VARIACIÓN. CONVERSIÓN ENTRE REGISTROS

Cristina Cosci – Gladys May –Javier Esperanza -Graciela Echevarría- Roberto Simunovich -
Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales. Universidad Nacional de San Luis. Argentina
javieresperanza2003@yahoo.com.ar; gcmay@fices.unsl.edu.ar; acosci@fices.unsl.edu.ar,
Área de trabajo: Investigación educativa.
Palabras claves: Registros de representación - Variación - Orden – Duval

RESUMEN: Variación. Conversión entre registros
El presente trabajo analizamos los errores que cometen los estudiantes de primer año cuando se les pide realizar conversiones entre registros referidos al concepto de Variación en el estudio del análisis Combinatorio. Por lo que, en nuestra investigación, trabajaremos los registros numéricos, figurativos, verbales y simbólicos y las conversiones entre ellos, aplicándose una metodología cualitativa y considerándose el marco teórico: *Registros de Representación Semiótica* de Raymond Duval. Mostraremos los resultados y conclusiones con alumnos de primer año de la carrera de Ingeniería de la FICES-UNSL.

INTRODUCCION

El estudio del análisis Combinatorio constituye la base en la que posteriormente se desarrolla los conocimientos probabilísticos. La comprensión de conceptos tales como: Combinación, Variación y Permutación, permiten al alumno de las carreras de Ingeniería tener una primera aproximación (en la asignatura Matemática de 1º año) a los conocimientos propios de otra materia: Estadística, que constituye una herramienta matemática indispensable que se aplica en aéreas específicas de la formación profesional de los alumnos, tales como: Medición de errores, análisis de datos, etc.

Es importante, entonces, ver las dificultades que se le presentan a los alumnos con la aplicación de las distintas técnicas de conteo en situaciones problemas durante su proceso de enseñanza/aprendizaje. El análisis de dichas dificultades se realizará a través de una metodología cualitativa basando nuestra investigación en la aplicación del siguiente marco teórico:

- *Registros de Representación Semiótica* de Raymond Duval para determinar qué y cómo aprenden los alumnos.

En esta teoría se trabajará a través del reconocimiento y pasaje de registros de un sistema semiótico, ya que Duval considera que la *comprensión integral de un concepto* está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica. En consecuencia, durante el proceso de enseñanza a los alumnos en el aula, la presentación del tema de Combinatoria: Técnicas de Conteo, se desarrolló pasando por distintos registros, a saber:

i) Se comenzó con el registro simbólico, definiendo las distintas técnicas de conteo utilizando un lenguaje de rigor lógico matemático, basado en el libro Teoría y Problemas de Probabilidad (serie de compendios Schaum) del autor Seymour Lipschutz, ed. McGraw-Hill en las páginas 16-23.

ii) Se continuó con el registro verbal, dado por medio de diferentes actividades que consistieron en ejercicios que representan situaciones problemas relacionados a temas específicos de estudio de las carreras Ingeniería.

iii) El pasaje al registro figurativo por parte de los alumnos tiene lugar al aplicar la herramienta, como lo es el diagrama de árbol para resolver dichas actividades.

iv) Finalmente los alumnos emplean el registro analítico, al calcular el valor numérico correspondiente a la técnica de conteo aplicada al problema en particular de análisis, seleccionada adecuadamente de acuerdo al proceso anterior.

El trabajo que presentamos muestra los resultados y conclusiones de una investigación llevada a cabo con alumnos de primer año de la carreras de Ingeniería de la Facultad de ingeniería y Ciencias Económicos Sociales de de la Universidad Nacional de San Luis, sobre un problema correspondiente al segundo parcial referido a una situación específica al área de interés de la carrera, y que los alumnos deben resolver aplicando la técnica de conteo Variación, en donde se analiza entre otras situaciones, el pasaje entre los diferentes registros.

FUNDAMENTACIÓN

Debido a que los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, Duval (1998) enfatiza la importancia de la *representación* en Matemáticas, estableciendo que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a ella. Sin embargo, establece que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por sus signos propios y la forma en que éstos se organizan. De la misma manera, establece que es posible representar un concepto matemático en diversos registros de representación.

Para la comprensión de un concepto es necesaria la coordinación de los diferentes registros de representación, ya que con la representación en un solo registro (mono-registro) no se obtiene la comprensión integral del concepto. Sin embargo, la conversión entre registros no se realiza en forma espontánea, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada.

Se puede observar que la mayoría de los alumnos no reconocen el mismo objeto a través de representaciones que son dadas en sistemas semióticos diferentes. En particular, el concepto de Variación admite una gran variedad de registros de representación, por lo que la comprensión integral de esta noción queda evidenciada en la coordinación de sus numerosos registros.

Duval (1993) afirma que sólo por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos y caracteriza a un *sistema semiótico* como un *sistema de representación*, el cual puede ser un *registro de representación* si permite tres actividades cognitivas, a saber:

- La ***presencia de una representación*** identificable como una representación de un registro dado.

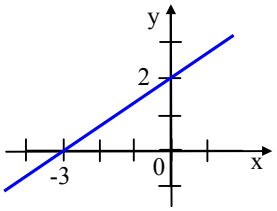
  Ejemplo: $-2x + 3y = 6$ $\rightarrow$ registro algebraico

- El ***tratamiento de una representación*** que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.

  Ejemplo: $-2x + 3y = 6$ $\rightarrow$ $-2x + 3y - 6 = 0$

- La ***conversión de una representación*** que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. Esta actividad cognitiva es diferente e independiente a la del tratamiento.

Ejemplo: $-2x + 3y = 6$ registro algebraico



registro gráfico

En esta teoría se considera que la *comprensión integral de un concepto* está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva, logrando articulaciones entre diferentes registros de representación semiótica. Algunos ejemplos de estos registros pueden ser el lenguaje natural, las escrituras algebraicas o los gráficos cartesianos.

En general, la enseñanza de las Matemáticas se organiza como si la coordinación de los diferentes registros de representación introducidas o utilizadas se efectuara rápida y espontáneamente. Parece que el objetivo principal en la enseñanza no es el cambio de registro a efectuar sino los tratamientos que podrían realizarse sobre la representación obtenida después del cambio.

Los alumnos deben aprender a realizar conversiones en distintos registros como una actividad necesaria, por lo que la coordinación entre dichos registros es de vital importancia para el desarrollo del pensamiento.

De acuerdo a este enfoque cognitivo nos planteamos la siguiente pregunta: *¿Qué importancia tienen las diferentes representaciones en la comprensión de las técnicas de conteo y en particular de la Variación?*

El concepto de Variación admite una gran variedad de diferentes registros de representación, por lo que en este estudio nos interesamos en analizar los distintos registros que se abordan en la aprehensión de este concepto. Los registros que analizaremos son los siguientes:

- *Registro simbólico:* Cuando se da la definición de una técnica de conteo mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal.
- *Registro analítico:* Cuando hacemos referencia a la definición de una técnica de conteo mediante una expresión algebraica.
- *Registro verbal:* En este caso, el lenguaje común es el utilizado para representar situaciones llamadas del mundo real. Estas pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.
- *Registro figurativo:* Es la representación a través de la figura del diagrama de árbol de la probabilidad de ocurrencia de los eventos analizados en el problema a resolver, con el objeto de facilitar el conteo de los eventos favorables.

En consecuencia, para lograr la *comprensión* del concepto de Variación entre las distintas técnicas de conteo, el profesor debe ayudar a los estudiantes a reconocer en cada registro de qué tipo de técnica de conteo se trata. Por otro lado, la conversión entre estos registros conlleva a la superación de distintas dificultades que pueden presentarle a los alumnos, cuando deben de resolver problemas prácticos a la ingeniería y que requieran de la aplicación de alguna de las técnicas de conteo, sentando las bases sólidas cognitivas para el desarrollo de conceptos más profundos y específicos de futuras materias de la carrera.

DESARROLLO

Considerando que este es un estudio exploratorio, para implementar el trabajo de investigación y analizar el manejo y pasaje de los distintos registros del tema, en la elaboración del segundo parcial, se pregunto sobre:

- Las distintas técnicas de conteo, es decir, enumerar las distintas técnicas de conteo.
- El concepto de orden de los elementos en un conjunto, ya que éste conocimiento resulta fundamental para distinguir entre dos de las tres técnicas de conteo a aplicar.

➢ El concepto de una de las técnicas de conteo, en particular la de Variación, misma que posteriormente el alumno debe de identificar, ya que es la que corresponde aplicar cuando debe de resolver un problema práctico, específico al área de interés de la carrera, tanto gráfica como analíticamente.

En el diseño de estas preguntas no sólo se evalúa el concepto de la técnica de conteo que se debe aplicar posteriormente, sino que además se busca evaluar un conocimiento general de las mismas y la particularidad que permite la distinción entre dos de ellas y que resulta útil a los fines de la elección en problemas de aplicación de la técnica de conteo por comparación entre ellas.

Los objetivos específicos de este estudio fueron:

✓ Analizar el conocimiento conceptual de los alumnos respecto de las distintas técnicas de conteo distinguiendo las particularidades o características que diferencian unas de otras.

✓ Analizar la capacidad de aplicación de los alumnos de las técnicas de conteo en problemas específicos de la vida real relacionados al área de estudio de las carreras Ingeniería.

✓ Analizar si los alumnos se valen del diagrama de árbol y la correcta implementación del mismo para resolver preguntas específicas en el problema de aplicación.

✓ Analizar la comprensión de los alumnos del concepto de Combinatoria a través del pasaje entre los distintos registros utilizando el tratamiento y conversión entre los mismos en un sistema semiótico según la teoría de Dubal.

Actividad 1:

Nombre las técnicas de conteo que conoce y diga qué técnica tiene en cuenta el orden de los elementos de un subconjunto para contarlos como distintos y cuál no. ¿Qué significa que un conjunto sea ordenado? ¿Dé el concepto de variación?

El objetivo de esta actividad es analizar la conceptualización que tienen los alumnos sobre este tema.

Si bien está actividad involucra al registro simbólico y puede que también el analítico, no apreciándose de forma evidente un pasaje entre registros en forma directa, tiene como finalidad la de analizar si el alumno maneja los registros involucrados en la misma, para luego saber si es capaz de resolver la actividad 2, donde se encuentran involucrados el pasaje entre los registros verbal, analítico y figurativo. Se evidencia un vínculo indirecto entre los registros de la actividad 1 y la actividad 2 que forman parte de un mismo examen de evaluación, ya que tanto las preguntas teóricas de la actividad 1, como el problema de aplicación de la actividad 2, hacen referencia al mismo concepto teórico: Variación.

Como se puede observar dentro de esta pregunta conceptual se busca un conocimiento amplio del tema de técnicas de conteo y para tener un mejor detalle se analizará la actividad dividiéndola en cuatro partes:

i) *Nombre las técnicas de conteo que conoce*

Con esta pregunta se pretende saber el conocimiento del alumno respecto de las técnicas de conteo de que dispone o se le ha enseñado.

ii) *Diga qué técnica tiene en cuenta el orden de los elementos de un subconjunto para contarlos como distintos y cuál no.*

Con esta pregunta se pretende evaluar la característica más importante a tener en cuenta para distinguir entre una de las técnicas de conteo, (Combinación), respecto de las otras dos restantes, (Variación y Permutación), siendo además un factor fundamental en la selección de una técnica, (Variación), respecto de otra, (Combinación), para aplicar en un problema en particular.

iii) *¿Qué significa que un conjunto sea ordenado?*

Esta pregunta hace referencia a una característica básica, que los alumnos deben de asimilar conceptualmente para poder entender las diferencias entre las técnicas de conteo y en consecuencia saber que técnica aplicar de acuerdo al problema que deben de resolver, constituye un concepto que forma parte de la estructura de todas las técnicas de conteo.

iv) *¿Dé el concepto de variación?*

En esta pregunta se evalúa en particular el concepto que tienen los alumnos sobre la técnica de conteo, Variación, la que posteriormente deben de aplicar en un problema posterior del examen. Tiene por objetivo evaluar el manejo en el registro simbólico sobre el concepto, para después analizar el pasaje de dicho registro a otros necesarios para resolver el mencionado problema.

Esta es una pregunta abierta en donde no se les indica vías de respuesta, tampoco se los induce a que respondan en un determinado registro.

RESULTADOS

Análisis de las respuestas

i) *Nombre las técnicas de conteo que conoce*

Elemento de análisis	Resultados	%	Observaciones
Nombran las tres técnicas de conteo	25	69%	Solo enumeran las técnicas. Hacen un comentario de cada una
Elemento de análisis	Resultados	%	Observaciones
Nombran dos de las tres técnicas de conteo	1	3%	Sin observaciones
Nombran una de las tres técnicas de conteo	1	3%	Sin observaciones
No escriben nada o no nombran ninguna	9	25%	Sin observaciones

ii) *Diga qué técnica tiene en cuenta el orden de los elementos de un subconjunto para contarlos como distintos y cuál no.*

Elemento de análisis	Resultados	%	Observaciones
Responden correctamente	2	6%	Algunos alumnos además de mencionar las técnicas pedidas también dan ejemplos.
Responden parcialmente bien	16	39%	Algunos alumnos nombran a la Variación como que tiene en cuenta el orden y a Permutación como que no importa el orden, o no la mencionan. (Figura Nº 1). Otros nombran todas las técnicas de conteo, pero sin especificar si tienen en cuenta el orden de los elementos. Algunos nombran a la Combinación e incluyen a la Variación dentro de las técnicas que no tiene en cuenta el orden. (Figura Nº 2)
Responden incorrectamente	4	11%	Nombran solamente a la Combinación.
No responden	14	44%	Sin observaciones

Figura Nº 1:

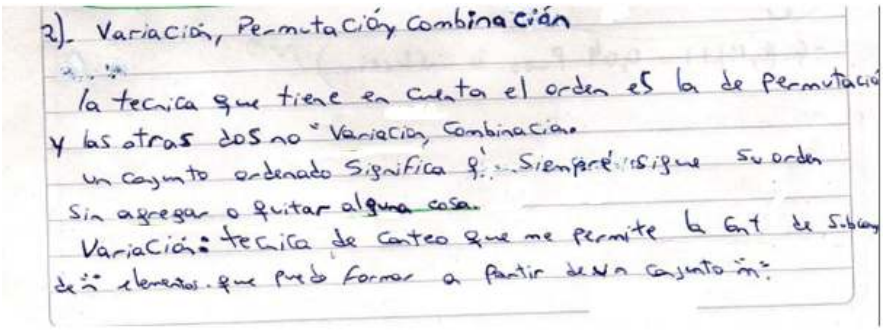
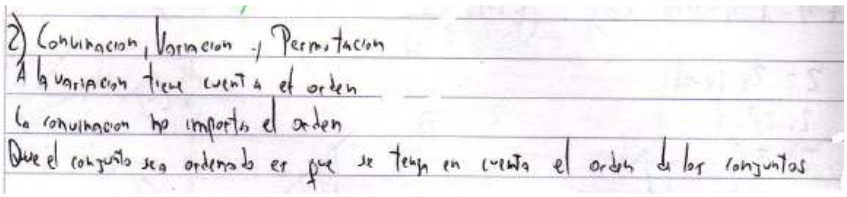

2)- Variación, Permutación, Combinación
la tecnica que tiene en cuenta el orden es la de permutación
y las otras dos no Variación, Combinación
un conjunto ordenado significa q: siempre sigue su orden
sin agregar o quitar alguna cosa.
Variación: tecnica de conteo que me permite la cant de subcj
de n elementos que puedo formar a partir de un conjunto n.

Figura Nº 2:


2) Combinacion, Variacion y Permutacion
A la variacion tiene cuenta el orden
La combinacion no importa el orden
Que el conjunto sea ordenado es que se tenga en cuenta el orden de los conjuntos

iii) *¿Qué significa que un conjunto sea ordenado?*

Elemento de análisis	Resultados	%	Observaciones
Responden correctamente	1	3%	Sin observaciones
Responden parcialmente bien	3	8%	Responden mediante un ejemplo, pero no dan el concepto de orden . (Figura Nº 3)
Responden incorrectamente	6	17%	Responden usando la palabra orden, pero no explican su significado. (Figura Nº 4)
No escriben ninguna respuesta	26	72%	Sin observaciones.

Figura Nº 3:

Ejemplo Nº1:

Conjunto ordenado
$\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
Conjunto desordenado
$\{a_2, a_1, a_3, a_4\}$

Ejemplo Nº: 2

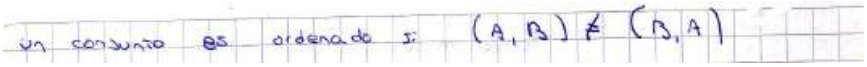
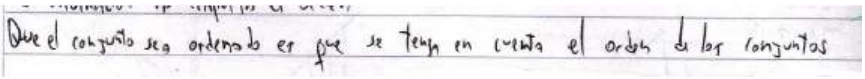

un conjunto es ordenado si $(A, B) \neq (B, A)$

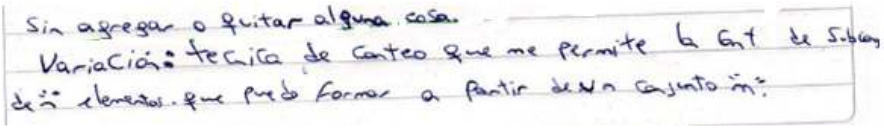
Figura Nº 4:


Que el conjunto sea ordenado es que se tenga en cuenta el orden de los conjuntos

iv) *¿Dé el concepto de variación?*

Elemento de análisis	Resultados	%	Observaciones
Responden correctamente	6	14%	Sin observaciones
Respuesta incompleta	7	20%	Responden una parte de la definición, les falta completar la otra mitad. (Figura Nº 5)
Responden incorrectamente	5	17%	Dan respuestas que no corresponden, como fórmulas de cálculo de Combinación
No escriben ninguna respuesta	17	49%	Sin observaciones

Figura Nº 5:


Sin agregar o quitar alguna cosa.
Variación: tecnica de conteo que me permite la cant de subcon de n elementos que puedo formar a partir de un conjunto n.

ACTIVIDAD 2:

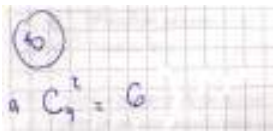
1) *Un ingeniero químico tiene cuatro herbicidas:* H_1, H_2, H_3 *y* H_4 *y quiere probar el comportamiento de dos herbicidas con un intervalo de aplicación entre ellos de 48 hs. Los resultados son diferentes según si se aplica primero uno u otro.*

a) *¿De cuántas posibilidades dispone?*

En este caso el objetivo es analizar si los alumnos son capaces de identificar que técnica de conteo deben de aplicar para resolver correctamente el problema. Este análisis permite identificar si los alumnos son capaces de realizar el pasaje del registro simbólico al registro analítico, ya que el alumno debe de interpretar el problema, relacionarlo con el concepto y aplicar la fórmula analítica.

Elemento de análisis	Resultados	%	Observaciones
Responden correctamente	18	50%	No calculan a través de la fórmula sino que usan la calculadora. Algunos escriben directamente la respuesta sin la simbología de Variación. Algunos escriben directamente el resultado. Algunos muestran ejemplos de los subconjuntos tomados del conjunto.
Responden incorrectamente	6	17%	Algunos aplican Combinación o Permutación. (Figura Nº 6)
No escriben ninguna respuesta	12	33%	Sin observaciones

Figura Nº 6:

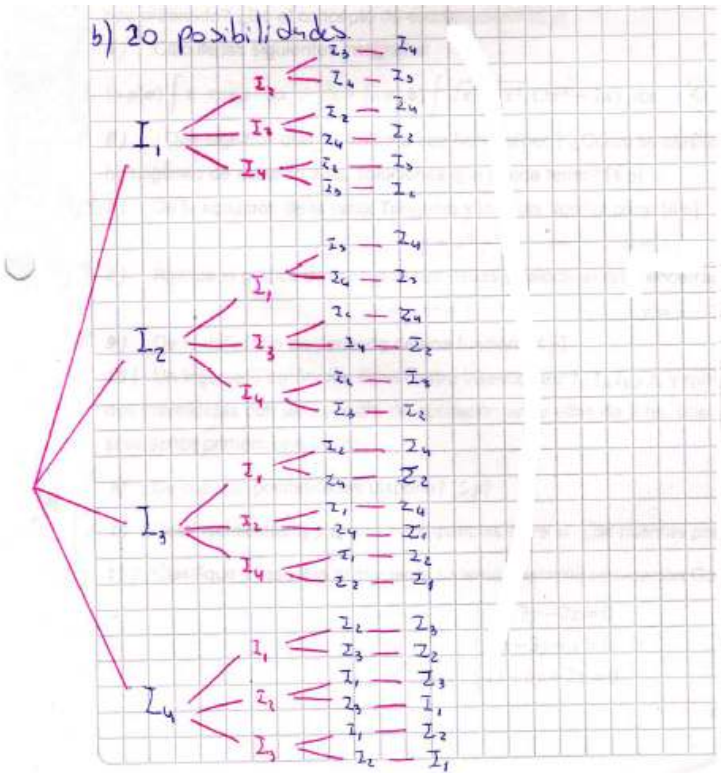


b) *Si los herbicidas* H_1 *y* H_3 *son incompatibles entre sí ¿de cuántas posibilidades dispone ahora?* **[3 p]**

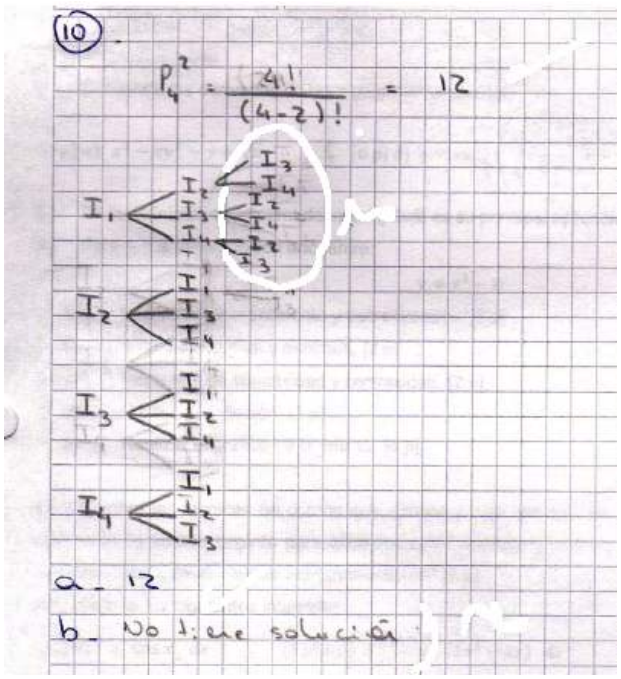
El objetivo de esta pregunta es la de analizar si los alumnos se valen del diagrama de árbol para resolver el problema. El aplicar el diagrama de árbol implica, (en el caso que las preguntas anteriores estén resueltas correctamente), un pasaje del registro simbólico o analítico, al figurativo, lo cual muestra un manejo adecuado y simultaneo de tres registros semióticos para una comprensión adecuada del concepto enseñado de acuerdo a la teoría de Dubal.

Elemento a analizar	Resultados	%	Observaciones
Aplican correctamente el diagrama de árbol	13	41%	Algunos marcan en el diagrama de árbol las combinaciones permitidas y otros no.
Resuelven incorrectamente con diagrama de árbol	4	12%	Algunos agregan otra rama a alguna de los elementos. Algunos realizan el diagrama de árbol correspondiente a la Permutación. Algunos hacen una rama de más lo que significa que están tomando tres elementos. (Figura Nº 7)
Elemento a analizar	Resultados	%	Observaciones
Resuelven incorrectamente sin diagrama de árbol	1	3%	Sin observaciones
No hacen nada	14	44%	Sin observaciones

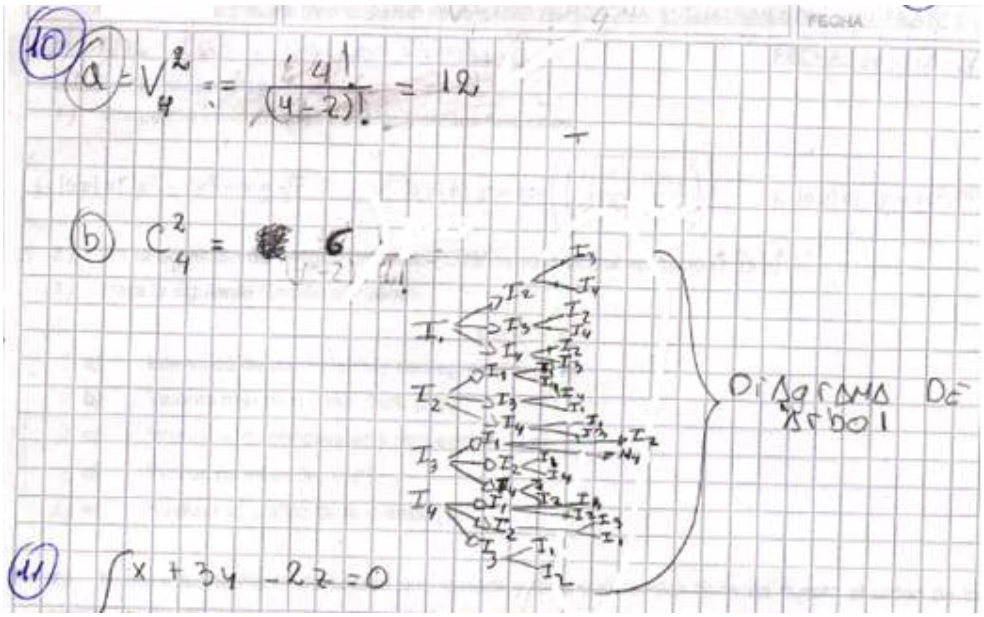
Figura Nº 7:
Ejemplo Nº 1:



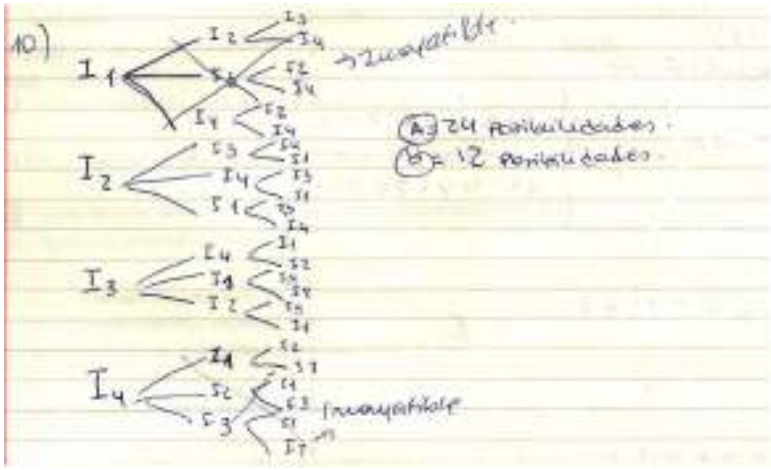
Ejemplo Nº 2:



Ejemplo Nº 3:



Ejemplo Nº 4:



CONCLUSIONES

Del análisis efectuado sobre las respuestas de los alumnos sobre algunas de las preguntas y problemas del parcial se pueden deducir las siguientes reflexiones:

- El presente trabajo se considera importante dado que al conocer las dificultades de los conocimientos de los alumnos, se puede repensar la planificación de la enseñanza para los años posteriores.
- Del análisis de los datos obtenidos anteriormente se observa que los alumnos tienen un conocimiento general sobre las distintas técnicas de conteos existentes o de las que disponen (69%), sin embargo un número mínimo (3%), sabe expresar en palabras de rigurosidad matemática, (lenguaje simbólico), una característica fundamental, como lo es el concepto de orden, que permite distinguir una técnica de conteo respecto de las otras dos.
- Se observa que el porcentaje de alumnos que contestan correctamente el concepto de Variación (17%), es mayor respecto de aquellas respuestas de parte de los alumnos, cuando se les pide que definan una de las características más importantes que distingue a dicha técnica de conteo como lo es el concepto de Orden (3%). Lo cual indica que no hay una completa o total asimilación en el registro simbólico de éste concepto. Es interesante señalar, sin embargo, que un 8% de los alumnos presenta una noción evidente del concepto de orden, al utilizar ejemplos de carácter simbólico para definirlo.
- Del análisis de las respuestas del problema de aplicación, se observa un alto porcentaje de alumnos que lo resuelven correctamente, (50%), a pesar de que un porcentaje menor de los alumnos definen correctamente el concepto de Variación, (39%), y que aún un porcentaje más reducido (11%) evidencian un conocimiento sobre una de las características fundamentales que definen a la Variación, tal como lo es el concepto de Orden de los

elementos de un conjunto. De dicho porcentaje de alumnos, sólo un (3%) expresa correctamente dicho concepto de orden, mientras que el restante (8%) lo hace a través de ejemplos simbólicos.

- El punto anterior muestra que para los alumnos resulta más fácil pasar del registro verbal al analítico. El registro verbal, se lo presenta a los alumnos a través de un problema práctico de aplicación a la ingeniería, con el objeto de que los alumnos encuentren un incentivo adicional al estar referido a un área de interés. Mientras que el registro analítico está evidenciado cuando resuelven dicho problema mediante la aplicación de la fórmula correspondiente.

Consideramos que debemos continuar la investigación sobre este tipo de problemática para tratar de lograr una enseñanza más eficaz que sirva a nuestros alumnos de base para la adquisición significativa de conceptos relacionados con el concepto de Análisis Combinatorio.

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México. Grupo Editorial Iberoamérica. (pp. 33 - 61)
- Duval, R. (1993). Registres de reprësentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives 5* (p. 37 - 65).
- Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II,* (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.
- Gatica, N. Carranza, M., May G., Cosci C. (2002). El concepto de función en los libros de textos universitarios *XV Reunión Latinoamericana de Matemática Educativ*a. (pp.131 - 136)Buenos Aires
- May,Gladys; Gática, Stella Nora; Cosci, Cristina; Renaudo, Juan Antonio (2003)"*Conversión al registro Gráfico en un problema aplicado el Concepto de función: Una Experiencia con Alumnos de Primer Año de las Carreras de Ingenierías".* Publicación: Revista EPSILON; nº55 (pags 33-44).Editada S.A.E.M "THALES" Facultad de Matemática; España.
- Purcell, Edwin; Varberg, Dale; Rigdon, Steven(2007) *Cálculo*. 9º Edición.Ed. Pearson.Prentice Hall.(pág.82-90).
- Zill, Dennis. *Cálculo con Geometría Analítica*. Ed. Grupo Editorial Iberoamerica 1987. (pág85-92).