores y autovectores. Para ello, es necesario pulsar el botón **Cargar la matriz** el cual permite, luego de indicar el orden de la misma, escribir cada uno de los coeficientes de la matriz. Si se selecciona el botón **Ayuda**, que se encuentra en la barra de menú, el alumno obtendrá una breve descripción de la aplicación, mientras que si presiona el botón **Limpiar** podrá borrar todos las salidas que se observan en la ventana.

Para obtener los autovalores y cada uno de los autovectores asociados se requiere que el alumno presione los botones **Obtener los autovalores** y **Obtener los autovectores** respectivamente. Cabe aclarar que SCILAB expresa los autovectores asociados a cada autovalor como versores, algo que usualmente el alumno no hace en la práctica en papel y lápiz cuando se le pide este tipo de cálculo.

Para que el estudiante analice el polinomio característico y la función asociada a dicho polinomio, es necesario pulsar el botón **Obtener el polinomio característico**. De esta manera el alumno, a partir de la visualización de la gráfica, podrá observar que los ceros del polinomio característico coinciden con los autovalores asociados a la matriz ingresada.

Además, al hacer click en cada uno de los botones **Obtener . . .**, el alumno no sólo obtendrá los distintos resultados sino que aparecerá un cartel indicando los pasos algebraicos a seguir para calcularlos.

La interacción del alumno con la ventana mostrada en la Figura 1 es una situación propicia para la introducción de la explicación del cálculo de los autovalores y autovectores asociados a partir de la definición de los mismos.

En la Figura 2 se muestra una aplicación diseñada para vincular distintos registros semióticos de los autovectores asociados a cada autovalor de una matriz.

En ella, se propone inicialmente una matriz M de dos filas y dos columnas, y un vector **u** que puede o no ser autovector de la matriz. A partir de la información ingresada, se efectúa el cálculo del vector **v**, producto de M por **u**, y de los cocientes de las componentes homólogas de **v** y **u**. En la situación de que ambos cocientes sean iguales, aparecerá un mensaje comunicando que el valor del cociente es un autovalor de la matriz. En caso contrario, no se muestra mensaje alguno [9].

Además, los estudiantes tendrán la posibilidad de determinar si **v** es autovector de M a partir del análisis de los gráficos de los vectores **u** y **v** = M **u.** Estos gráficos se pueden obtener al presionar el botón **Ver gráfico**. A partir de su visualización, los alumnos podrán comprobar que si **v** es un autovector, éste deberá ser colineal a **u** y que el coeficiente de proporcionalidad está dado por el valor del autovalor.

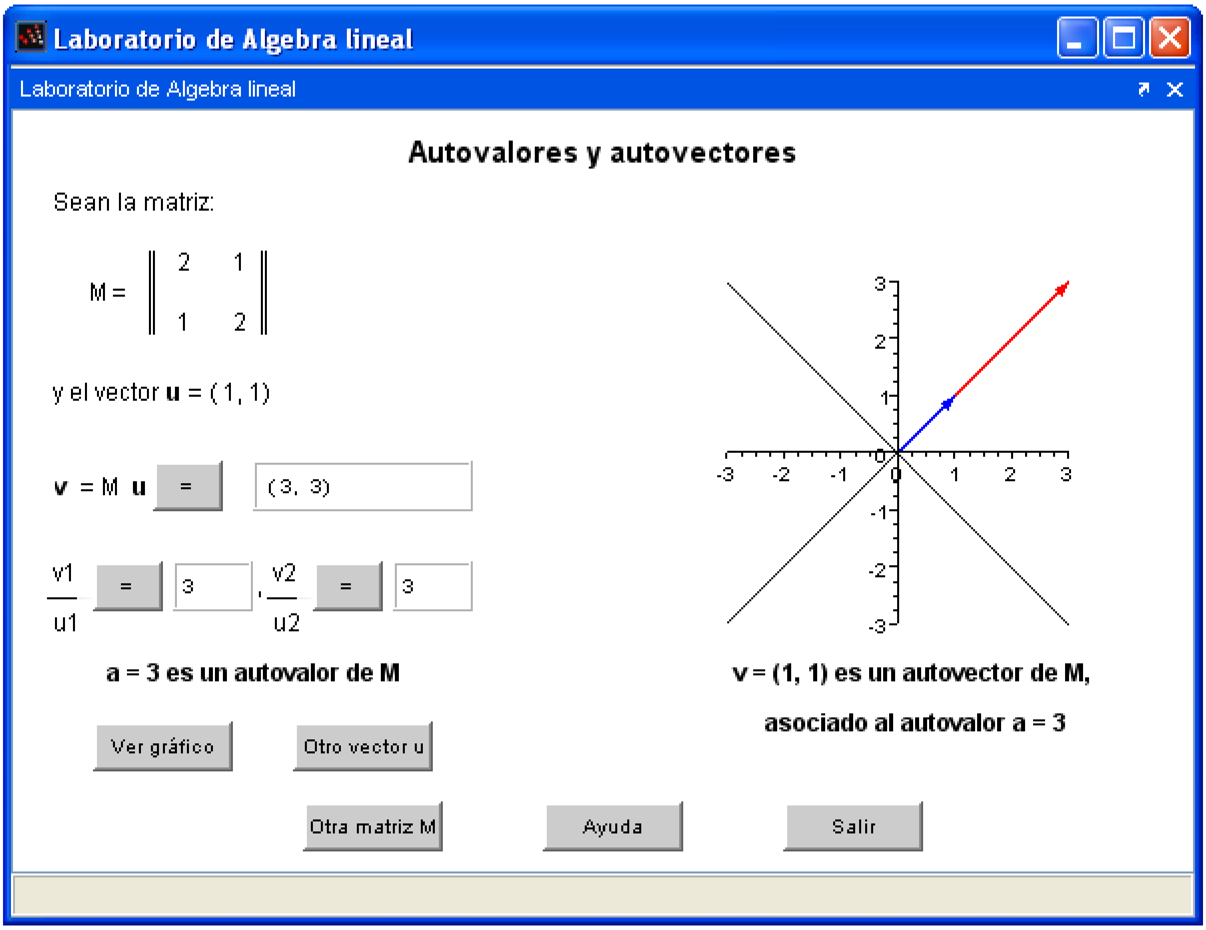

Figura 2. Autovectores: distintos registros semióticos.

Si el alumno quiere seguir trabajando con la misma matriz pero con otros vectores, es necesario que oprima el botón **Otro vector u**. Del mismo modo, si decide cambiar de matriz, se deberá pulsar el botón **Otra matriz M**. Cabe destacar que con esta ventana personalizada se puede analizar qué es lo que ocurre cuando la matriz es singular, o cuando los autovalores son múltiples o complejos.

Con la finalidad de que los estudiantes deduzcan algunas de las propiedades que verifican los autovalores se les planteará el cálculo de los mismos en determinadas matrices. Aplicando un pensamiento inductivo y teniendo en cuenta las preguntas que se les plantea en cada situación, los estudiantes podrán enunciar las distintas propiedades. No obstante, es importante aclararles que para que una propiedad sea válida no es suficiente con mostrar que para algunos ejemplos se cumple. Por esta razón, esta situación plantea la necesidad de realizar una demostración formal de cada una de las propiedades analizadas.

Las Figuras 3 y 4 muestran dos de las situaciones que se les plantearán a los alumnos tras el uso de la ventana **Propiedades de los autovalores**.

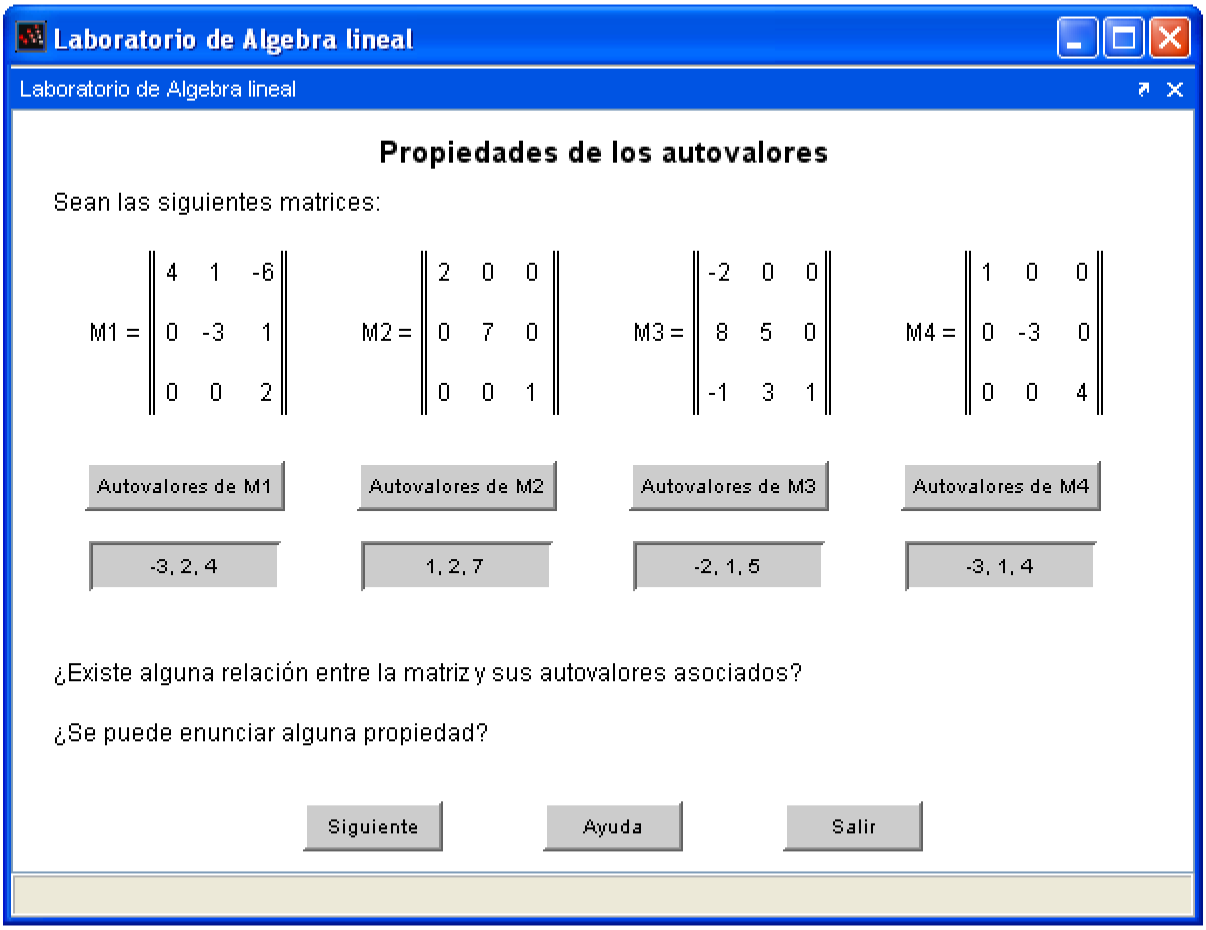

Figura 3. Propiedades de los autovalores.

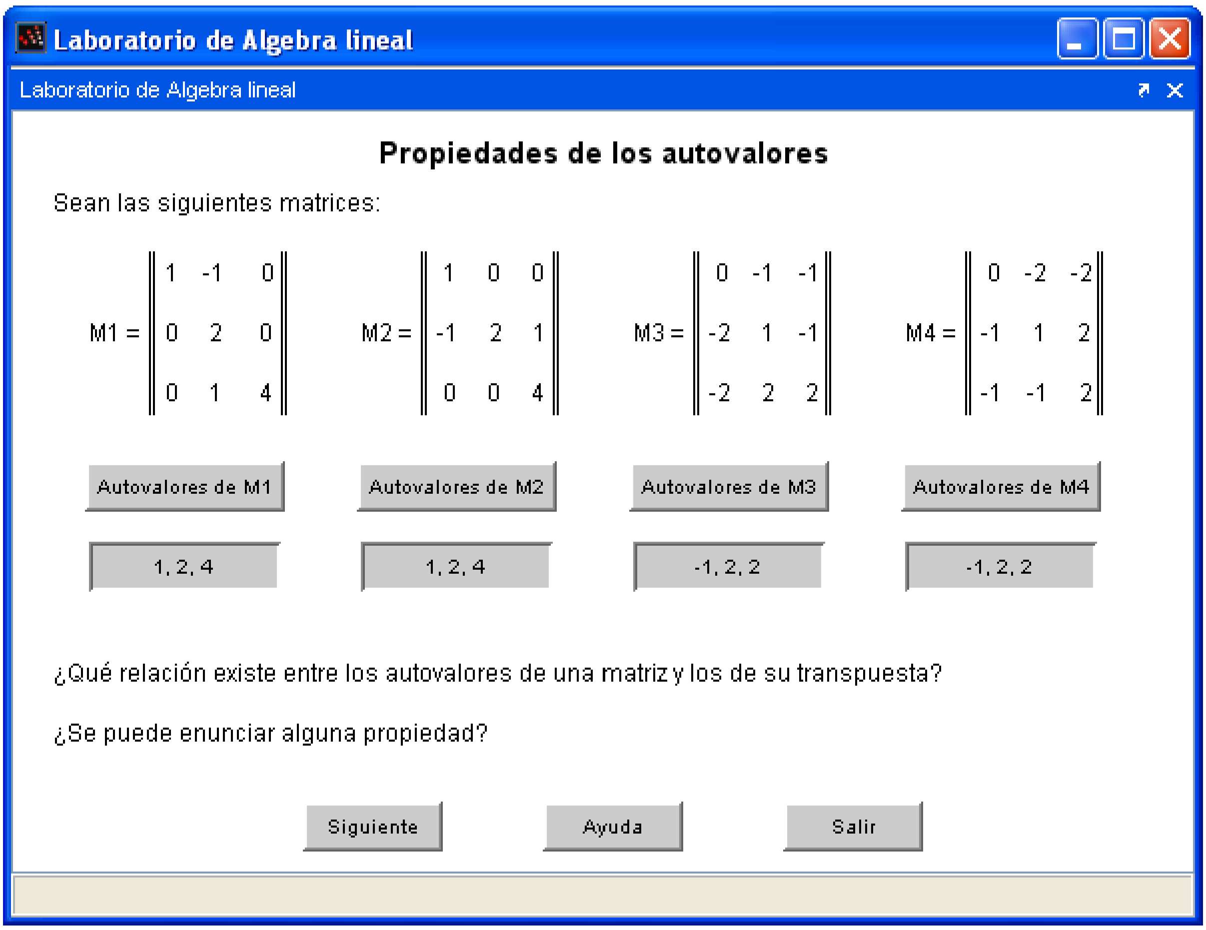

Figura 4. Propiedades de los autovalores.

Como se puede observar en la Figura 3, los alumnos verán, en este caso, que los autovalores de una matriz triangular son las componentes de la diagonal principal de la matriz. Del mismo modo, a partir del análisis de los resultados obtenidos en los ejemplos de la Figura 4, podrán enunciar que los autovalores de una matriz y los de su transpuesta son los mismos [10 – 12].

Una vez que el alumno ha respondido las dos preguntas planteadas, podrá obtener un nuevo ejemplo presionado el botón **Siguiente** que se encuentra en la parte inferior de la ventana. Cuando éste haya completado todas las situaciones propuestas, aparecerá el mensaje que se muestra en la Figura 5.

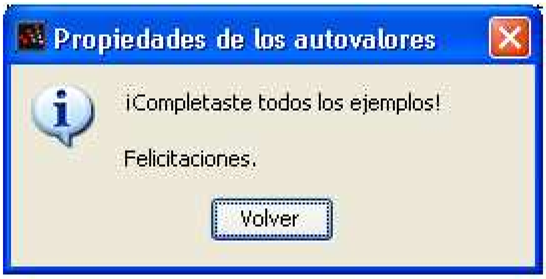

Figura 5. Mensaje que aparece al completar todos los ejemplos.

De manera similar, se diseñó una ventana para que los alumnos trabajen también con las propiedades de los autovectores.

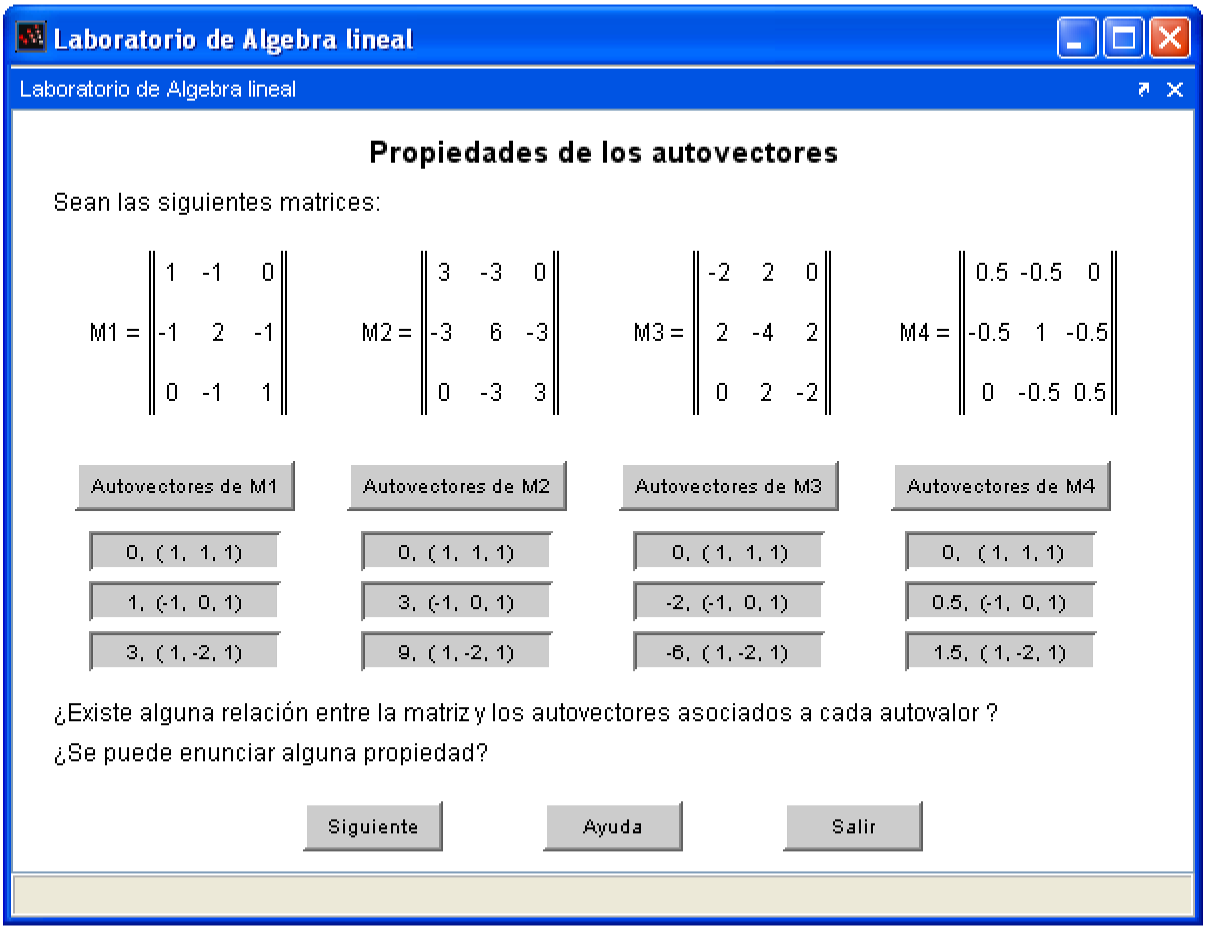

Figura 6. Propiedades de los autovectores.

En el ejemplo que se muestra en la Figura 6, aparecen cuatro matrices, cuya relación no se indica expresamente. Al calcular los autovectores de cada una, los alumnos podrán observar que todas tienen los mismos. Esto llevará a los estudiantes a observar con más detenimiento dichas matrices, y darse cuenta que las matrices están relacionadas por las siguientes expresiones: M2 = 3.M1, M3 = -2.M1 y M4 = 0,5.M1. De esta manera, a partir de los ejemplos propuestos, se podrá inducir la propiedad de que los autovectores de una matriz multiplicada por un real se conservan, no siendo así para el caso de los autovalores.

Conclusiones

La utilización del Laboratorio de Álgebra lineal por parte de los alumnos no sólo posibilita un mejor empleo del tiempo que usualmente se utiliza en la realización de cálculos rutinarios al destinarlo al desarrollo de procesos mentales de orden superior, sino que permite la reducción o disminución del obstáculo del formalismo, al lograr un equilibrio entre los enfoques concretos y abstractos en la enseñanza del álgebra lineal.

El propósito de las autoras es, en una segunda etapa, analizar el impacto que tiene el empleo de este tipo de recursos en el aprendizaje de los conceptos de autovalor y autovector y así poder determinar si efectivamente el uso de la aplicación propuesta permite que el alumno logre un aprendizaje significativo.

Referencias

[1] Costa, V. & Vacchino, M. (2007). *La enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal en la Facultad de Ingeniería, UNLP*. XXI Congreso Chileno de Educación en Ingeniería. Universidad de Chile. Actas de Congreso.

[2] Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (1997). L'Algèbre *Linéaire: L'Obstacle du Formalisme à Travers Diverses Recherches de 1987 à 1995*, citado por Farfán, R. & Rivera, A. (2001). *El obstáculo del formalismo y los modos de pensamiento en el caso de transformaciones lineales*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 14, 361 – 369. Panamá.

[3] Uicab, R. & Oktaç, A. (2006). *Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 9, Nº 3, 459 – 490. México.

[4] Sierpinska, A. & Dreyfus, T. (1999). *Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: The case of Linear Transformations*, citado por Farfán, R. & Rivera, A. (2001). *El obstáculo del formalismo y los modos de pensamiento en el caso de transformaciones lineales*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 14, 361 – 369. Panamá.

[5] Hurman, L. (2007). *El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza – aprendizaje del Álgebra Lineal*. Enseñanza del Álgebra. Colección Digital Eudoxus. Nº 3.

[6] Lassalle, M., Blangino, E. & Svoboda, H. (2006). *Enseñanza significativa del concepto de autovectores y autovalores en Ingeniería: orientación a las aplicaciones*. V Congreso Argentino de Enseñanza de la Ingeniería. Universidad Nacional de Cuyo.

[7] Pulido, P. (2002). *Una estrategia didáctica par ala enseñanza del álgebra lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico DERIVE*. Revista Complutense de Educación. Vol. 13, Nº 2, 645 – 675. ISSN: 1130-2496.

[8] Pulido, P. (2002). *La enseñanza del Álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de Educación. ISBN: 84-669-2352-7.

[9] Klasa, J. (2010). *A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple*. Linear Algebra and its Applications. Vol. 432, Issue 8, 2100 – 2111.

[10] Rojo, A. (1981). *Álgebra II*. (7). Argentina: El Ateneo.

[11] Grossman, S. (1999). *Álgebra Lineal*. México: Mc Graw – Hill.

[12] Kozak, A., Pastorelli, S. & Vardanega, P. (2007). *Nociones de Geometría Analítica y Álgebra Lineal*. Argentina: Mc Graw – Hill.