MATEMÁTICA APLICADA A LA INGENIERÍA. MODELIZACIÓN Y SIMULACIÓN USANDO MATLAB Y SIMULINK

Amadeo Mario Mariani (1)

(1) Profesor Titular con Dedicación Exclusiva PROMEI. Director del Área Control UTN-FRH y FRBA

Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Haedo. Área Control. Argentina

ing_amm@doc.frba.utn.edu.ar; amariani@electron.frba.utn.edu.ar; amadeo.mariani@gmail.com

Palabras Claves: Matemática, Ingeniería, MATLAB, SIMULINK

Resumen: El presente trabajo tiene por objetivo saliente, poner de manifiesto la importancia del conocimiento matemático, tanto teórico como aplicado, para resolver los problemas de análisis y diseño en las carreras de ingeniería. Como objetivo destacado, también, se pretende resaltar la necesidad de la modelización matemática de los sistemas físicos y su simulación dinámica mediante la utilización de un software adecuado y conveniente, tanto en los problemas de análisis como de diseño. Se ha seleccionado, como software MATLAB y uno de sus Toolbox SIMULINK, debido fundamentalmente a que su uso permite resolver muchos problemas de Ciencias Básicas (matemática-física-química) en las carreras de ingeniería, e innumerables problemas de Tecnologías Básicas y Tecnologías Aplicadas, que son la mayoría de las restantes asignaturas de las carreras de grado. Adicionalmente, dicho software, con la interfase adecuada, permite realizar el control y monitoreo en tiempo real de plantas y procesos físicos dinámicos (inclusive una planta completa, como podría ser una Refinería de petróleo), tanto en forma local como remota (P. Ej.: vía Internet).

1. Introducción. El presente trabajo cubre algunos aspectos de ***"Aplicaciones de la Matemática"*** y *"Experiencias de Cátedra"* en el área de Ingeniería. Se trata de mostrar que el uso de la PC con un adecuado software formativo (en lo posible único), desde primer año de todas las carreras de Ingeniería hasta la graduación, y que pueda ser utilizado por una gran mayoría de los Profesores de la carrera de grado, facilita enormemente la integración de los conocimientos de Matemática con la Ingeniería y posteriormente con la vida Profesional de los futuros ingenieros. Esto, adicionalmente, contribuye a mejorar el proceso de *enseñanza-aprendizaje* de todas las orientaciones de ingeniería permitiendo al mismo tiempo, incrementar la calidad de la formación de los estudiantes y potenciando la componente autodidacta que debe tener todo ingeniero.

2. Fundamentación. La expansión y difusión de las computadoras (Mainframe y PC's) y, los software de aplicación formativos, han influido desde hace varios años en los diseños de Ingeniería, los que se efectúan sobre la base de modelos del sistema a diseñar (*modelización*) y, los ensayos de validación de los diseños se efectúan ensayando el modelo (*simulación*) en lugar de ensayar (en laboratorio)los prototipos a escala del sistema, debido a que este último camino es más costoso e insume mucho mayor tiempo que el de la simulación del modelo. Este cambio en la concepción de los diseños de Ingeniería, no ha sido acompañado por la mayoría de las asignaturas que se dictan en muchas Facultades de Ingeniería. A todo esto se suma, la preocupación de los estudiantes de los primeros años de las carreras de Ingeniería (compartida por muchos Profesores) que no llegan a ver o comprender *para qué necesitan tanta Matemática y Física* (en realidad, cada vez necesitan más) en la carrera que ellos han elegido (Electrónica, Electromecánica, Bioingeniería, Química, Mecánica, Aeronáutica, Civil, Industrial, etc.). Una manera muy efectiva de mejorar la integración de conocimientos entre la Matemática y Física con las Ingenierías y, realizar un salto de calidad en el proceso de *enseñanza-aprendizaje*, es emplear la PC desde el primer año de las carreras de Ingeniería. El uso de la PC, plantea varios problemas, uno de ellos es *"El Profesor utilizará el software que crea conveniente(o sepa utiliza), y que solo se aplica a su asignatura (o a lo sumo a alguna otra), o bien se debería emplear un software que cubra las expectativas*

de la mayoría de las asignaturas de la carrera de grado, y que además sea útil en la vida Profesional". Personalmente, considero que la segunda opción es la más adecuada, porque permite que los estudiantes utilicen un solo software formativo desde 1º año de sus carreras (optimizando tiempos y destrezas, evitando el volver a empezar) capacitándolos notablemente para resolver los problemas de análisis y diseño de la orientación elegida, sumándose a ello la ventaja, que lo pueden aplicar en la vida Profesional. No son muchos los programas que cumplen con las condiciones mencionadas. Uno de ellos es MATLAB (Empleado en casi todas las universidades del mundo) que opera muy eficientemente en forma simbólica, numérica y gráfica. Debido a ello, es el que se ha elegido para el presente trabajo.

3. Desarrollo. Considérese un sistema físico de una entrada y una salida (SISO), como el indicado por la Fig. 1.

Fig.1. Sistema físico de una entrada y una salida (SISO)

Supóngase que el sistema de la Fig. 1, *es lineal con coeficientes constantes* y, la relación salida-entrada se describe por el modelo matemático, siguiente:

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=3u(t) \qquad (1)$$

La ecuación diferencial (1), se puede resolver de varias formas. Una de ellas es haciendo uso de la *"función transferencia"* (donde $s=\sigma+j\omega$), que para este caso, es:

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{3}{2s^2+bs+3} \qquad (2)$$

Con un sencillo programa de MATLAB, como el designado *Programa1*, se puede obtener la respuesta del sistema frente a una entrada escalón unitario, y valores de b=2, 4 y 8.

Programa Nº 1

```
>> n=3;
>> d1=[2 2 3];
>> d2=[2 4 3];
>> d3=[2 8 3];
>> t=0:0.01:10;
>> y1=step(n,d1,t);
>> y2=step(n,d2,t);
>> y3=step(n,d3,t);
>> plot(t,y1,'-k',t,y2,'--k',t,y3,'-.k')
```

El resultado de correr el Programa 1, se corresponde con la solución de la ecuación, es decir la salida del sistema $y(t)$, frente a una entrada $u(t)$, en este caso escalón unitario. En la Fig. 2, se muestran gráficamente las soluciones obtenidas.

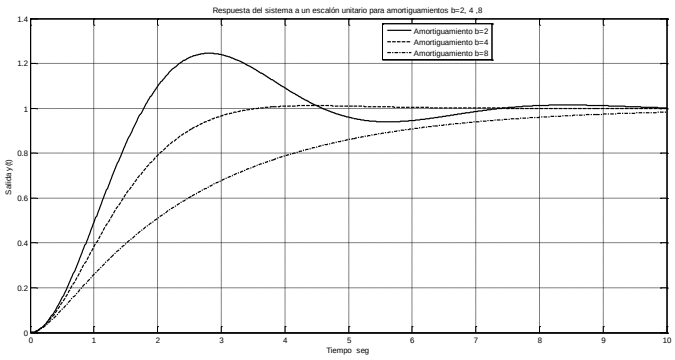

Fig.2. Solución del modelo matemático, mediante MATLAB

Las soluciones obtenidas en la Fig. 2, están relacionadas con los polos de la función transferencia (2). Calculando dichos polos, mediante MATLAB (Ver *Programa 2*), se obtiene:

Programa 2

```
>> roots(d1)

        ans =

          -0.5000 + 1.1180i

          -0.5000 - 1.1180i

>> roots(d2)

        ans =

          -1.0000 + 0.7071i

          -1.0000 - 0.7071i

>> roots(d3)

        ans =

           -3.5811

           -0.4189
```

El sistema físico analizado, esta caracterizado por un elemento de *inercia* de valor *2* kg (coeficiente de la derivada segunda), un elemento de *amortiguamiento* de valor *b N*seg/m* (rozamiento viscoso, coeficiente de la derivada primera) y un elemento de *rigidez* de valor *3 N/m.* Los elementos de inercia y rigidez caracterizan a los *almacenadores de energía* cinética y potencial, y el elemento de amortiguamiento caracteriza al elemento *disipador de energía* (Donde la energía mecánica se convierte en otra forma de energía, como ser calor). Esta idea, permite realizar un enfoque diferente del sistema descripto por la ecuación (1). Despejando la derivada de mayor orden del sistema, se obtiene:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -\frac{b}{2}\frac{dy(t)}{dt} - \frac{3}{2}y(t) + \frac{3}{2}u(t) \qquad (3)$$

La ecuación 2, se puede representar mediante un diagrama en bloques, como el indicado en la Fig. 3.

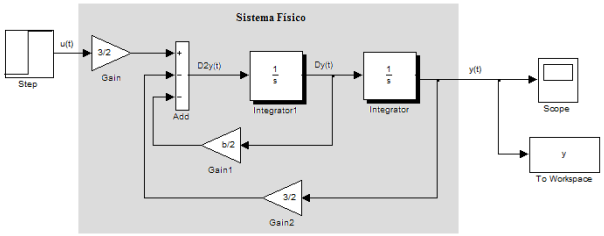

Fig.3. Diagrama en bloques del sistema físico (Realizado en SIMULINK)

El diagrama en bloques de la Fig. 3, admite una simulación dinámica mediante SIMULINK, permitiendo obtener las gráficas de solución para $y(t)$, dy/dt y d^2y/dt^2, que se muestran en el gráfico de la Fig. 4.

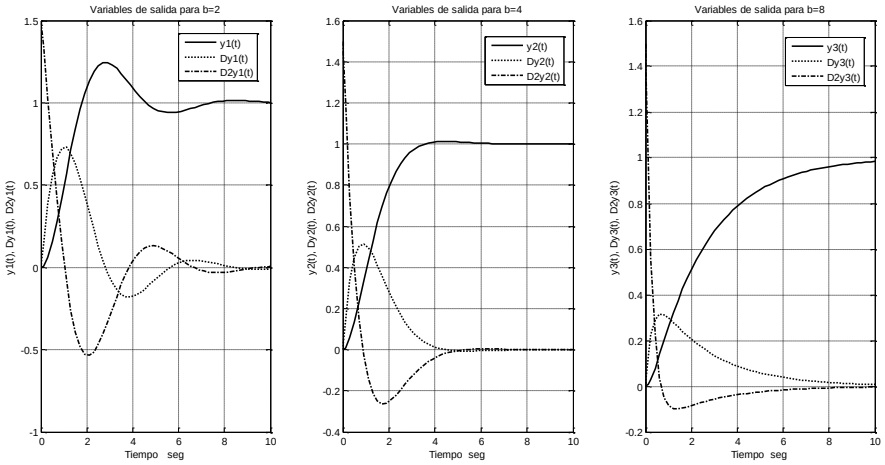

Fig.4. Gráfica de la salida $y(t)$, y sus derivadas para b=2, 4 y 8.

En las aplicaciones de ingeniería, los gráficos de la Fig. 4 son importantes, ya que las variables representadas pueden ser desplazamiento, velocidad y aceleración y en otras escalas podrían ser fuerzas o cuplas de inercia, viscosa y elástica.

Las variables y(t), dy(t)/dt que corresponden a las salidas de los integradores (almacenadores de energía) en el diagrama en bloques de la Fig.2, se pueden tomar como variables internas del sistema (x_1=y, x_2=dy/dt). Cuando se procede de esta manera, dichas variables internas, reciben el nombre de *variables de estado*, y la descripción del sistema por esta vía, recibe el nombre de *representación de estados*. Así, una representación de estados para el sistema descripto en la Fig. 2, es:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3/2 & -b/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3/2 \end{bmatrix} u$$
$$Y = \begin{matrix} 1 & 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0\, u \qquad (4)$$

La expresión (4), que describe al sistema LTI de la Fig.1, y que también es modelado por las ecuaciones (1) y (2), se puede poner en forma general para cualquier sistema LTI-MIMO (Lineal e invariante de múltiples entradas-salidas), como indican las ecuaciones (5) .

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \qquad (5)$$

Donde,

$$\mathbf{x} \triangleq vector\ \ de\ \ estado\,(n\times 1)$$
$$\mathbf{u} \triangleq vector\ \ de\ \ entrada\,(m\times 1)$$
$$\mathbf{y} \triangleq vector\ \ de\ salida\,(p\times 1)$$
$$\mathbf{A} \triangleq matriz\ \ del\ \ sistema\,(n\times n)$$
$$\mathbf{B} \triangleq matriz\ \ de\ entada\,(n\times m)$$
$$\mathbf{C} \triangleq matriz\ \ de\ \ salida\,(p\times n)$$
$$\mathbf{D} \triangleq matriz\ \ \text{de}\ \ transferencia\ \ directa\,(p\times m)$$

La primera de las ecuaciones (5), recibe el nombre de *ecuación de estado*, y la segunda, *ecuación de salida*. Teniendo en cuenta las ecuaciones (5), se puede representar un sistema LTI-MIMO (Lineal e Invariante en el Tiempo de Múltiples Entradas Múltiples Salidas) por un diagrama en bloques general como el indicado en la Fig. 5.

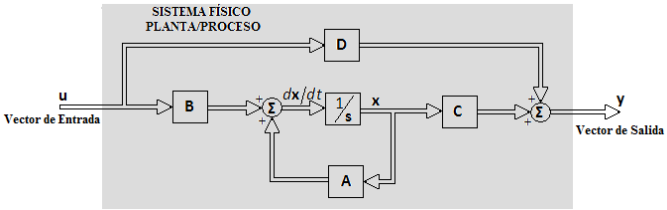

Fig.5. Diagrama en bloques general para un sistema LTI-MIMO.

La modelización de sistemas, mediante la función transferencia (LTI-SISO) o matriz de transferencia (LTI-MIMO), son sobre base frecuencial y, tienen limitaciones al momento de analizar y diseñar un sistema de control, o cuando se ven involucradas las condiciones iniciales del sistema. En cambio el modelo de estado, está planteado sobre una base temporal y abarca también, sistemas no lineales, invariantes en el tiempo y digitales, permitiendo incluir fácilmente las condiciones iniciales. Así, el modelo de estado para un sistema físico que no es, o no se puede considerar LTI, toma diferentes formatos:

- *Sistemas lineales y variantes en el tiempo*

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(t)/dt &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned}, \qquad (6)$$

- *Sistemas no lineales y parámetros constantes*

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(t)/dt &= \mathbf{f}\ \ \mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}\ \ \mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t) \end{aligned} \qquad (7)$$

- *Sistemas no lineales y parámetros variantes en el tiempo*

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(t)/dt &= \mathbf{f}\ \ \mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}\ \ \mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t \end{aligned} \qquad (8)$$

El planteo de modelos del tipo (5), (6), (7) y (8), requiere un conocimiento muy importante de Ciencias Básicas e Ingeniería, y por otra parte la solución de dichos modelos requiere un importante conocimiento de Matemática teórica y Aplicada a Ingeniería y Física. En la solución de modelos, interviene de manera decisiva el software de simulación dinámica (que permite resolver las ecuaciones diferenciales mediante algoritmos, como ser ode23, ode45, ode113, ode15, etc.).

Con el objeto de completar la presentación de este trabajo, se considera un ejemplo muy ilustrativo, que se conoce como *péndulo invertido*.

Aplicación: *Péndulo invertido (Fig6).* El problema consiste en generar una fuerza $F(t)$ sobre el carro, para mantener vertical el péndulo invertido, frente a la presencia de perturbaciones. Las especificaciones de diseño serán las siguientes, el péndulo debe volver a su posición vertical en un tiempo de 4 seg, nunca debe moverse más de ±0.05 rad de la vertical y el sobrepaso máximo será menor o igual a 0.09 rad.

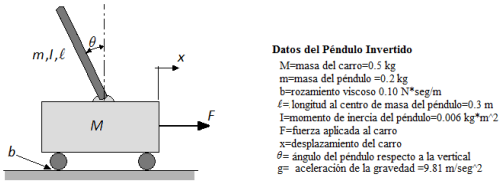

Fig.6. Péndulo invertido sobre un carro.

Empleando las leyes de la física, se obtienen las ecuaciones de equilibrio de fuerzas, para ángulos tales que $sen\theta \cong \theta$ (ángulos pequeños). Así, el modelo resulta LTI, y las ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{cases} I + m\ell^2 \dfrac{d^2\theta}{dt^2} - mg\ell\theta = m\ell \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ M + m \dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} - m\ell \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = F(t) = u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.024 \dfrac{d^2\theta}{dt^2} - 0.5886\ \theta = 0.06 \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ 0.7 \dfrac{d^2x}{dt^2} + 0.10\dfrac{dx}{dt} - 0.06 \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = F(t) = u(t) \end{cases} \tag{9}$$

Considerando como variables de estado $\mathbf{x} = x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4{}^T = x \quad dx/dt \quad \theta \quad d\theta/dt{}^T$, fuerza de control u(t)=F(t) y, salida $y(t) = \theta(t) = x_3$,sobre la base de las ecuaciones (9), se obtiene la representación de estado para el sistema, siguiente:

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ dx_3/dt \\ dx_4/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1818 & 2.6727 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.4545 & 31.1818 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8182 \\ 0 \\ 4.5455 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Los polos de la relación *salida-entrada*, son los autovalores de la matriz del sistema **A.** Calculándolos con MATLAB, mediante el Programa 3, se obtiene:

Programa 3

```
>> A=[0 1 0 0;0 -0.1818 2.6727 0;0 0 0 1;0 -0.4545 31.1818 0];

>> v=eig(A)'

v =   0   -5.6041   -0.1428    5.5651
```

El péndulo invertido tiene un polo con parte real positiva (p_4=5.5621), que lo convierte en inestable, es decir, frente a cualquier perturbación, el péndulo se cae. Esto se verifica fácilmente, si se coloca una dada condición inicial, por ej., en el ángulo del péndulo y se lo suelta. En la Fig. 7, se muestra la evolución de $y(t) = \theta(t)$, excitado con una condición inicial $\theta(0) = 0.05\ rad$.

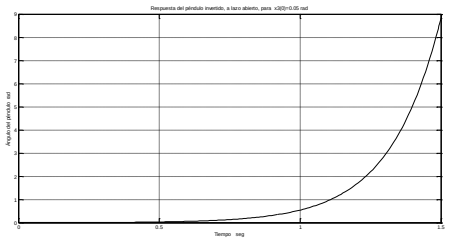

Fig. 7. Respuesta del péndulo invertido a una condición inicial $\theta(0) = 0.05\ rad$

El objetivo planteado en el Ejemplo, pretende controlar el péndulo invertido para mantenerlo en posición vertical aunque esté sometido a diversas perturbaciones cumpliendo las especificaciones establecidas para el posicionamiento. Una manera de lograrlo es, realimentando el vector de *estado completo* y, diseñar la matriz ganancia **K**. Esta idea, se muestra gráficamente en el diagrama en bloques de la Fig. 8.

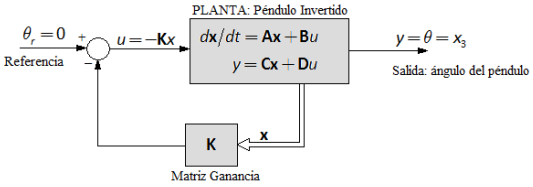

Fig.8. Sistema de control para el péndulo invertido (Regulador, $\theta_r = 0$)

Para cumplir con las especificaciones, los polos dominantes del sistema de control deben estar en $p_{1,2} = -1 \pm j*1.30$, los otros dos polos se ubicaran diez veces a la izquierda para que su efecto sea despreciable. En base a ello, se calcula la matriz ganancia, previamente a lo cual, se deberá verificar la *controlabilidad* del péndulo invertido. Toda esta tarea matemática, se puede realizar mediante MATLAB. Ver Programa 4.

Programa 4

```
>> A=[0 1 0 0;0 -0.1818 2.6727 0;0 0 0 1;0 -0.4545 31.1818 0];

>> B=[0;1.8182;0;4.5455];

>> C=[0 0 1 0];

>> D=0;

>> Cont=[B A*B A^2*B A^3*B];

>> rank(Cont)  % Calcula el rango de la matriz Cont

ans =

    4          % Como el rango es 4=n, el sistema es totalm. Controlable

>>

>> J=[-1+j*1.3 -1-j*1.3 -10 -10]; % Polinomio con los polos deseados

>> K=acker(A,B,J)    % Se calcula la matriz K por el método de Ackermann

K =

  -6.0387   -5.7975   40.6669    7.1189
```

De acuerdo al cálculo realizado, la matriz ganancia es:

$$\mathbf{K} = K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4 = -6.0387 \quad -5.7975 \quad 40.6699 \quad 7.1189 \tag{11}$$

Con la matriz ganancia calculada, se implementa en SIMULIK el sistema de control y se realizan las simulaciones ante diferentes condiciones iniciales, manteniendo la referencia en cero, $\theta_r = 0$ (sistema regulador). En la Fig. 9, se muestra el diagrama en bloques del sistema de control para el péndulo invertido (realizado con SIMULINK).

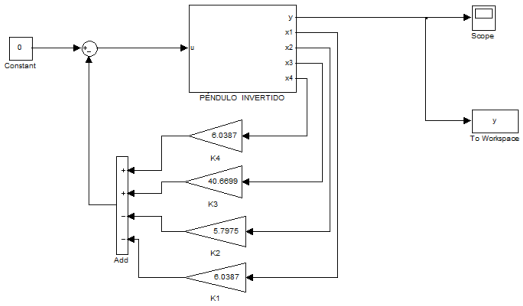

Fig. 9. Diagrama en bloques del péndulo invertido

En la Fig. 10, se muestra la respuesta del sistema de control para el péndulo invertido (sistema regulador $\theta_r(t)=0$) frente a diferentes condiciones iniciales en el ángulo $\theta(0)$. Como se observa en los resultados de la simulación, la dinámica de la posición angular ingresa en la banda de definición del tiempo de establecimiento especificado, en aproximadamente 4 seg., lo cual indica que el diseño es satisfactorio.

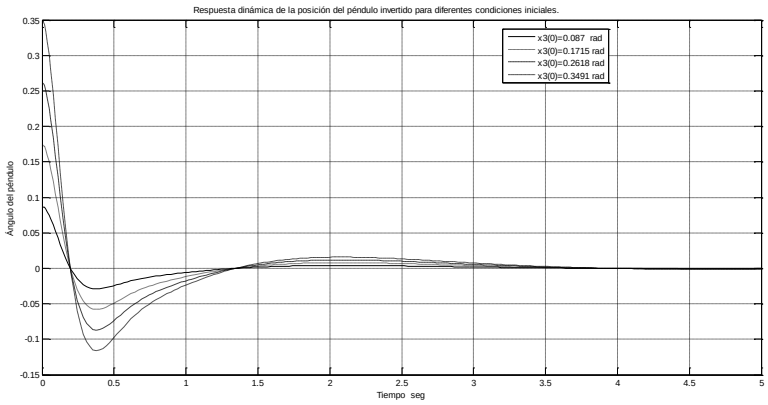

Fig.10. Respuesta del sistema de control de posición del péndulo, para diferentes condiciones iniciales

4. Conclusiones. El presente trabajo pone de manifiesto la eficiencia en el diseño de un sistema de control automático de una planta (péndulo invertido) inestable a lazo abierto. Esta eficiencia se debe fundamentalmente a la necesaria e imprescindible vinculación entre Matemática (teórica y aplicada), Física e Ingeniería y, a la modelización y simulación dinámica de sistemas, usando MATLAB y SIMULINK. Este ejemplo simple, ayuda a comprender por qué la gran mayoría de los diseños se realizan (desde hace varios años) mediante modelización y simulación del modelo (experimentando con el modelo en lugar de hacerlo con el hardware real) ya que, hacerlo de esta manera permite acortar los tiempos de diseño y bajar los costos de ingeniería y experimentación en laboratorio o en campo. Por otra parte, y desde un punto de vista académico, este procedimiento permite integrar más eficientemente los conocimientos de las Ciencias Básicas y Tecnologías Básicas y Aplicadas de toda carrera de Ingeniería, mejorando notablemente la calidad de la formación de grado.

5. Bibliografía

a) Katsuhiko Ogata. *"Ingeniería de Control Moderna"*. Pearson-Prentice Hall. 5ª Edición 2010-2011
b) S. Domínguez-P. Campoy-A. Jiménez. *"Control en el Espacio de Estados"*. Pearson-P.Hall.2ªEd.2006
c) R.Nagle-E.Saff-A.Snider. *"Ecuaciones Diferenciales"*. Pearson-Addison Wesley. 4ª Ed. 2005
d) D. G. Zill. *"Ecuaciones Diferenciales y Modelado"*. Thomson. 8ª Edición. 2006
e) C. Pérez. *"MATLAB-Aplicaciones en Ciencias e Ingeniería"*. Pearson-P. Hall. 2003.
f) Dorf-Bishop. *"Sistemas de Control Moderno"*. Pearson-P. Hall. 10ª Edición. 2005
g) A.M. Mariani. *"MATLAB y SIMULINK-Aplicaciones a la Ingeniería"*. Edit. UTN-FRH.
ISBN: 978-987- 25056-0-8. Año 2009.
h) A. M. Mariani. *"Modelización de Sistemas Mecánicos"*. Año 2009. www.frh.utn.edu.ar
i) A.M.Mariani-E.R.Ciccolella. *"Determinación Experimental de los parámetros para la modelización de Motores y Generadores de CC"* Rev. Proyecciones. Año1 Nº2.Octubre 2003. ISSN 1667-8400 FRBA.