# FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN DE VELOCIDADES Y TEMPERATURAS EN TRANSFERENCIA DE CALOR POR CONVECCIÓN FORZADA

Marisa S. BAIS, Antonio F. ASTEASUAIN y Mirta R. BARBOSA
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Avda. A. del Valle 5737. B7400JWI - Olavarría.
E-mail: marisabais@infovia.com.ar; aasteasu@fio.unicen.edu.ar; mbarbosa@fio.unicen.edu.ar

**Palabras Claves:** Ecuaciones diferenciales de balances, movimiento de fluidos, transferencia de calor

**Resumen**
La ingeniería actual impone un gran manejo de la matemática debido a que el abordaje de los problemas es cada vez más frecuente a través de la modelación y simulación. El manejo de fluidos y la transferencia de calor están presentes en todas las actividades ingenieriles. La resolución de las ecuaciones gobernantes y el análisis de los resultados constituye un problema complejo. En este trabajo se estudian las distribuciones de velocidad y temperatura, en función de las variables espaciales, las condiciones de operación y las propiedades del fluido. Se emplea la computadora para observar la evolución de las distribuciones al cambiar las condiciones operativas.El análisis de las funciones, permite una interpretación rápida y clara de los fenómenos físicos.

## INTRODUCCIÓN

El ingeniero moderno dispone de muy poderosas herramientas que le aporta la tecnología. En consecuencia, debe conocer el manejo de las mismas, no sólo para obtener el máximo provecho de ellas, sino para que su desempeño en la profesión sea verdaderamente competitivo. En este marco, y en particular en ingeniería química, su formación matemática reviste fundamental importancia pues los ingenieros que no tienen un adecuado manejo de esta herramienta no estarán en condiciones de plasmar en adecuados modelos matemáticos, los conceptos físicos relacionados con mecánica de fluidos, transferencia de calor y transferencia de masa. Lo anterior le genera una limitación en la aplicación de software que prácticamente lo excluye de la resolución de un gran número de problemas ingenieriles.

Entre de los campos de conocimiento de mayor requerimiento matemático se encuentran el movimiento de los fluidos y la transferencia de calor. Algunos de los temas más avanzados que se requieren son:

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer y segundo orden.

Sistemas de n ecuaciones algebraicas lineales.

Método de separación de variables para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales.

Series de Fourier y funciones especiales, tales como función error y series de funciones de Bessel.

Métodos numéricos, como integración, Newton-Raphson, inversión matricial, Gauss-Seidel, método de Runge-Kutta para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Método de diferencias finitas o de volúmenes finitos para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

La transferencia de calor cubre un amplio espectro de aplicaciones en ingeniería. Los mecanismos típicos son conducción, convección y radiación. En el caso de la convección y dado que ocurre en fluidos en movimiento, el estudio de la distribución de temperaturas, en simultáneo con distribuciones de velocidad, resulta particularmente complejo. En el caso de los flujos turbulentos no existe solución analítica exacta y estas sólo se obtienen aplicando métodos numéricos.

Las ecuaciones de cambio (Ecuación de Continuidad, Balance de Cantidad de Movimiento y Balance de Energía) pueden expresarse en coordenadas rectangulares cilíndricas o esféricas, según se adecue mejor a la geometría del problema que se está resolviendo.

En este trabajo se estudian las distribuciones de velocidades y de temperaturas en flujos laminares y en convección forzada. Para geometrías sencillas se obtienen las expresiones de los perfiles de velocidad y de temperaturas como una función de las variables espaciales, del tiempo, de las condiciones de operación (velocidades y temperaturas aplicadas sobre determinadas partes del sistema, diferencias de presión) y de las propiedades del fluido en forma analítica. Posteriormente se emplea la computadora para observar la evolución de la función cuando se cambian las condiciones. Lo anterior permite una enorme versatilidad con la posibilidad de observación rápida y eficiente de los cambios que se introducen, y su repercusión sobre los perfiles de velocidad y térmico, de donde se infieren conceptos físicos de fundamental importancia para el ingeniero químico.

Dado que existe un gran número de situaciones que responden al marco enunciado en el párrafo anterior, en el presente trabajo se desarrolla de manera detallada el caso del calentamiento de un fluido que circula por convección forzada entre dos placas planas y paralelas y luego se presentan resultados para otros sistemas, con otras geometrías. Considerando el tipo de geometría, se analizan las ecuaciones de continuidad, de cantidad de movimiento y de energía en coordenadas rectangulares.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \qquad [1]$$

donde: $\rho$: densidad del fluido

x,y,z: coordenadas espaciales
t: tiempo
$v_x$, $v_y$; $v_z$: componentes del vector velocidad, $\underline{v}$

Balance microscópico de cantidad de movimiento para un fluido newtoniano e incompresible (Ecuaciones de Navier-Stokes):

Componente x
$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)+\rho g_x \qquad [2]$$

Componente y
$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\rho g_y \qquad [3]$$

Componente z
$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)+\rho g_z \qquad [4]$$

donde: p: presión en el fluido
μ: viscosidad del fluido
$g_x$, $g_y$; $g_z$: componentes del vector aceleración de la gravedad, $\underline{g}$

Balance microscópico de energía para un fluido newtoniano, incompresible y de conductividad térmica constante:

$$\rho\hat{c}_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+2\mu\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right]+$$
$$+\mu\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right] \qquad [5]$$

donde: $\hat{c}_p$: calor específico del fluido
T: temperatura
k: conductividad térmica del fluido

## DESARROLLO DEL TRABAJO

### Obtención analítica de las funciones de distribución de velocidades y temperaturas

Se deduce la expresión para el flujo laminar en estado estacionario de un fluido newtoniano (densidad y viscosidad constantes), que pasa por una dada sección recta y normal al flujo, entre dos placas móviles.

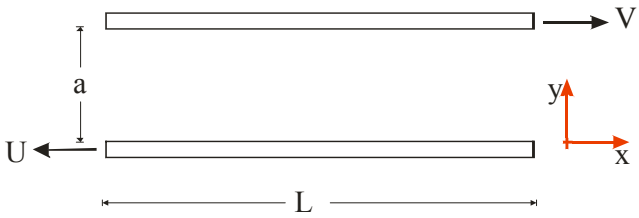



Figura 1: Flujo de un fluido entre dos placas planas, paralelas y móviles.

Con las condiciones enunciadas anteriormente, tanto en lo relativo al flujo como en las propiedades del fluido y las condiciones operativas, la sistemática de planteo de las ecuaciones gobernantes es la siguiente:

1. Se plantea la ecuación de continuidad.
2. Se plantea el balance microscópico de cantidad de movimiento.
3. Se introduce la ecuación de continuidad en el balance de cantidad de movimiento.
4. Se establecen las condiciones de contorno para el balance de cantidad de movimiento.
5. Se procede a realizar la integración para obtener el perfil de velocidades como una función v = v(x,y,z,t).
6. Se plantea el balance microscópico de energía térmica.
7. Se introduce la expresión del perfil de velocidades obtenida en el paso 5 en el balance de energía térmica.
8. Se establecen las condiciones de contorno para el balance de energía térmica.
9. Se integra y se obtiene la distribución de temperaturas como una función T = T(x,y,z,t).

Aplicando la sistemática de trabajo en la aplicación propuesta y haciendo las correspondientes simplificaciones, se obtienen las ecuaciones gobernantes del problema:

Paso 1. Ecuación de continuidad:
$$\frac{\partial v_x}{\partial x}=0 \qquad [6]$$

Pasos 2 y 3. Balance microscópico de Cantidad de Movimiento: $$0 = \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad [7]$$

Paso 4. Se aplican las condiciones de contorno siguientes:

| | | |
|---|---|---|
| CC1 | $y = 0$ | $v_x = -V$ |
| CC2 | $y = a$ | $v_x = U$ |

Paso 5. Asumiendo flujo unidireccional según x, se realizan las integrales para obtener el perfil de velocidades:

$$v_x = \frac{-\Delta p}{2\mu L}\left(y^2 - ay\right) + \frac{U+V}{a} y - U \qquad [8]$$

Paso 6. El balance de energía se simplifica a la expresión: $$0 = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 \qquad [9]$$

Paso 7 $$0 = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu\left(\frac{-\Delta p}{2\mu L}(2y - a) + \frac{U+V}{a}\right)^2 \qquad [10]$$

Paso 8. Condiciones de contorno para la temperatura:

| | | |
|---|---|---|
| CC1 | $y = 0$ | $T = T_U$ |
| CC2 | $y = a$ | $T = T_V$ |

Paso 9. Se realizan las integrales para obtener el perfil de temperaturas:

$$T = -\left(\frac{\Delta p}{2\mu L}\right)^2 \frac{\mu}{k}\left[\frac{y^4}{3} - \frac{2\,y^3 a}{3} + \frac{a^2\,y^2}{2} + \frac{a^3 y}{2}\right] + \frac{\Delta p}{k\,L}\left[\frac{y^3}{3} + \frac{a\,y^2}{2} + \frac{a^2\,y}{6}\right]\left(\frac{U+V}{a}\right) -$$
$$-\frac{\mu}{2k}\left(\frac{U+V}{a}\right)^2\left(y^2 - ay\right) + +\left(\frac{T_V - T_U}{a}\right) y - T_U \qquad [11]$$

Utilizando las ecuaciones [8] y [11] se puede realizar el análisis de la influencia de las distintas variables sobre los perfiles de velocidades y temperaturas. En este trabajo el estudio se realiza empleando el software Derive™.

## Análisis de la influencia de las variables

### Influencia de la variación de la presión

Se fijan las demás variables, tales como la separación, temperatura y velocidad de las placas, el fluido y su temperatura, con lo que quedan definidas las propiedades tales como la viscosidad, la conductividad térmica, la densidad y el calor específico. Se representan gráficamente las distribuciones de velocidades y de temperaturas como una función de la distancia a las placas para diferentes valores de la caída de presión.

Como primer fluido de trabajo se elije glicerina a 100 ºF; asumiendo una temperatura media entre la de las paredes y la del fluido para obtener las propiedades de las tablas correspondientes, la viscosidad y la conductividad térmica resultan de 0.1 lbm/pie s y 0.165 Btu/h pie ºF. Se asumen

$U = 2$ pie/s $V = 2$ pie/s $a = 1$ pulg $T_U = 150$ ºF $T_V = 50$ ºF

Empleando Derive™, se incorporan estos valores en las expresiones [8] y [11], y tomando para ΔP/L, en psia/pie, los valores de 0.5, 1, 2, 3 y 4, se realizan los cálculos y se obtienen los perfiles que se muestran en la figura 2.

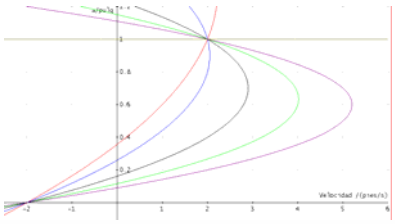
En la figura 3 se representan los perfiles de velocidad y temperatura correspondientes a los valores de presión aplicados. Puede apreciarse la correlación en la variación de las funciones. Los mayores valores de presión producen mayor velocidad del flujo, también se observa el valor de velocidad en sentido opuesto que impone el movimiento de la placa inferior, ya que U = -0.2 pie/s. Cuando el gradiente de presiones se incrementa, la disipación viscosa también aumenta, por lo que las temperaturas en el fluido crecen. Este efecto puede observarse claramente en el perfil de velocidades que muestra la figura 3 y que corresponde a las funciones representadas en el segundo gráfico de la figura 2.

```
#1:   - 5·Δp·y^2 + y·(5·Δp + 4) - 2

#2:   vΔp := [0.5, 1, 2, 3, 4]

#3:   VECTOR(- 5·Δp·y^2 + y·(5·Δp + 4) - 2, Δp, vΔp)

#4:   [- 2.5·y^2 + 6.5·y - 2, - 5·y^2 + 9·y - 2, - 10·y^2 + 14·y - 2, - 15·y^2 + 19·y - 2, - 20·y^2 + 24·y - 2]
```



$$\#1:\quad -751.6474746\cdot\Delta P^{2}\cdot y^{4} + y^{3}\cdot(1503.294949\cdot\Delta P^{2} + 37.38383838\cdot\Delta P) - y^{2}\cdot(1127.471212\cdot\Delta P^{2} + 56.07575757\cdot\Delta P + 0.6972121211) + y\cdot(375.8181818\cdot\Delta P^{2} + 18.69090909\cdot\Delta P - 99.30278786) + 150$$

$$\#2:\quad v\Delta p := [0.5,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4]$$

$$\#3:\quad \mathrm{VECTOR}(-751.6474746\cdot\Delta P^{2}\cdot y^{4} + y^{3}\cdot(1503.294949\cdot\Delta P^{2} + 37.38383838\cdot\Delta P) - y^{2}\cdot(1127.471212\cdot\Delta P^{2} + 56.07575757\cdot\Delta P + 0.6972121211) + y\cdot(375.8181818\cdot\Delta P^{2} + 18.69090909\cdot\Delta P - 99.30278786) + 150,\ \Delta P,\ v\Delta p)$$

$$\#4:\quad \left[-187.9118686\cdot y^{4} + 394.5156564\cdot y^{3} - 310.6028939\cdot y^{2} + 3.997212140\cdot y + 150,\ -751.6474746\cdot y^{4} + 1540.678787\cdot y^{3} - 1184.244181\cdot y^{2} + 295.2063030\cdot y + 150,\ -3006.589898\cdot y^{4} + 6087.947472\cdot y^{3} - 4622.733575\cdot y^{2} + 1441.351757\cdot y + 150,\ -6764.827271\cdot y^{4} + 1.364180605\cdot 10^{4}\cdot y^{3} - 1.031616539\cdot 10^{4}\cdot y^{2} + 3339.133575\cdot y + 150,\ -1.202635959\cdot 10^{4}\cdot y^{4} + 2.420225453\cdot 10^{4}\cdot y^{3} - 1.826453963\cdot 10^{4}\cdot y^{2} + 5988.551757\cdot y + 150\right]$$

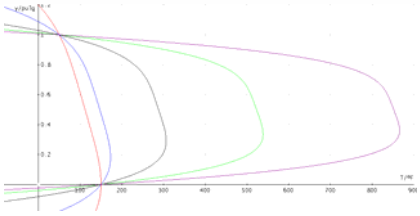


Figura 2: Cálculos y representación gráfica de las funciones de velocidad y temperatura para diferentes valores de la caída de presión.

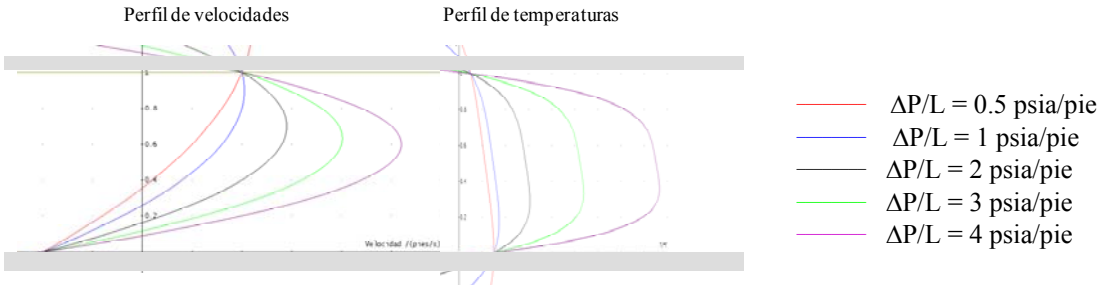



Figura 3: Perfiles de velocidad y temperatura para un fluido que se mueve entre dos placas planas y sobre el que actúan diferentes diferencias de presiones.

**Influencia de la variación de la velocidad de las placas**

Se fijan la separación y temperatura de las placas, el fluido y su temperatura y, además la diferencia de presiones entre dos puntos del flujo. Se representan gráficamente las distribuciones de velocidades y de temperaturas como una función de la distancia a las placas para diferentes valores de la velocidad de las placas.

En una primera parte se analiza la variación de la velocidad de la placa superior. Trabajando con glicerina a 100 ºF y asumiendo iguales condiciones que para el caso de la variación de presiones, la viscosidad y la conductividad térmica resultan de 0.1 lbm/pie s y 0.165 Btu/h pie ºF. Se consideran

$\Delta P/L$ = 1psia/pie  U = 2 pie/s  a = 1 pulg  $T_U$ = 150 ºF  $T_V$ = 50 ºF

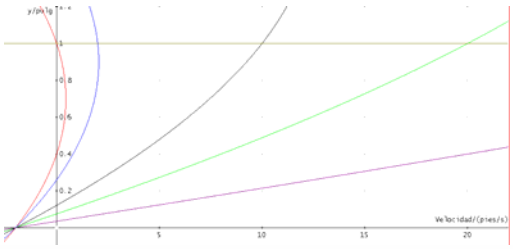
Se incorporan estos valores en las expresiones [8] y [11], y tomando para V, en pie/s, los valores de 0, 2, 10, 40 y 100, se realizan los cálculos y se obtienen los perfiles que se muestran en la figura 4.

$$\#1:\quad -5\cdot y^{2} + y\cdot(V + 7) - V$$

$$\#2:\quad vV := [0,\ 2,\ 10,\ 40,\ 100]$$

$$\#3:\quad \mathrm{VECTOR}(-5\cdot y^{2} + y\cdot(V + 7) - V,\ V,\ vV)$$

$$\#4:\quad \left[7\cdot y - 5\cdot y^{2},\ -5\cdot y^{2} + 9\cdot y - 2,\ -5\cdot y^{2} + 17\cdot y - 10,\ -5\cdot y^{2} + 47\cdot y - 40,\ -5\cdot y^{2} + 107\cdot y - 100\right]$$



#1: $-751.6474747\cdot y^4 + 9.345959595\cdot V\cdot y^3 + 1521.986868\cdot y^3 - 0.04357575757\cdot V^2\cdot y^2 - 14.19324242\cdot V\cdot y^2 - 1155.683393\cdot y^2 + 0.04357575757\cdot V^2\cdot y + 4.847030303\cdot V\cdot y + 285.3379393\cdot y + 150$

#2: vV := [0, 2, 10, 40, 100]

#3: $\mathrm{VECTOR}(-751.6474747\cdot y^4 + 9.345959595\cdot V\cdot y^3 + 1521.986868\cdot y^3 - 0.04357575757\cdot V^2\cdot y^2 - 14.19324242\cdot V\cdot y^2 - 1155.683393\cdot y^2 + 0.04357575757\cdot V^2\cdot y + 4.847030303\cdot V\cdot y + 285.3379393\cdot y + 150,\ V,\ vV)$

#4: $\left[-751.6474746\cdot y^4 + 1521.986867\cdot y^3 - 1155.683392\cdot y^2 + 285.3379393\cdot y + 150,\ -751.6474746\cdot y^4 + 1540.678787\cdot y^3 - 1184.244180\cdot y^2 + 295.2063029\cdot y + 150,\ -751.6474746\cdot y^4 + 1615.446463\cdot y^3 - 1301.973392\cdot y^2 + 338.1658180\cdot y + 150,\ -751.6474746\cdot y^4 + 1895.825251\cdot y^3 - 1793.134301\cdot y^2 + 548.9403635\cdot y + 150,\ -751.6474746\cdot y^4 + 2456.582827\cdot y^3 - 3010.765210\cdot y^2 + 1205.798545\cdot y + 150\right]$

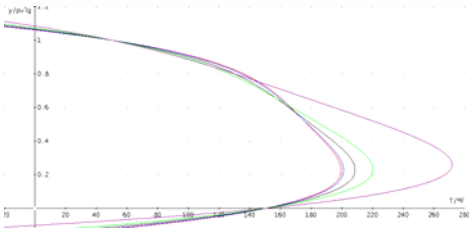


Figura 4: Cálculos y representación gráfica de las funciones de velocidad y temperatura para diferentes valores de la velocidad de la placa superior.

La figura 5 muestra los perfiles de velocidad y temperatura generados para diferentes valores de velocidad de la placa superior. La correlación en la variación de las funciones de velocidad y de temperatura indica que cuando la velocidad aumenta, la generación de calor por disipación viscosa induce la aparición de un máximo de temperatura en el fluido.

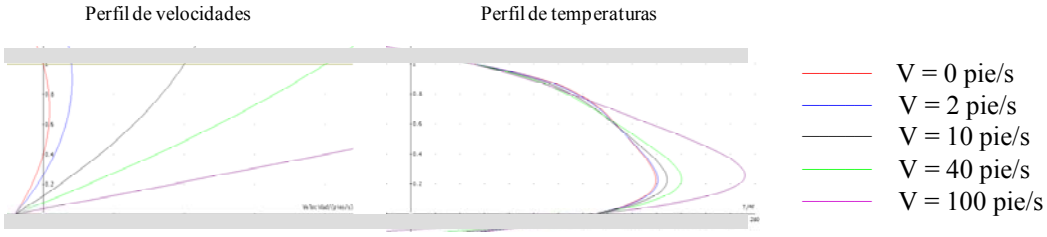



Figura 5: Perfiles de velocidad y temperatura para un fluido que se mueve entre dos placas planas para diferentes valores de velocidad de la placa superior.

Para analizar la influencia de la velocidad de la placa inferior, se fijan ahora la separación y temperatura de las placas, la diferencia de presiones y el fluido y su temperatura. Trabajando nuevamente con glicerina a 100 ºF, la viscosidad y la conductividad térmica son de 0.1 lbm/pie s y 0.165 Btu/h pie ºF, respectivamente. Se asumen $\Delta P/L$ = 1psia/pie, V = 2 pie/s, a = 1 pulg, $T_U$ = 150 ºF, $T_V$ = 50 ºF

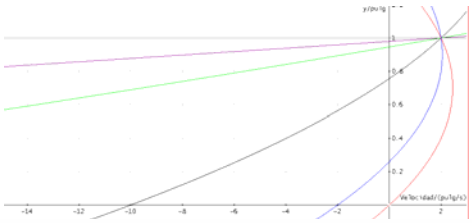
Se introducen estos valores en las expresiones [8] y [11], y tomando para U, en pie/s, los valores de 0, 2, 10, 20 y 50, se realizan los cálculos y se obtienen los perfiles que se muestran en la figura 6.

#1: $-5\cdot y^2 + y\cdot(U + 7) - 2$

#2: vU := [0, 2, 10, 20, 50]

#3: $\mathrm{VECTOR}(-5\cdot y^2 + y\cdot(U + 7) - 2,\ U,\ vU)$

#4: $\left[-5\cdot y^2 + 7\cdot y - 2,\ -5\cdot y^2 + 9\cdot y - 2,\ -5\cdot y^2 + 17\cdot y - 2,\ -5\cdot y^2 + 27\cdot y - 2,\ -5\cdot y^2 + 57\cdot y - 2\right]$



$$\#1:\quad -1240.218333\cdot y^4 + 15.42083333\cdot U\cdot y^3 + 2511.278333\cdot y^3 - 0.0719\cdot U^2\cdot y^2 - 23.41885\cdot U\cdot y^2 - 1906.8776\cdot y^2 + 0.0719\cdot U^2\cdot y + 7.9976\cdot U\cdot y + 535.8076\cdot y + 150$$

$$\#2:\quad vU := [0,\ 2,\ 10,\ 20,\ 50]$$

$$\#3:\quad \mathrm{VECTOR}(-1240.218333\cdot y^4 + 15.42083333\cdot U\cdot y^3 + 2511.278333\cdot y^3 - 0.0719\cdot U^2\cdot y^2 - 23.41885\cdot U\cdot y^2 - 1906.8776\cdot y^2 + 0.0719\cdot U^2\cdot y + 7.9976\cdot U\cdot y + 535.8076\cdot y + 150,\ U,\ vU)$$

$$\#4:\quad \left[-1240.218332\cdot y^4 + 2511.278333\cdot y^3 - 1906.8776\cdot y^2 + 535.8076\cdot y + 150,\ -1240.218332\cdot y^4 + 2542.12\cdot y^3 - 1954.0029\cdot y^2 + 552.0904\cdot y + 150,\ -1240.218332\cdot y^4 + 2665.486666\cdot y^3 - 2148.2561\cdot y^2 + 622.9736\cdot y + 150,\ -1240.218332\cdot y^4 + 2819.694999\cdot y^3 - 2404.0146\cdot y^2 + 724.5196\cdot y + 150,\ -1240.218332\cdot y^4 + 3282.32\cdot y^3 - 3257.5701\cdot y^2 + 1115.4376\cdot y + 150\right]$$

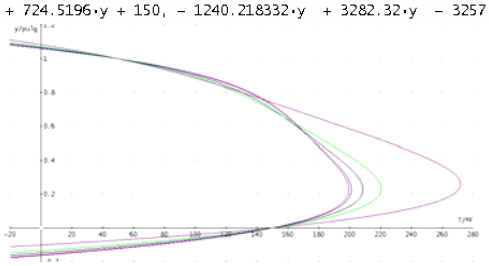


Figura 6: Cálculos y representación gráfica de las funciones de velocidad y temperatura para diferentes valores de la velocidad de la placa inferior.

La figura 7 muestra los perfiles de velocidad y temperatura generados para diferentes valores de velocidad de la placa inferior. Al igual que en el caso anterior, las variaciones de las funciones de velocidad y temperatura indican que cuando la velocidad aumenta, la generación de calor por disipación viscosa induce la aparición de un máximo de temperatura en el fluido.

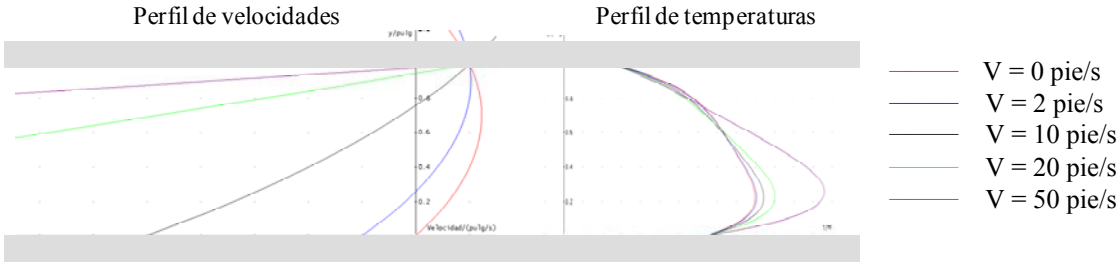



Figura 7: Perfiles de velocidad y temperatura para un fluido que se mueve entre dos placas planas y sobre el que actúan diferentes velocidades sobre la placa inferior.

**Influencia de la variación de la temperatura de las placas**

Cuando se cambia la temperatura de las placas, el cambio influye sobre las propiedades del fluido, fundamentalmente sobre la viscosidad y la conductividad térmica.

Para analizar el efecto de la temperatura de la placa superior, se procede a fijar la separación y velocidad de las placas y la diferencia de presiones entre dos puntos del flujo. Los valores de temperatura de la placa superior que se proponen y en consecuencia los correspondientes de temperatura del fluido, glicerina, y de las propiedades, se presentan en la tabla 1.

Tabla 1: Valores de temperatura de la placa superior y de las correspondientes propiedades de la glicerina

| Temperatura de la placa superior ($T_V$)/°F | Temperatura del fluido/°F | μ / ($lb_m$/pie s) | k / (Btu / h pie °F) |
|---|---|---|---|
| 0 | 75 | 0.5657 | 0.166 |
| 50 | 100 | 0.129 | 0.165 |
| 100 | 125 | 0.0296 | 0.163 |
| 150 | 150 | 0.00677 | 0.1612 |
| 500 | 325 | $2.22\ 10^{-7}$ | 0.141 |

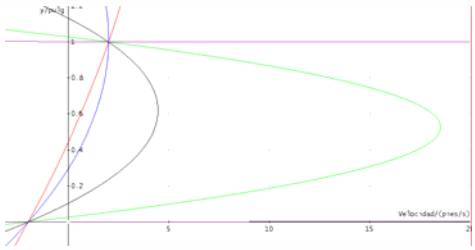
Se asumen a = 1 pulg, $\Delta P/L$ = 1psia/pie, U = 2 pie/s, V = 2 pie/s y $T_U$ = 150 ºF. Empleando las expresiones [8] y [11], se realizan los cálculos y se obtienen los perfiles que se muestran en la figura 8.

$$\#1:\quad -\frac{y^2 - y\cdot(8\cdot\mu + 1) + 4\cdot\mu}{2\cdot\mu}$$

$$\#2:\quad v\mu := [0.5657,\ 0.129,\ 0.0296,\ 0.00677,\ 0.000000222]$$

$$\#3:\quad \mathrm{VECTOR}\left(-\frac{y^2 - y\cdot(8\cdot\mu + 1) + 4\cdot\mu}{2\cdot\mu},\ \mu,\ v\mu\right)$$

$$\#4:\quad \left[-0.8838607035\cdot y^2 + 4.883860703\cdot y - 2,\ -3.875968992\cdot y^2 + 7.875968992\cdot y - 2,\ -16.89189189\cdot y^2 + 20.89189189\cdot y - 2,\ -73.85524372\cdot y^2 + 77.85524372\cdot y - 2,\ -2.252252252\cdot 10^{6}\cdot y^2 + 2.252256252\cdot 10^{6}\cdot y - 2\right]$$



$$\#1:\quad -\frac{12.40218333\cdot y^4}{k\cdot\mu} + \frac{24.80436666\cdot y^3}{k\cdot\mu} + \frac{6.168333333\cdot y^3}{k} - \frac{1.1504\cdot\mu\cdot y^2}{k} - \frac{18.603275\cdot y^2}{k\cdot\mu} - \frac{9.2525\cdot y^2}{k} + Tv\cdot y + \frac{1.1504\cdot\mu\cdot y}{k} + \frac{6.201\cdot y}{k\cdot\mu} + \frac{3.084\cdot y}{k} - 150\cdot y + 150$$

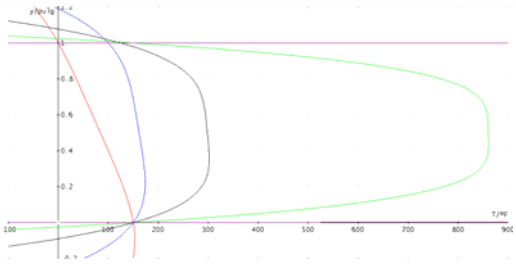


Figura 8: Cálculos y representación gráfica de las funciones de velocidad y temperatura para diferentes valores de temperatura de la placa superior.

La figura 9 muestra los perfiles de velocidad y temperatura generados para diferentes valores de temperatura de la placa superior. Al aumentar la temperatura, la viscosidad y la conductividad térmica disminuyen, lo que se refleja en el perfil de velocidades, dado que al ser el fluido menos viscoso, se alcanzan velocidades mucho mayores. Por otra parte, el incremento de la temperatura de pared, conduce a un aumento de la temperatura del fluido, como se observa en la figura 9.

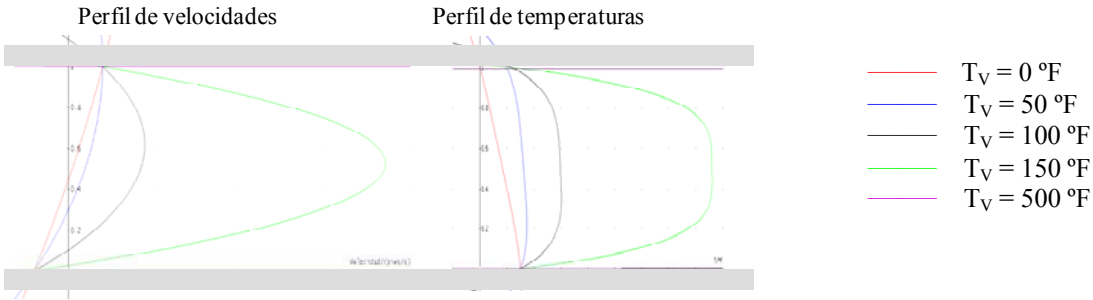



Figura 9: Perfiles de velocidad y temperatura para un fluido que se mueve entre dos placas planas calentadas a diferentes temperaturas.

**Sistemas con otras geometrías**

Aplicando la metodología de trabajo llevada a cabo anteriormente, es posible obtener las distribuciones de velocidad y temperatura para sistemas típicos de ingeniería. Por ejemplo para el flujo de un fluido en un

conducto de sección circular, de radio R, cuya temperatura de pared es $T_0$, que recibe un flujo de calor constante a través de la pared, $q_0$. Utilizando coordenadas cilíndricas con las condiciones de contorno:

| | | |
|---|---|---|
| $r = R$ | $v_z = 0$ | $T = T_0$ |
| $r = 0$ | $dv_z/dr = 0$ | $dT/dr = 0$ |

Se obtienen los perfiles de velocidad (Ec.[12]) y de temperatura (Ec.[13]), sobre los que es posible realizar los correspondientes análisis de la influencia de las variables

$$v_\theta = \frac{\Delta P\ R^2}{4\mu L}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad [12]$$

$$T - T_0 = \frac{\Delta P\ R^2}{4\mu L}\frac{\rho\ \hat{c}_p}{k^2}q_0\left[\frac{r^2}{4}-\frac{r^4}{16R^2}\right] \qquad [13]$$

Para flujo axial en una corona circular, o el movimiento de un lubricante en un cojinete, donde las partes móviles pueden ser el eje, la carcasa, o bien de ambas partes simultáneamente. Así, considerando el flujo de un fluido ubicado en la ranura de un cojinete, según se esquematiza en la figura 10. Utilizando coordenadas cilíndricas, con las condiciones de contorno:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r = R_1$ | $v_\theta = \Omega R_1$ | $T = T_1$ | $T_1 = T_2 = T_W$ |
| $r = R_2$ | $v_\theta = 0$ | $T = T_2$ | |

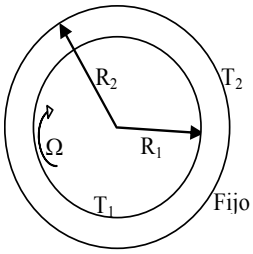


Figura 10: Flujo en un cojinete.

Los perfiles de velocidad y de temperatura son los que se presentan en las ecuaciones [14] y [15], respectivamente. El análisis de la influencia de las variables se realiza del modo ya descripto.

$$v_\theta = \frac{\Omega R_1^2}{\left(R_1^2 - R_2^2\right)}r - \frac{\Omega R_1^2 R_2^2}{\left(R_1^2 - R_2^2\right)r^3} \qquad [14]$$

$$T - T_W = \frac{\mu\Omega^2 R_1^4 R_2^4}{k\left(R_1^2 - R_2^2\right)^2}\left\{\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{r^2}\right)+\left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1^2 R_2^2}\right)\left[\frac{\ln r}{\ln\left(R_1/R_2\right)}-\frac{\ln R_1}{\ln\left(R_1/R_2\right)}\right]\right\} \qquad [15]$$

## CONCLUSIONES

La solución exacta obtenida a partir de las ecuaciones de continuidad y los balances de cantidad de movimiento proveen los perfiles de velocidad y de temperatura. El análisis de la influencia de las variables de operación en estas ecuaciones, permite una interpretación clara de los fenómenos físicos que se presentan.

Es posible realizar un análisis sistemático de la dependencia de la velocidad y de la temperatura del fluido con la diferencia de presiones a partir de la disponibilidad de las funciones matemáticas que corresponden a la distribución de las variables a lo largo de la coordenada espacial. Los perfiles que muestran que los mayores valores de presión producen mayor velocidad del flujo, a la vez que aumentan las temperaturas en el fluido, lo que condice perfectamente con el fenómeno físico.

La modelación matemática de la variación de la velocidad y temperatura del fluido con la velocidad y la temperatura de las placas expone claramente el efecto del calentamiento sobre las propiedades del fluido y la consecuente deformación que esto produce en los respectivos perfiles de velocidad y temperatura que se generan en el fluido.

Los resultados del análisis de la función matemática de modo rápido, racional y seguro permiten optimizar el tiempo de trabajo de los estudiantes. La integración de la herramienta matemática con el análisis de la situación física consolida la base conceptual en la formación del ingeniero.

## BIBLIOGRAFÍA


“Fundamentals of momentum, heat and mass transfer”. J.R. Welty, C.E. Wicks and R.E. Wilson. John Wiley & Sons. 1984.

“Computational Fluid Dynamics”. J.D. Anderson,Jr. McGraw-Hill. 1995.

"Fenómenos de Transporte". R.B. Bird, W.E. Stewart, y E.N. Lightfoot. 2da. Ed. Limusa-Wiley. 2006.

“Numerical Simulations of Heat Transfer and Fluid Flow on a Personal Computer”. S. Kotake and K. Hijikata. Elsevier Science Publishers. 1993.

Analysis of Transport Phenomena. W.M. Deen. Oxford University Press. 1998.Process Fluid Mechanics. M.M. Denn. Prentice-Hall Inc. 1980.

"Heat transfer". A.J. Chapman. Collier-McMillan. 1974.

"Advanced calculus for applications". F.B. Hildebrand. 2nd. ed. Prentice Hall. 1976.

"Fundamental of heat and mass transfer". F.P. Incropera and D.P. Dewitt. 3rd. Ed. John Wiley and Sons. 1990.

“Mechanics of Fluids”. M.C. Potter, D.C. Wiggert and M.Hondzo. 2nd. Ed. Prentice Hall. 1997.

“Fundamentals of fluid mechanics”. B.R. Munson, D.F. Young and T.H. Okiishi. John Wiley & Sons. 1990.