SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA DEFLEXIÓN DE UNA PLACA RÍGIDA SOBRE UN MEDIO CONTINUO ELÁSTICO UTILIZANDO UNA PLANILLA DE CÁLCULO

Juan Francisco WEBER, Pablo Héctor MENGUAL FARÍAS
Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina. Ciudad Universitaria - CP (X5016ZAA) - Córdoba - Argentina
jweber@civil.frc.utn.edu.ar , 44452@civil.frc.utn.edu.ar

Área temática: Experiencias de Cátedra
Palabras claves: Métodos Numéricos – Ecuaciones Diferenciales Parciales – Cálculo Avanzado

Resumen
Se presenta una experiencia de la cátedra de Cálculo Avanzado de la carrera Ingeniería Civil (UTN – Fac. Reg. Córdoba). En ésta se muestra el fuerte vínculo establecido entre los contenidos básicos de la carrera (Métodos Numéricos) y los contenidos de especialidad (Fundaciones, Elasticidad), por medio de la realización de un trabajo final de materia. Éste consistió en el desarrollo de un modelo numérico para el cálculo de la deflexión de una placa rígida (losa de fundación) sobre un medio elástico homogéneo y continuo (suelo) a través del Método de Diferencias Finitas. Se utilizó una herramienta de uso común entre los estudiantes (planilla de cálculo) que permitió una implementación sencilla y didáctica del modelo numérico, obteniendo resultados satisfactorios.

Introducción

A partir del año 2005 se agrega en la currícula de la carrera de Ingeniería Civil, en la Universidad Tecnológica Nacional (U.T.N.), una nueva materia denominada Cálculo Avanzado [1]. Esta materia intenta profundizar la formación matemática de los alumnos de la carrera citada, en especial en relación a las Ecuaciones Diferenciales lineales en Derivadas Parciales.
El programa analítico consta de las siguientes unidades:
Unidad 1: Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) con condiciones iniciales
Unidad 2: Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) con condiciones de contorno
Unidad 3: Series de Fourier
Unidad 4: Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs)
Unidad 5: Solución numérica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales
Como metodología alternativa de evaluación de la parte práctica del examen final, los alumnos pueden optar por desarrollar un Trabajo Final de la asignatura, consistente en la resolución de un problema de la Física o la Ingeniería modelado a través de una (o un sistema de) ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs) [2]. La solución de dichas EDPs es principalmente numérica, y en especial a través del Método de las Diferencias Finitas (MDF).
En general, se alienta a los alumnos a seguir este camino, ya que se considera que es mucho más fructífero que la alternativa tradicional de evaluación escrita en un turno de examen. Los alumnos se motivan ya que la temática es libremente elegida por ellos en relación a sus preferencias dentro de la carrera. Los problemas resueltos tienen una componente práctica muy fuerte y de ese modo les justifica la presencia de la asignatura en la currícula.
Esta actividad también implica una articulación vertical con varias asignaturas de la carrera, tanto en lo que respecta a las ciencias básicas (Análisis Matemático, Álgebra Lineal, Informática -Programación-, etc.) como con asignaturas de la especialidad, ya sea que hayan cursado (como Resistencia de Materiales por ejemplo) o bien otras que aún no han cursado (Elasticidad, por ejemplo) y que si bien aún no han adquirido los conceptos de la teoría que subyace al problema a encarar, sí han asimilado el lenguaje matemático necesario para interpretar los modelos (EDPs) que rigen el problema, de modo que se establece en estos casos una interesante retroalimentación desde esta cátedra hacia años posteriores.
En buena medida, los alumnos se enfrentan por primera vez con el desafío de redactar un texto técnico-científico que será revisado (evaluado) en forma similar al procedimiento que se sigue en la evaluación estándar de publicaciones: tanto en su contenido como en su forma. Se fija un límite de 10 páginas incluyendo texto, gráficos y tablas. Este límite, muchas veces resistido por parte de los alumnos, exige a los mismos apelar a su poder de síntesis, conservando lo que estrictamente necesario para la transmisión de la idea, y descartando lo que es redundante o superfluo.
El alumno vivencia el logro de haber planteado, utilizando los conocimientos adquiridos en la asignatura, la solución a problemas estrechamente vinculados a su especialidad; desde esa perspectiva, estos trabajos finales intentan ser un puente entre la formación básica del alumno y su aplicación ingenieril.

Caso de estudio

Se presenta como caso de estudio un trabajo final de materia desarrollado sobre una aplicación estructural. El problema consiste en la determinación de la deflexión o deformación de una placa elástica y rígida (entendiendo como tal, aquella que es capaz de resistir flexiones) apoyada completamente sobre un medio que se asume continuo, homogéneo, isótropo y elástico. Esta placa está sometida a cargas perpendiculares a su plano

(verticales) que pueden ser tanto concentradas (columnas) como distribuidas, tanto en una dimensión (vigas de fundación) como en dos dimensiones (peso propio, por ejemplo). Este modelo representa una amplia variedad de soluciones estructurales de la Ingeniería Civil, para la fundación o cimentación de estructuras que deben transmitir cargas relativamente bajas a suelos de poca capacidad portante: losas de fundación, plateas de fundación, pavimentos de hormigón, etc. y es habitual su fabricación in situ en hormigón armado (figura 1).

Figura 1. Construcción de una platea in situ en hormigón armado

La teoría clásica de placas

Se define como Placa al sólido paralepipédico en el que una de sus dimensiones (espesor) es mucho menor que las otras dos (las vigas tiene dos dimensiones pequeñas, ancho y canto, respecto a una tercera, longitud). La superficie plana equidistante de las dos caras con mayores dimensiones se denomina plano medio de la placa [3].
Por otra parte se define como estado de placa al sistema de cargas en el que sólo actúan fuerzas exteriores normales al plano medio de la placa y momentos contenidos en planos perpendiculares al mismo (o lo que es lo mismo momentos cuyos ejes están contenidos en el plano medio).
La tipología Placa es en principio una estructura tridimensional y como tal debería estudiarse. Sin embargo su comportamiento podría representarse con un modelo bidimensional si se pudiera considerar que la variación de las variables significativas a lo largo del espesor es una función conocida de los valores que las mismas toman en el plano medio de la placa. En estas condiciones sería suficiente analizar el plano medio para encontrar una solución tensodeformacional compatible y equilibrada.
En esta dirección son numerosos los trabajos realizados por grandes matemáticos y fisicos, tales como Euler, Lagrange, Navier, Poisson, etc. Sin embargo, y debido al trabajo contenido en su libro Clases de Fisica Matemática (1876), Kirchhoff (1824-1887) es considerado como el padre de la denominada teoría clásica de placas. Posteriormente Love recogió y amplió aquellos trabajos hasta el punto que hoy dia, la teoría clásica de placas se conoce también como de Kirchhoff-Love.

Modelo teórico

La respuesta tenso deformacional de una placa puede obtenerse por degeneración de la teoría de la elasticidad tridimensional suponiendo que la variación, de las distintas magnitudes que intervienen en el proceso a lo largo del espesor, es una función conocida de los valores que toman en el plano medio de la misma.
Para generar la teoría de Placas clásica bajo estas condiciones es necesario establecer las siguientes hipótesis:

- El material de la Placa se supone elástico, homogéneo e isótropo.
- Se supone válida la teoría de las pequeñas deformaciones. Una flecha del 10% del espesor puede ser considerada como un límite máximo para satisfacer la hipótesis de flechas pequeñas.
- Todos los puntos situados sobre una recta normal al plano medio de la placa sin deformar, permanecen después de la deformación sobre una recta (Hipótesis de Navier) normal al plano medio deformado. Hipótesis de Normalidad.
- Los puntos del plano medio sólo se mueven en la dirección perpendicular al mismo. Es decir sólo se considera la deformación provocada por la flexión.
- Todos los puntos situados sobre una normal al plano medio tienen la misma flecha. Es decir $w(x, y, z) = w(x, y)$.
- La tensión normal al plano medio de la placa se considera despreciable.

Estas hipótesis permiten expresar los desplazamientos, deformaciones, tensiones y esfuerzos en el plano medio sólo en función de la flecha $w(x, y)$ que caracteriza cada punto de la placa transformando así un problema inicialmente tridimensional en bidimensional. Posteriormente estableciendo las ecuaciones de equilibrio, se determina la ecuación diferencial en derivadas parciales que debe satisfacer esta función $w(x, y)$.
Para la obtención de la ecuación diferencial de la placa, se parte del equilibrio de un elemento diferencial de

placa de dimensiones (dx, dy, t), y se plantea considerando que exteriormente actúa una carga normal al plano medio p= p(x, y) por unidad de superficie. El equilibrio tiene que satisfacerse en fuerzas y momentos y por lo tanto debe incorporarse la longitud que afecta a cada uno de los esfuerzos anteriormente presentados.
Planteando las ecuaciones de equilibrio de momentos respecto a los ejes x e y, y el equilibrio de fuerzas verticales, y operando, se llega a la ecuación diferencial de la placa rígida, conocida también como ecuación de Lagrange:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{p}{D} \tag{1}$$

que también puede escribirse de forma más simple como:

$$\Delta \Delta w(x,y)=\frac{p(x,y)}{D} \tag{1}$$

en la cual las variables tienen los significados antes desriptos, y D es la rigidez flexional de la placa, definida como:

$$D=\frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2}$$

donde E es el módulo de elasticidad longitudinal del material de la placa, t el espesor y ν el módulo de Poisson del material.

Condiciones de contorno
Al resolver la ecuación diferencial de la placa es necesario imponer unas determinadas condiciones en los bordes. Esto es obvio tanto desde el punto de vista físico como matemático ya que la respuesta de una Placa, o la solución de la ecuación diferencial que la representa, es distinta según su contorno este apoyado, empotrado o libre.

- Si el borde x=a esta empotrado la flecha y el giro en dicho borde son nulos. Se tienen por tanto las siguientes condiciones que debe satisfacer la función w(x, y):

$$\left[w(x,y)\right]_{x=a}=0 \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\right]_{x=a}=0 \tag{4}$$

- Si el borde x=a esta simplemente apoyado, la flecha w(x,y) es nula a lo largo del borde. Como en el borde la placa puede girar libremente el momento Mx es nulo. Matemáticamente un borde simplemente apoyado introduce las siguientes condiciones para la flecha w :

$$\left[w(x,y)\right]_{x=a}=0 \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}\right]_{x=a}=0 \tag{5}$$

- Si el borde x=a está libre, a lo largo de él los Momentos Flectores, Torsores y esfuerzo Cortante son nulos.

$$\left[M_x\right]_{x=a}=0 \;\;,\;\; \left[M_{xy}\right]_{x=a}=0 \;\;,\;\; \left[Q_x\right]_{x=a}=0 \tag{6}$$

En principio un borde libre incorpora tres condiciones que debe satisfacer la ecuación diferencial que representa el comportamiento de la placa estudiada. No obstante Kirchoff probó que estas tres condiciones son excesivas y son suficiente dos para determinar correctamente la flecha w(x, y). Kirchoff puso de manifiesto que las condiciones relativas al momento torsor y al esfuerzo cortante pueden sustituirse por una condición única:

$$\left[\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \partial y^2}\right]_{x=a}=0 \tag{7}$$

Placa sobre lecho elástico

Si todos los puntos de la placa están bajo condiciones de apoyo elástico la carga se modifica con una reacción vertical R(x,y) = -k(x,y) w(x, y) con lo que la ecuación diferencial de la placa se modifica en la forma:

$$\Delta\Delta w(x,y)+\frac{k(x,y)}{D}w(x,y)=\frac{p(x,y)}{D} \tag{8}$$

que es en definitiva la ecuación utilizada en el desarrollo del presente trabajo. Ésta es una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) de cuarto orden, elíptica, no homogénea, y lineal bajo comportamiento elástico del material.

Solución numérica

Para la solución aproximada de la ecuación (8) se utilizó el Método de las Diferencias Finitas [4]. Este método consiste básicamente en sustituir las derivadas presentes en la ecuación diferencial por esquemas de derivación numérica, en lo posible centrados y del mismo orden de error, de modo de transformar la ecuación diferencial en una ecuación algebraica. La ecuación así obtenida, centrada en el nodo (i,j) se aplica a cada nodo de una malla rectangular (figura 2) generando de este modo un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

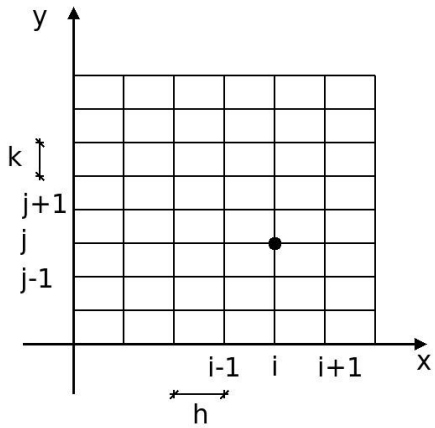

Figura 2. Malla rectangular en el método de diferencias finitas

En el caso de la ecuación (8), las aproximaciones utilizadas fueron las siguientes:

$$\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right]_{i,j}=\frac{w_{i-2,j}-4w_{i-1,j}+6w_{i,j}-4w_{i+1,j}+w_{i+2,j}}{h^4}+O(h^2) \tag{9}$$

$$\left[\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right]_{i,j}=\frac{w_{i,j-2}-4w_{i,j-1}+6w_{i,j}-4w_{i,j+1}+w_{i,j+2}}{k^4}+O(k^2) \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2}\right]_{i,j}=\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{i,j}=\frac{\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{i,j-1}-2\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{i,j}+\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{i,j+1}}{k^2}=\ldots\\ \frac{\frac{w_{i-1,j-1}-2w_{i,j-1}+w_{i+1,j-1}}{h^2}-2\frac{w_{i-1,j}-2w_{i,j}+w_{i+1,j}}{h^2}+\frac{w_{i-1,j+1}-2w_{i,j+1}+w_{i+1,j+1}}{h^2}}{k^2}=\ldots\\ \frac{w_{i-1,j-1}-2w_{i,j-1}+w_{i+1,j-1}-2w_{i-1,j}+4w_{i,j}-2w_{i+1,j}+w_{i-1,j+1}-2w_{i,j+1}+w_{i+1,j+1}}{h^2k^2}+O(h^2+k^2)\end{gathered} \tag{11}$$

Reemplazando las ecuaciones (9), (10) y (11) en la ecuación (8), y reordenando, se llega a la expresión en diferencias finitas correspondiente a la ecuación de la placa sobre apoyo elástico continuo:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{h^4}\left(w_{i-2,j}+w_{i+2,j}\right)-\frac{1}{k^4}\left(w_{i,j-2}+w_{i,j+2}\right)-\frac{2}{h^2k^2}\left(w_{i-1,j-1}+w_{i+1,j-1}+w_{i-1,j+1}+w_{i+1,j+1}\right)+\ldots \\
&\left(\frac{4}{h^2k^2}+\frac{4}{h^4}\right)\left(w_{i-1,j}+w_{i+1,j}\right)+\left(\frac{4}{h^2k^2}+\frac{4}{k^4}\right)\left(w_{i,j-1}+w_{i,j+1}\right)+\left(\frac{8}{h^2k^2}+\frac{6}{h^4}+\frac{6}{k^4}+\frac{K}{D}\right)w_{i,j}=\frac{p_{i,j}}{D}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

cuya representación gráfica, a través de una molécula de cálculo, se indica en la figura 3.

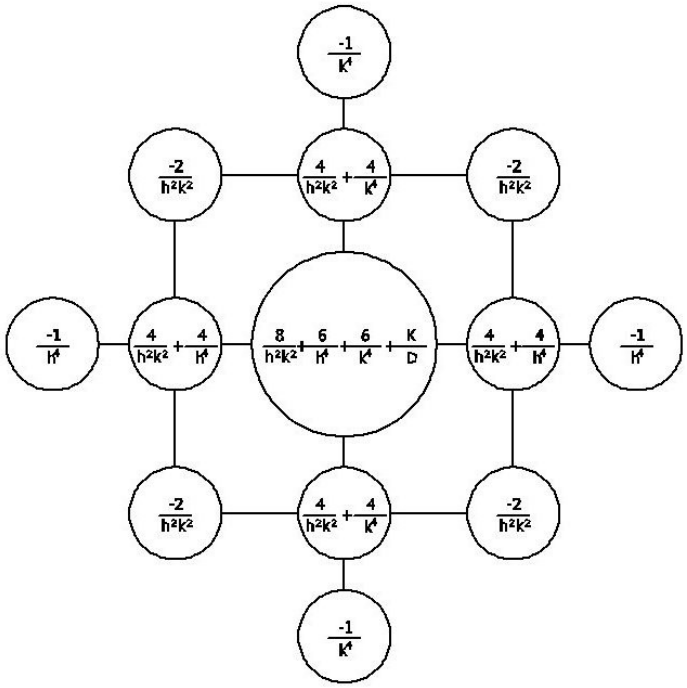

Figura 3. Molécula de cálculo correspondiente a la ecuación (12)

Las condiciones de contorno enunciadas en las ecuaciones (4), (5) y (7) también son aproximadas por el método de diferencias finitas, en una metodología similar a la indicada anteriormente, generando así nuevas ecuaciones que acopladas a las surgidas de la aplicación reiterada de la ecuación (12), forman un sistema lineal de ecuaciones cuya solución es el conjunto de flechas $w_{i,j}$ en cada nodo de la malla de la figura 2.

Implementación del modelo numérico

En lugar de explicitar el sistema y encontrar su solución ya sea a través de métodos directos (eliminación de Gauss, descomposición LU) o iterativos (Jacobi, sobrerrelajación sucesiva) se utilizó una herramienta informática de extendido uso entre los alumnos de ingeniería como es la planilla de cálculo. Ésta presenta ciertas ventajas conceptuales y didácticas a la hora de clarificar el procedimiento utilizado para la obtención de la solución aproximada.

A cada nodo de la malla en diferencias finitas de la figura 2, se hizo corresponder una celda en una hoja de cálculo (figura 4).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1			0.00079	-0.00034	-0.00055	-0.00068	-0.00075	-0.00078	-0.00075	-0.00068	-0.00055	-0.00034	0.00079		
2		-0.000347	0.000000	-0.000116	-0.000207	-0.000271	-0.000307	-0.000319	-0.000308	-0.000271	-0.000208	-0.000116	0.000000	-0.000348	
3	0.00079	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00079
4	-0.00034	-0.000116	0.000000	0.000116	0.000207	0.000271	0.000307	0.000319	0.000308	0.000271	0.000208	0.000116	0.000000	-0.000116	-0.00034
5	-0.00055	-0.000207	0.000000	0.000207	0.000375	0.000492	0.000560	0.000582	0.000561	0.000493	0.000376	0.000208	0.000000	-0.000208	-0.00055
6	-0.00068	-0.000271	0.000000	0.000271	0.000492	0.000648	0.000740	0.000770	0.000740	0.000649	0.000493	0.000271	0.000000	-0.000271	-0.00068
7	-0.00075	-0.000307	0.000000	0.000307	0.000560	0.000740	0.000845	0.000880	0.000845	0.000741	0.000561	0.000308	0.000000	-0.000308	-0.00075
8	-0.00077	-0.000319	0.000000	0.000319	0.000582	0.000769	0.000879	0.000916	0.000880	0.000770	0.000583	0.000320	0.000000	-0.000320	-0.00078
9	-0.00075	-0.000307	0.000000	0.000307	0.000560	0.000740	0.000845	0.000880	0.000846	0.000741	0.000561	0.000308	0.000000	-0.000308	-0.00076
10	-0.00068	-0.000271	0.000000	0.000271	0.000492	0.000649	0.000740	0.000770	0.000741	0.000650	0.000493	0.000272	0.000000	-0.000272	-0.00068
11	-0.00055	-0.000208	0.000000	0.000208	0.000375	0.000493	0.000561	0.000583	0.000561	0.000493	0.000376	0.000208	0.000000	-0.000208	-0.00055
12	-0.00034	-0.000116	0.000000	0.000116	0.000208	0.000271	0.000308	0.000320	0.000308	0.000271	0.000208	0.000116	0.000000	-0.000116	-0.00034
13	0.00079	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00079
14		-0.000347	0.000000	-0.000116	-0.000208	-0.000271	-0.000308	-0.000320	-0.000308	-0.000271	-0.000208	-0.000116	0.000000	-0.000348	
15			0.00079	-0.00034	-0.00055	-0.00068	-0.00075	-0.00078	-0.00075	-0.00068	-0.00055	-0.00034	0.00079		

Figura 4. Planilla de cálculo utilizada para el caso de una placa con 4 bordes apoyados

Se distinguen en esta planilla sólo tres tipos de celdas:

- las celdas centrales corresponden a nodos donde es válida la aplicación de la ecuación (12).
- las celdas periféricas (coloreadas) donde se impone la condición de borde esencial asociada al borde

apoyado (w = 0). Este es un valor prescripto por el usuario.

- Las celdas exteriores, blancas, donde se imponen la condiciones de borde restantes por medio de ecuaciones en diferencias finitas equivalentes.

Una vez ingresadas las fórmulas correspondientes a cada celda, deberá habilitarse el cálculo iterativo ya que de otra forma ocurrirá un error en la planilla. Hecho esto, la herramienta comienza una iteración automática hasta alcanzar un criterio de convergencia prefijado por el usuario entre las opciones de la herramienta.
Es interesante destacar que este procedimiento es una forma visual equivalente a la aplicación del método iterativo de Gauss-Seidel [4] para la solución del sistema de ecuaciones asociado, el cual nunca fue explicitado. Esta equivalencia suele resultar sorprendente al alumno y ayuda a clarificar las ideas asociadas a los métodos iterativos para la solución de sistemas lineales de ecuaciones. Además, la deshabilitación del cálculo automático de la planilla, reemplazándolo por el cálculo manual, permite al alumno visualizar los valores resultantes de cada paso iterativo, y la convergencia del sistema.
Además, la propia planilla de cálculo permite graficar la superficie tridimensional deformada de la placa, permitiendo al alumno analizar cualitativamente la verosimilitud de la solución obtenida, lo que a su vez ayuda a desarrollar la intuición sobre la física subyacente.

Ejemplos analizados
Se planteó la resolución, utilizando la herramienta desarrollada, de 4 ejemplos característicos. En todos los casos se consideraron las siguientes propiedades geométricas y mecánicas:

- carga distribuida $p = 9{,}8 \times 10^3$ kN/m^2
- coeficiente de balasto del suelo $K = 9{,}8 \times 10^6$ kN/m^3
- módulo de elasticidad del material de la placa: $E = 1{,}4 \times 10^{10}$ kN/m^2
- coeficiente de Poisson $\nu = 0{,}30$
- espesor de la placa $t = 0{,}50$ m
- $h = k = 1$ m
- número de nodos total de la malla en diferencias finitas: 121

Los 4 casos considerados fueron los siguientes:

- cuatro bordes apoyados
- un borde libre
- dos bordes libres
- cuatro bordes libres

En las figuras 5 a 9 se muestran los resultados gráficos obtenidos.

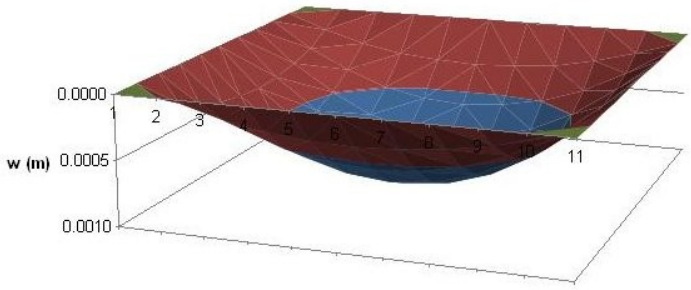

Figura 5. Deformación de la placa con los cuatro bordes apoyados

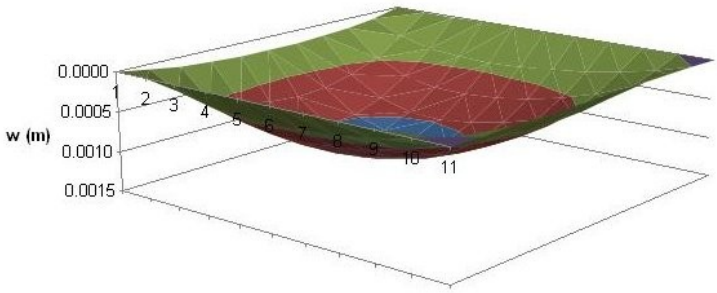

Figura 6. Deformación de la placa con un borde libre

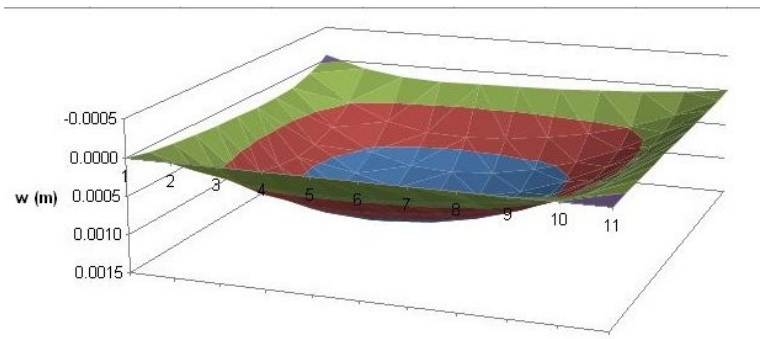

Figura 7. Deformación de la placa con dos bordes libres

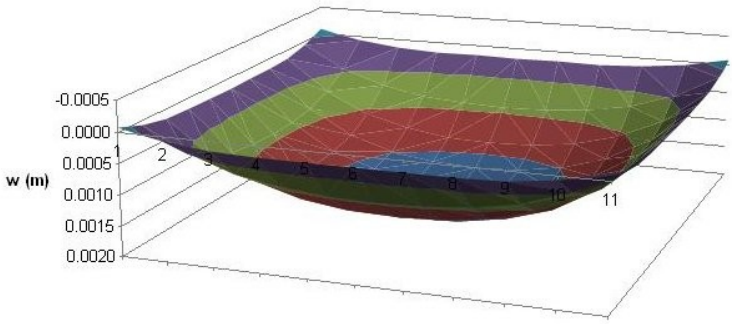

Figura 8. Deformación de la placa con dos bordes libres

Conclusión

Se considera que la inclusión de los trabajos finales en la materia Cálculo Avanzado, de la carrera de Ingeniería Civil UTN-FRC, resultó ampliamente beneficiosa desde un punto de vista integrador de los conocimientos adquiridos en la asignatura. La resolución de problemas de ingeniería es un elemento motivante para el alumno y un punto de encuentro entre su formación básica y aplicada. El uso de la planilla de cálculo como herramienta informática para la implementación de un modelo numérico de relativa complejidad ha presentado ventajas didácticas que la hacen atractiva para su uso, como un estadio inicial previo a la posterior escritura de un programa general. Es de destacar el creciente compromiso del alumno a la tarea, a medida que avanza en el desarrollo y obtiene resultados interesantes, como los mostrados en este trabajo.

Referencias Bibliográficas

[1] Weber, J. F. La materia Cálculo Avanzado en la carrera de Ingeniería Civil, FRC-UTN: una profundización en la formación matemática de los alumnos. XIII Congreso de Educación Matemática en carreras de Ingeniería, EMCI. Oberá, Misiones, octubre de 2006.

[2] Weber, J. F.. Acerca de los trabajos finales de Cálculo Avanzado - Ing. Civil - Fac. Córdoba - UTN. XV EMCI NACIONAL - VII EMCI INTERNACIONAL - FRT - UTN - Encuentro de Educación Matemática en carreras de Ingeniería. Tucumán, setiembre de 2009. ISBN: 9789504201168. p. 16.

[3] Marczak, R. J. Teoría Clásica de Placas. Material Didáctico del curso MEC098 Placas e cascas - Universidade Federal do Rio Grande do Sul - Escola de Engenharia - Departamento de Engenharia Mecânica - Programa de pós-graduação em Engenharia Mecânica. 2004.

[4] Chapra, S. C., Canale, R. P. Métodos Numéricos para Ingenieros. Quinta edición. McGraw-Hill Interamericana. 2007.