RESOLUCIÓN DE SISTEMAS AUTÓNOMOS. DINÁMICA NO LINEAL

Lucuy Suarez A. – Ponce L.V. – Dodera M.G.
Ciclo Básico Común de la Universidad de Buenos Aires – Argentina
alucuy@gmail.com; laura.ponce@gmail.com; gdodera@cbc.uba.ar
Aplicaciones de la Matemática
Palabras Claves: Estabilidad – Diagrama de fase – Bifurcación

RESUMEN

El comportamiento no lineal de las ecuaciones diferenciales se puede visualizar en aquellos sistemas autónomos, donde la dependencia temporal no resulta explícita. A veces, dichos sistemas son difíciles de reducir a un sistema simple de ecuaciones para obtener una trayectoria temporal bien definida. Una alternativa posible es analizar la estabilidad local de sus puntos de equilibrio y visualizar las tendencias en el diagrama de fases incorporando un estudio variacional de los parámetros más relevantes. Si bien las condiciones iniciales no intervienen en la dinámica de las trayectorias, influyen en cómo se acomodan sus tendencias a lo largo del tiempo.

INTRODUCCIÓN

Los modelos matemáticos utilizados para describir la evolución de un sistema dinámico están limitados en su resolución, por el grado de dificultad de las ecuaciones involucradas a tal fin.

Los sistemas dinámicos (físicos, químicos, biológicos, económicos o de otra clase) se clasifican como estables, inestables o caóticos en función de la evolución de su respuesta temporal, y son no lineales cuando su comportamiento no está sujeto al principio de superposición. Algunos sistemas dinámicos no lineales tienen soluciones exactas o integrables, mientras que otros tienen comportamiento caótico, es decir que una mínima diferencia en las condiciones iniciales hace que el sistema evolucione de diversas maneras (movimientos de fluidos en régimen turbulento, crecimiento de población, entre otros).

Aún así, el planteamiento de las ecuaciones para analizar la evolución del sistema y su posterior solución no garantizan un total entendimiento del comportamiento y de las tendencias hacia alguna situación de equilibrio estable o inestable que pueda ocurrir.

En ese sentido, existen al menos dos alternativas de resolución bien contrastadas. Una de ellas consiste en recurrir al análisis y el álgebra (cálculo diferencial e integral, autovalores y autovectores, matriz jacobiana, etc....) para reducir las ecuaciones del modelo a un sistema simple de ecuaciones diferenciales. La otra, consiste en estudiar la trayectoria producida en los llamados “diagramas de fase”, donde se trabaja en forma independiente del tiempo y de las condiciones iniciales. El diagrama de fase, espacio fásico o espacio de fases es una construcción matemática que permite representar el conjunto de posiciones y velocidades de una variable de un sistema dinámico. Es una variedad diferenciable de dimensión par, donde las coordenadas de cada punto representan tanto las posiciones generalizadas como sus momentos conjugados correspondientes, y no la trayectoria que describe el recorrido espacial de la variable.

Las trayectorias producidas en los diagramas de fase se obtienen a partir de los estados dinámicos que se caracterizan por cambiar continuamente las condiciones de contorno para el próximo estado. Si bien esta alternativa aparenta ser matemáticamente menos rigurosa, en la mayoría de los casos se puede prever una solución sin tener que resolver analíticamente el sistema de ecuaciones.

A efectos de analizar la estabilidad local de un punto de equilibrio es frecuente que se simplique el problema estudiando el comportamiento del sistema lineal obtenido por linealización de las funciones que aparecen en el modelo no lineal, pero esta simplificación sólo corresponde cuando el comportamiento del sistema está sujeto al principio de superposición, o sea para el caso en que los cambios sean suaves y sigan patrones lineales.

La DNL no se basa en los supuestos de regularidad y orden que involucran los métodos de aproximación lineal utilizados para simplificar la descripción de la evolución de un sistema, sino que trabaja con modelos que reflejan más adecuadamente las situaciones reales.

Cabe destacar que esta metodología no es nueva; se aplica en diversas áreas como mecánica (osciladores, láseres y circuitos superconductores), biología (sistemas de control genético), química (sistema de regulación de ph o buffers), entre otras. Uno de los primeros precursores en el estudio de la evolución dinámica fue Poincaré (1890), quien demostró que las variaciones en las condiciones iniciales de un sistema provocarían enormes cambios en su comportamiento, y que los métodos de perturbación podían, en algunos casos, predecir resultados incorrectos. Lorenz (1963) redescubrió la dependencia sensible a las condiciones iniciales al desarrollar un modelo sencillo para la predicción del tiempo, que presentaba el efecto mariposa, es decir, el sistema era inherentemente impredecible de tal modo que pequeñas variaciones en la fijación de las condiciones iniciales podían variar drásticamente su evolución futura. Este comportamiento fue denominado como caos por el científico norteamericano Yorke (Li and Yorke, 1975). Trabajos científicos posteriores confirmaron, tanto teórica como experimentalmente, que aún sistemas simples podían presentar una evolución temporal impredecible.

Según Sanjuán (2005) una de las características fundamentales de la dinámica no lineal (DNL) es su carácter interdisciplinar y universal. La constatación de que sistemas físicos sencillos pueden comportarse de modo impredecible probablemente ha supuesto una revolución conceptual en la ciencia moderna especialmente en el ámbito de la Física e Ingeniería. Dicho autor señala además, que la base metodológica de la enseñanza de la dinámica no lineal consiste en utilizar ejemplos que permitan ilustrar los principales conceptos de cada asignatura de modo intuitivo.

Siguiendo dicha metodología de enseñanza, en el presente trabajo proponemos mediante ejemplos mostrar cómo se utilizan en DNL los diagramas de fase para analizar las tendencias hacia o desde los puntos de equilibrio de un sistema autónomo, como un aporte a la interpretación de los modelos matemáticos. Se pretende discutir la estabilidad de los puntos de equilibrio y aplicar esta técnica al ejemplo desarrollado por Strogatz (1994) sobre crecimiento de poblaciones.

DESARROLLO

La DNL no se basa en los supuestos de regularidad y orden que involucran los métodos de aproximación lineal utilizados para simplificar la descripción de la evolución de un sistema, sino que trabaja con modelos que reflejan más adecuadamente las situaciones reales. La linealización de un sistema no lineal sólo es aceptable y útil si los cambios son suaves y siguen patrones lineales. En la medida que no se cumplan estas condiciones, puede ocurrir que pequeñas modificaciones produzcan grandes cambios, imposibles de explicar mediante la aproximación lineal. Es en estos casos en que conviene aplicar la DNL para predecir el comportamiento del sistema.

Al aplicar los métodos de la DNL se trabaja en forma independiente del tiempo y de las condiciones iniciales. Básicamente se estudia la trayectoria producida en los diagramas de fase, se analiza la estabilidad local de los puntos de equilibrio y se determinan zonas de diferentes propiedades. Cuando el sistema, lineal o no lineal, involucra uno o varios parámetros en su evolución, las variaciones de éste al pasar por un valor crítico llamado bifurcación producen cambios cualitativos en la naturaleza de dichos puntos críticos y de sus trayectorias.

En el presente trabajo nos abocaremos al estudio de sistemas autónomos, que son aquellos sistemas en donde la dependencia temporal no resulta explícita.

En primera instancia analizaremos sistemas autónomos definidos por:

$$\dot{x} = f(x) \qquad (1)$$

donde $\dot{x}$ es la velocidad de crecimiento de la variable x relevante del modelo.

Tales sistemas se caracterizan porque los puntos de equilibrio están representados por los ceros de la función escalar f. A partir de ellos se puede clasificar, mediante un simple análisis de estabilidad, el tipo de solución en estable o inestable, estudiando el signo de la velocidad de crecimiento en un entorno de los mismos.

En la figura 1 se presenta el diagrama de fase de un sistema autónomo que cumple (1), cuyos puntos de equilibrio son x_1 y x_2.

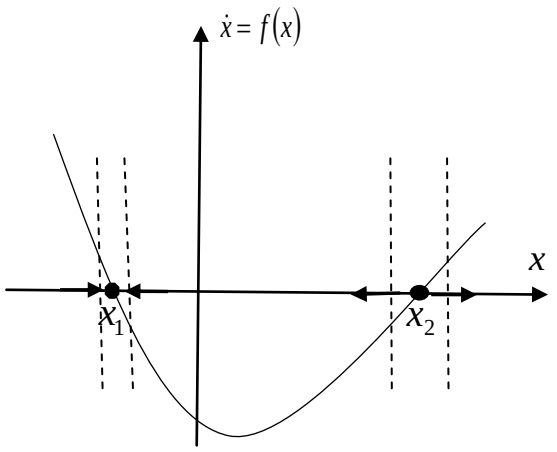

Fig.1: Diagrama de fases de un sistema no autónomo $\dot{x} = f(x)$, cuyos puntos de equilibrio son x_1 y x_2.

Al considerar el desarrollo en serie de Taylor de f alrededor del punto de equilibrio x_1, resulta:

$$\dot{x} = f(x)\big|_{x_1} = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2} f''(x_1)(x - x_1)^2 + \ldots \quad (2)$$

con $f(x_1) = 0$ y $f'(x_1) < 0$ por ser f decreciente en x_1.

Cuando $f'(x_1) \neq 0$, al linealizar se desprecia el término cuadrático y por ende, la aproximación en un entorno de x_1 resulta

$$\dot{x} = f(x)\big|_{x_1} \cong f'(x_1)(x - x_1).$$

Al evaluar el término lineal de (2), en valores de x cercanos a x_1 por derecha y por izquierda, o sea en $x = (x_1 + h)$ y en $x = (x_1 - h)$ respectivamente, con $h > 0$, se obtiene:

$$\dot{x} = f(x_1 + h)\big|_{x_1} \cong f'(x_1)(h) < 0 \qquad (3)$$

y

$$\dot{x} = f(x_1 - h)\big|_{x_1} \cong f'(x_1)(-h) > 0 \qquad (4)$$

Para reflejar la tendencia del sistema en un entorno de los puntos de equilibrio, en el diagrama de fases se indica con flechas el sentido de la velocidad $\dot{x}$. Cuando las flechas convergen al punto de equilibrio, éste resulta estable, mientras que cuando diverge resulta inestable.

Al visualizar el diagrama de fases presentado en Fig. 1, y de acuerdo con los signos de (3) y (4), se concluye que el punto de equilibrio en $x = x_1$ resulta estable (flechas convergentes). Esta conclusión no es un

hecho menor ya que en DNL se demuestra que cualquier trayectoria en un entorno de un punto de equilibrio estable convergerá hacia el mismo (de la Fuente, 2000).

Teniendo en cuenta que f es creciente en x_2, al despreciar el término cuadrático y evaluar en el término lineal de (2) en valores cercanos a x_2, por derecha y por izquierda, se obtiene respectivamente:

$$\dot{x} = f(x_2 + h)\big|_{x_2} \cong f'(x_2)(h) > 0 \qquad (5)$$

y

$$\dot{x} = f(x_2 - h)\big|_{x_2} \cong f'(x_2)(-h) < 0 \qquad (6)$$

A partir de los signos de (5) y (6) se concluye que el punto de equilibrio en $x = x_2$ resulta inestable, hecho que se puede visualizar en el diagrama de fases (en Fig. 1, flechas divergentes en un entorno de x_2). De acuerdo a resultados de la teoría de DNL, si $f(x)$ es una función escalar, cualquier trayectoria en un entorno de un punto de equilibrio inestable divergirá del mismo (de la Fuente, 2000).

El procedimiento que se ha descripto se aplicará a un sistema autónomo para analizar su estabilidad. A partir de su desarrollo se podrá valorar la importancia del método para incorporar al análisis un conocimiento a priori de las tendencias de las trayectorias temporales.

Sea un sistema autónomo cuya función escalar es:

$$\dot{x} = f(x) = x - x^3 \qquad (7)$$

mediante su diagrama de fase (Fig. 2) se puede predecir las diferentes tendencias hacia o desde los puntos de equilibrio que rigen el comportamiento de la función. Se observa que este sistema es estable en los puntos $x_1 = -1$ y $x_3 = 1$ mientras que en $x_2 = 0$ es inestable.

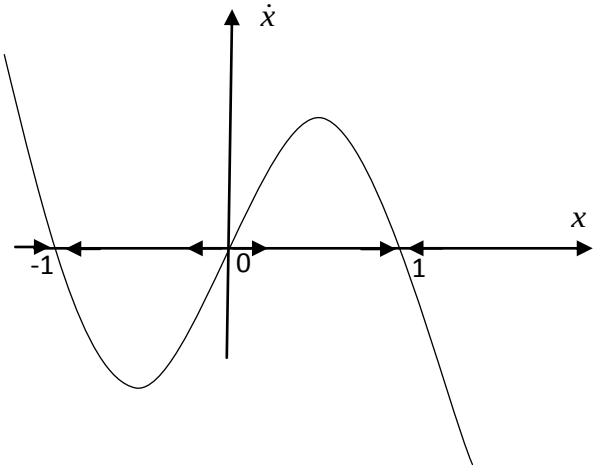

Fig.2: Diagrama de fase del sistema autónomo $\dot{x} = f(x) = x - x^3$

Las condiciones iniciales, si bien no intervienen en la dinámica de la trayectoria, influyen en cómo se acomodan alguna de dichas tendencias a lo largo del tiempo (Fig. 3.).

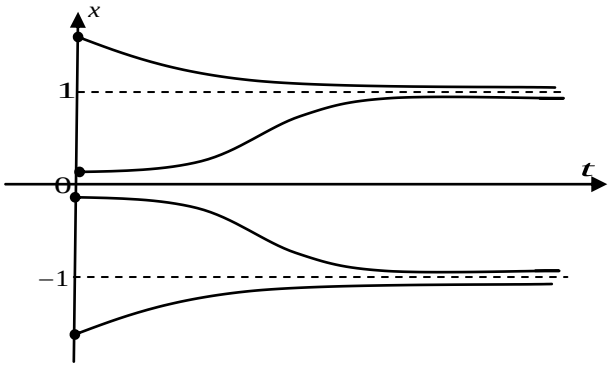

Fig.3: Trayectorias temporales del sistema autónomo $\dot{x} = f(x) = x - x^3$ para diferentes condiciones iniciales.

En dicha figura se muestra el tipo de trayectoria temporal prevista para diferentes condiciones iniciales (se tomaron cuatro valores iniciales diferentes que pueden leerse sobre el eje x para $t = 0$). Se puede visualizar la tendencia a la estabilidad en un entorno del punto $x_1 = -1$ y del punto $x_3 = 1$, y la tendencia a la inestabilidad cerca del punto $x_2 = 0$, y que dichas tendencias son independientes de los valores iniciales que se asignen en un entorno de los puntos críticos.

La expresión dada en (7) se puede resolver mediante separación de variables:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{x(1-x)(1+x)} = \int_{t_0=0}^{t} dt \qquad (8)$$

donde x_0 es la posición inicial de la trayectoria temporal.

Aplicando a (8) el método de fracciones simples se obtiene: $\left[\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1-x| - \frac{1}{2}\ln|1+x|\right]_{x_0}^{x} = \left[t\right]_0^t$

de donde se deduce la relación existente entre x y t:

$$\frac{x^2(1-x)}{1+x} = \frac{x_0^2(1-x_0)}{1+x_0}\, e^{2t} \qquad (9)$$

Cabe destacar que a pesar de que se logró encontrar la dependencia entre las variables x y t, es difícil a partir de la (9) visualizar las tendencias a la estabilidad e inestabilidad del sistema autónomo descripto en (7). Esto realza la importancia y simplicidad del análisis de estabilidad presentado.

Consideremos ahora, que si bien la aproximación lineal alrededor de los puntos de equilibrio permite predecir las tendencias de los sistemas autónomos definidos por la (1) $\dot{x} = f(x)$, el análisis puede no llegar a ser suficiente para entender el comportamiento de los mismos frente a variaciones de los parámetros más relevantes.

En efecto, consideremos en esta segunda instancia (Dinámica Comparativa) el siguiente sistema autónomo:

$$\dot{x} = f(x,\alpha) \qquad (10)$$

con $x = x(t,\alpha)$, $\dot{x} = \dot{x}(t,\alpha)$ y α cualquier parámetro escalar o vectorial relevante del sistema.

Esta nueva dependencia no afecta la determinación de los puntos de equilibrio dados por los ceros de (10), pero la inclusión de α en el análisis produce una injerencia directa en el comportamiento del sistema alrededor de los puntos de equilibrio, según los posibles valores que pueda tomar α.

Al derivar la (10) respecto del parámetro α, se obtiene:

$$\frac{\partial \dot{x}(t,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial f[x(t,\alpha),\alpha]}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial f[x(t,\alpha),\alpha]}{\partial \alpha} \qquad (11)$$

Considerando $\dot{x} = \dot{x}(t,\alpha)$ diferenciable, se cumple

$$\frac{\partial \dot{x}(t,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 x(t,\alpha)}{\partial t\,\partial \alpha} = \frac{\partial^2 x(t,\alpha)}{\partial \alpha\,\partial t} = \dot{x}_\alpha \qquad (12)$$

y, la expresión dada en (11) se puede escribir como una ecuación diferencial lineal en el parámetro α, a lo largo de una trayectoria definida $x(t,\alpha)$:

$$\dot{x}_\alpha = f_x[x(t,\alpha),\alpha] * x_\alpha + f_\alpha[x(t,\alpha),\alpha] \qquad (13)$$

La resolución de la (13) no resulta simple para cualquier estado de una posible trayectoria, salvo en el caso en que se inicialice en un estado estacionario, de manera que se la pueda evaluar a lo largo de una trayectoria constante, en cuyo caso resulta:

$$x_\alpha(t) = x_\alpha(\infty) + [x_\alpha(0) - x_\alpha(\infty)]\, e^{t f_x} \qquad (14)$$

con $x_\alpha(\infty)$ la solución de $\dot{x}_\alpha = 0$, con lo cual

$$x_\alpha(\infty) = \frac{-f_\alpha[x(t,\alpha),\alpha]}{f_x[x(t,\alpha),\alpha]} \qquad (15)$$

Apliquemos este enfoque al estudio del sistema definido en (7). Para ello se replantea la (7), de acuerdo con:

$$\dot{x} = f[x(t,\alpha),\alpha] = \alpha x - x^3 \qquad (16)$$

Realizando un análisis de estabilidad de manera similar que en el ejemplo anterior, se obtienen tres posibles casos de acuerdo a los valores del parámetro α (Fig. 4):

Si $\underline{\alpha < 0}$ existe un solo punto de equilibrio que es $x = 0$ y resulta estable.

Si $\underline{\alpha = 0}$ el origen continúa siendo estable, aunque la trayectoria exponencial no decae rápidamente en el tiempo dado que al desarrollar por Taylor, desaparece el término lineal también.

Si $\underline{\alpha > 0}$ el punto de equilibrio en $x = 0$ deja de ser estable y aparecen dos puntos nuevos de equilibrio, simétricos respecto del anterior, en $x = \pm\sqrt{\alpha}$, que resultan ser estables.

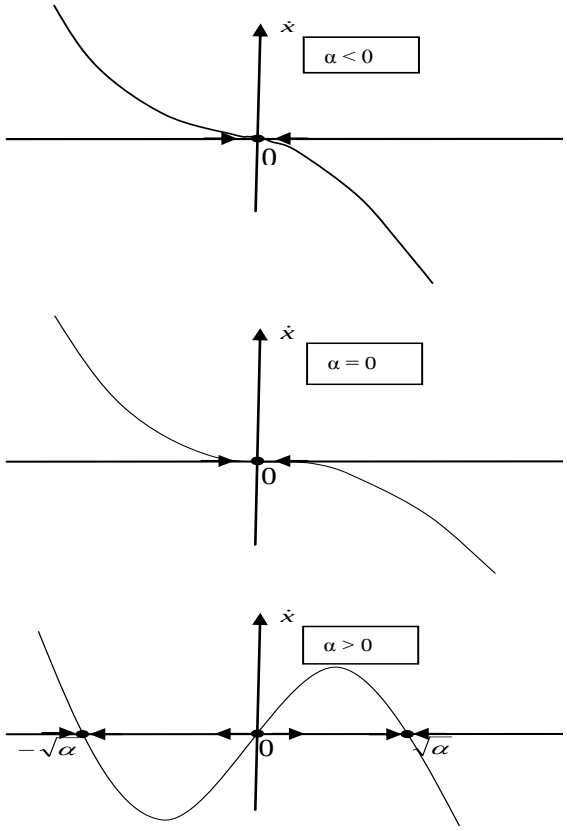

Fig.4: Diferentes comportamientos del sistema $\dot{x} = f[x(t,\alpha),\alpha] = \alpha x - x^3$, según los valores de α

De manera similar al análisis efectuado a partir de (2), se desarrolla en serie de Taylor, alrededor de $x = 0$ y de $\alpha = 0$, dado que en estos valores la (16) presenta una bifurcación, según:

$$\dot{x}(t,\alpha) = f[x(t,\alpha),\alpha]_{(x=0,\alpha=0)} = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_\alpha(0,0)\alpha + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)x^2 + 2 f_{x\alpha}(0,0)x\alpha + f_{\alpha\alpha}(0,0)\alpha^2\right] + \ldots \qquad (17)$$

con $$\frac{\partial f[x(t,\alpha),\alpha]}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} * \left(f[x(t,\alpha),\alpha] + x_\alpha\right) \qquad (18)$$

y $$\frac{\partial f\left[x(t,\alpha),\alpha\right]}{\partial \alpha} = \dot{x}_\alpha = f_x\left[x(t,\alpha),\alpha\right] * x_\alpha + f_\alpha\left[x(t,\alpha),\alpha\right] \qquad (19)$$
de acuerdo con (10) y (13).

Al incorporar la (18) y la (19) al desarrollo obtenido en (17), se procede a evaluar, al igual que antes, en un entorno del punto de equilibrio. A partir de este análisis, se puede resumir la información obtenida graficando la dependencia de $x(t,\alpha)$ en función del parámetro α, para cada tiempo fijo, como se muestra en la siguiente figura (Fig. 5):

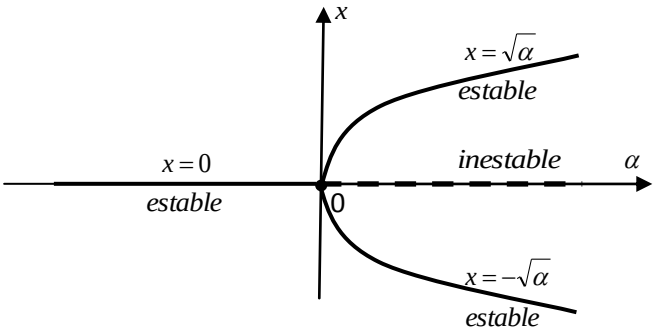

Fig.5: Gráfico de $x(t,\alpha)$ en función del parámetro α, para cada tiempo fijo. Bifurcación obtenida en $x=0$

APLICACIÓN

En esta sección se aplica la técnica expuesta a un ejemplo concreto sobre crecimiento de poblaciones (Strogatz, 1994). La ecuación diferencial que se propone en este caso para representar la evolución dinámica de dicho crecimiento es:

$$\dot{N} = RN\left(1-\frac{N}{K}\right) - p(N) \qquad (20)$$

donde $N(t)$ representa la cantidad de habitantes actual de una población
R la tasa de crecimiento
K la capacidad de migración desde o hacia otros lugares
$p(N)$ el factor de mortandad debido a alguna catástrofe o epidemia

Asumiendo que $p(N)$ se comporta según una ecuación logística del tipo $p(N) = \frac{BN^2}{A^2+N^2}$ (fig 6), (Ludwig et al, 1978) donde B representa el nivel de saturación que se alcanza a partir de $N=A$

Al reemplazar esta última ecuación en (20), se obtiene

$$\dot{N} = RN\left(1-\frac{N}{K}\right) - \frac{BN^2}{A^2+N^2} \qquad (21)$$

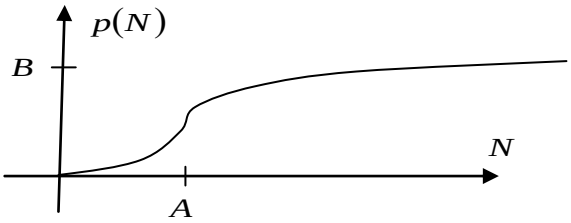

Fig.6: Comportamiento logístico del factor de mortandad $p(N)$

Luego, eligiendo los siguientes cambios de variables para adimensionalizar la ecuación, dados por:
$x=\frac{N}{A}$, $\tau=\frac{Bt}{A}$, $r=\frac{RA}{B}$ y $k=\frac{K}{A}$, y posteriormente reemplazarlos en (21), se obtiene

$$\frac{dx}{d\tau} = rx\left(1-\frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2} \qquad (22)$$

Los ceros de (22) representan los puntos de equilibrio. Los mismos se obtienen cuando

$$rx\left(1-\frac{x}{k}\right) = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad (23)$$

o sea, para $x_1 = 0$ y para valores $x_2 > 0$, que resultan de resolver la ecuación

$$r\left(1-\frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2} \qquad (24)$$

En la fig. 7 se representan el gráfico correspondiente a la expresión que aparece en el primer

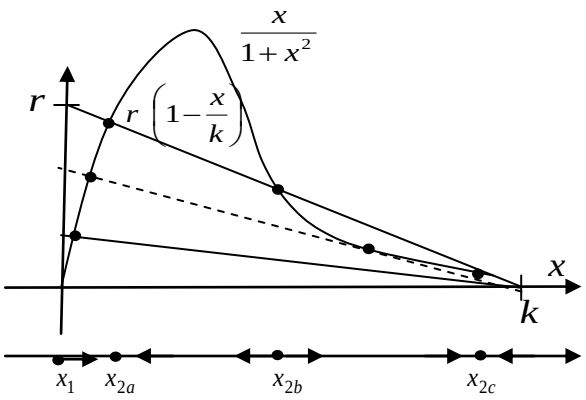

Fig.7: Resolución gráfica de la ecuación (24). Análisis de estabilidad en un entorno de los puntos de equilibrio x_1, x_{2a}, x_{2b} y x_{2c}.

miembro de la ecuación (24) (expresión lineal que depende de los parámetros r y k), y el correspondiente a la expresión del segundo miembro, que no depende de ningún parámetro.

De acuerdo a los valores de los parámetros r y k pueden observarse tres casos diferentes: que dichos gráficos se corten en un solo punto, en cuyo caso x_2 es único, que haya tres soluciones para x_2, o que haya dos soluciones para x_2, cuando la recta sea tangente a la curva.

Al pie de la fig. 7 se indica con el sentido de las flechas el signo de la derivada dada en (22), en un entorno de los puntos de equilibrio, para el caso de tres soluciones para x_2 .

La fig. 7 permite pues, visualizar el efecto que se produce sobre la población, cuando disminuye la tasa de crecimiento, manteniéndose constante la capacidad de migración. El crecimiento de la población se encuentra condicionado a los valores de dichos parámetros, a pesar de que el factor de mortandad no dependa de los mismos.

En base al análisis de signo en un entorno de dichos puntos de equilibrio, se concluye que $x_1 = 0$ es inestable y que la estabilidad de x_2 depende de los valores de los parámetros r y k, que condicionan la cantidad de puntos críticos. Si existe un único x_2 solución de la (24), resulta que x_2 es estable. En el caso en que la recta dibujada en Fig. 7 es tangente a la curva, sólo habrá dos soluciones para x_2; en un entorno del punto de tangencia la derivada (22) conserva su signo ($\frac{dx}{d\tau}$<0), produciéndose una bifurcación. Al aumentar el parámetro r, manteniendo fijo k y superada la situación de tangencia entre las curvas de Fig.7, se producen otros puntos de equilibrio adicionales que, alternan la estabilidad del sistema: x_{2a} es estable, x_{2b} es inestable y x_{2c} vuelve a ser estable.

CONCLUSIONES

- Los sistemas no lineales tienen en la mayoría de los casos comportamientos muy diferentes de acuerdo con los valores que tomen los parámetros más relevantes del modelo dinámico que lo describa. Además, la extremada sensibilidad que se manifiesta con respecto a las condiciones iniciales de cada trayectoria, sugieren un llamado de atención en la simplificación de los modelos matemáticos que se utilizan.
- El carácter interdisciplinar y universal de la DNL permite abarcar problemáticas fuera del ámbito de la Física e Ingeniería, en donde se trabaje con modelos que reflejan más adecuadamente las situaciones reales. Este hecho condiciona el grado de verosimilitud en las predicciones, aún cuando se conozca por completo la evolución temporal de cada variable que intervenga en el modelo.
- La incorporación de los diagramas de fase al análisis y estudio del comportamiento de los sistema autónomos, permite contar con una herramienta muy útil y necesaria, principalmente en aquellos casos en donde no se pueda resolver explícitamente la dependencia temporal de las variables dinámicas involucradas en el modelo. Las trayectorias producidas en los diagramas de fase se obtienen a partir de los estados dinámicos que se caracterizan por cambiar continuamente las condiciones de contorno para el próximo estado. Si bien esta alternativa aparenta ser matemáticamente menos rigurosa, en la mayoría de los casos se puede prever una solución sin tener que resolver analíticamente el sistema de ecuaciones.
- Creemos conveniente introducir técnicas de la DNL en cursos de análisis de las carreras de Ingeniería, para que, dado un problema, los alumnos además de resolverlo interpreten la injerencia de las condiciones iniciales y puedan visualizar tendencias.

REFERENCIAS

- De la Fuente, A. (2000). *Mathematical Methods and Models for Economists.* Nueva York, USA: Ed. Cambridge.
- Li T.Y., Yorke J.A. (1975) Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly* 82:985-992
- Lorenz E. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141
- Petralia S. (2007), Dinámica No Lineal y Caos en Aplicaciones Económicas. Jornadas de Perfeccionamiento Docente. Universidad de Buenos Aires.
- Poincaré, H. (1890). Sur les Équations de la Dynamique et le Problème des Trois Corps, *Acta Mathe*. 13, 1-270.
- Sanjuán M. A. F., Casado Vázquez J. M. (2005). Dinámica No Lineal: Orígenes y Futuro. *Física para todos*, 23-31.
- Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Wilmington, Delaware, USA: Ed. Addison Wesley.
- Wiggins, S. (1996). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* California, USA: California Institute of Technology