Modelización Matemática: una alternativa de enseñanza aprendizaje

Marisa Reid - Nilda Etcheverry

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam

mareid@exactas.unlpam.edu.ar, nildae@exactas.unlpam.edu.ar

Área temática: Experiencias de cátedra.

Palabras claves: Modelización Matemática – estrategia pedagógica – enseñanza – aprendizaje.

Resumen

En este artículo se presenta el describe y analiza una experiencia desarrollada con estudiantes de la asignatura Matemática de la carrera Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa en la cual se trabajó utilizando la modelización matemática como estrategia pedagógica apostando por contextualizar la Matemática en la formación académica y profesional.

En el análisis se señalan algunas conclusiones sobre la experiencia y se formulan ciertas implicaciones didácticas.

Introducción

Ante la preocupación sobre las dificultades que los alumnos presentan en relación a las materias de la formación básica en la enseñanza superior nos propusimos la búsqueda de nuevas posibilidades de enseñanza de la Matemática, con el objetivo de ayudar a dirimir estas dificultades y ofrecer alternativas para la enseñanza de esta disciplina.

A partir de las necesidades manifestadas por los egresados de la carrera de Ingeniería en cuanto a que no se proporciona al estudiante la oportunidad de aplicar la matemática en situaciones correspondientes a otras áreas y contextos, se procura dar respuesta a la siguiente indagación: ¿cómo enseñar Matemática para los cursos de Ingeniería, para contribuir al desempeño de las competencias deseables en el profesional de Ingeniería de la actualidad?

En los cursos de matemática hay un planteamiento tradicional de los temas, el cual carece de una visión moderna de enseñanza que responda a los requerimientos actuales. El tratamiento de los temas se hace dejando de lado las aplicaciones, por lo que no se relacionan con las distintas áreas del saber. Se hace necesaria una formación matemática en la que los estudiantes puedan entender nuevas ideas

A pesar de las varias innovaciones realizadas, la enseñanza de la Matemática como una ciencia precisa e inflexible, como una sucesión de teoremas y fórmulas no concede a los alumnos la oportunidad de percibir la utilidad de los conceptos matemáticos en su vida profesional. Para ello se hace necesario redefinir contenidos y metodologías en la formación de usuarios de las matemáticas. El gran reto es la innovación.

La modelización matemática es una de las tendencias actuales en Educación Matemática. Es propuesta como un método de enseñanza aprendizaje que tiene por propósito no solamente hacer que los alumnos asimilen mejor los contenidos matemáticos sino que se sitúa como una metodología de enseñanza en la que el alumno deja de ser un sujeto pasivo para ser activo en el proceso de aprendizaje.

Marco teórico

La Modelización Matemática encuentra un espacio entre las alternativas posibles para la mejora de la enseñanza. Se presenta a continuación qué es la Modelización Matemática, sus etapas, varios argumentos utilizados a favor de su uso y cómo la misma puede ser utilizada como estrategia de enseñanza aprendizaje.

La Modelización Matemática "consiste en el arte de transformar problemas de la realidad en problemas matemáticos y resolverlos interpretando sus soluciones en el lenguaje del mundo real" Bassanezi, 2002.

Según Bienbengut & Hein (2003), la interacción que permite transformar una situación real en un "modelo matemático" involucra una serie de procedimientos. Se identifican tres etapas básicas en el proceso, subdividida en cinco etapas:

- "Interacción": Una vez delineada una situación se debe realizar un estudio sobre el tema. Esta etapa está subdividida en dos:
  - (i) Reconocimiento de la situación-problema;
  - (ii) Familiarización con la cuestión a ser modelada.
- "*Matematización":* esta etapa es más compleja y desafiante. Luego de la interacción ocurre la "traducción" de la situación-problema al lenguaje matemático.

(i) Formulación del problema; en esta etapa es importante: clasificar las informaciones; levantar hipótesis, seleccionar variables relevantes y constantes involucradas, seleccionar símbolos apropiados para esas variables y describir esas relaciones en términos matemáticos

(ii) Resolución del problema en términos del modelo; Una vez formulado el problema se pasa a la resolución o análisis con las herramientas matemáticas de que se dispone.

- *"Modelo Matemático":* Para concluir el modelo se hace necesaria una evaluación para verificar en que nivel se aproxima a la situación que lo originó y a partir de ahí se verifica el grado de confiabilidad en su utilización. De esta forma se hace:

(i) Interpretación de la solución; analizando las implicaciones de la solución derivada del problema que está siendo investigado.

(ii) Validación del modelo, a través del análisis de las respuestas que el modelo ofrece cuando es aplicado a la situación que lo originó, en el sentido de verificar cuando las mismas son adecuadas, o no.

El ingeniero hace uso de la Matemática de una manera eminentemente práctica y está orientada a la resolución de problemas concretos. Una revisión de la literatura representativa de educación matemática muestra que básicamente cinco argumentos se destacan que manifiestan la relevancia de utilizar la modelización matemática como estrategia de enseñanza (Bassanezi, 2002):

Argumento formativo

Los procesos de modelización matemática permiten estimular el interés por el descubrimiento y la creatividad, y adquirir confianza en las capacidades y recursos propios. Destacando de esta forma el aspecto formativo de la Matemática.

Argumento de competencia crítica

En una sociedad cada vez más influenciada por las matemáticas, mediante sus aplicaciones y modelos, es oportuno desarrollar entre los alumnos una competencia crítica que les permita intervenir en la sociedad como ciudadanos activos y puedan contribuir a la resolución de problemas relevantes. La competencia crítica debe entenderse como una capacidad de reconocer, comprender, analizar y validar el uso de la Matemática en el contexto real.

Argumento de utilidad

Prepara al estudiante para utilizar la matemática como herramienta para resolver problemas de la vida diaria y de otras áreas. Este argumento sostiene que la habilidad para activar la matemática en las situaciones extra-matemáticas no resulta automáticamente de dominar la matemática de pura sino que requiere algún grado de preparación y entrenamiento, es decir que la capacidad de aplicar los conocimientos matemáticos que se han adquirido en las situaciones del mundo social no proviene del hecho de haber adquirido una formación abstracta.

Visión de las matemáticas

Presentar las matemáticas relacionadas con otras áreas de conocimiento, ayudan a que los estudiantes adquieran destrezas e interioricen conceptos y métodos matemáticos. Además, los motiva en el estudio de situaciones interesantes que pueden ser exploradas, estableciendo un cuadro comprensivo de la matemática en todas sus facetas, como una ciencia, como un campo de actividad en la sociedad y la cultura.

Argumento psicológico

La incorporación de aplicaciones matemáticas en el currículum puede conseguir que los conceptos matemáticos tengan para el estudiante un protagonismo mental. De esta manera, la capacidad de usar un concepto matemático incluye alguna cosa más que simples conocimientos de este concepto. Este trabajo también contribuye a entrenar a los estudiantes para pensar matemáticamente, seleccionar y realizar las técnicas matemáticas dentro de y fuera de la matemática.

Estos aspectos metodológicos se estructuran trabajando con modelización de situaciones reales, en los cuales el estudiante aprende los conceptos y no es un mero espectador en la adquisición de conocimientos. De una manera dirigida, a partir de situaciones reales, va asumiendo protagonismo en el proceso de aprendizaje.

Desde esta perspectiva, se reconoce su importancia como estrategia metodológica pertinente para el desarrollo de capacidades y habilidades necesarias en el mundo actual. Por lo tanto, ofrecer situaciones concretas permite organizar e interpretar información y datos; describir relaciones matemáticas; enfrentar problemas con soluciones múltiples; entender la aplicabilidad de los conceptos y procesos; analizar e interpretar problemas a través de la matemática; entender nuevas ideas; incorporar conocimientos; asimilar información, y adaptarse a los cambios tecnológicos y científicos.

Asimismo, se considera que el trabajo con modelización matemática como estrategia de enseñanza posibilita la formación del pensamiento globalizado, que se concibe como el proceso de búsqueda de las relaciones que pueden establecerse o encontrarse en torno a un tema. Tal aspecto es muy importante en la formación de los alumnos, ya que se pretende desarrollar un sentido, una visión en la forma de

relacionarse con la nueva información que haga que su aprendizaje vaya siendo relacional y comprensivo (Alsina, 1998; Aravena, 2001).

Algunas justificaciones para la utilización de la Modelización Matemática son enumeradas por Silveira & Ribas (2004, p. 1, parte 2):

- Motivación de los alumnos y del propio profesor.
- Facilitar el aprendizaje. El contenido matemático pasa a tener mas significado, deja de ser abstracto ya pasa a ser concreto.
- Preparación para la profesión.
- Desarrollo del raciocinio lógico y deductivo en general.
- Desenvolvimiento del alumno como ciudadano crítico y transformador de su realidad.
- Comprensión del papel socio-cultural da matemática, tornándola así más importante.

Nuestra experiencia

La experiencia se llevó a cabo en el año 2010 con un grupo de 38 alumnos que comenzaban la cursada de la asignatura Matemática de la carrera Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. El docente responsable del curso no contaba con experiencia previa en modelización, como tampoco la tenían los alumnos.

El objetivo central de la experiencia es generar un ambiente de aprendizaje en el cual el empleo de la modelización matemática trascienda la mera aplicación de modelos matemáticos y donde el planteo de problemas y la creación de modelos, por parte de los propios estudiantes, son fundamentales al pasar de ser sujetos pasivos a ser activos en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el propósito de una mejor asimilación del contenido matemático.

Los objetivos de enseñanza que se plantean son:

- Asociar la matemática con otras ciencias
- Desarrollar habilidades tales como identificar y plantear problemas, analizar e interpretar datos, crear y validar modelos.
- Relacionar los conocimientos matemáticos y las habilidades adquiridas con la situación problemática presentada.

El rol de docente se limitó a estimular a los alumnos a presentar distintos abordajes del problema y ayudarlos en la construcción de relaciones matemáticas en cada etapa del proceso de aprendizaje.

Las actividades se desarrollaron en dos etapas o sesiones. En la primera instancia se identifican y planten problemas. En la segunda etapa, una vez definido el tema y formulado el problema, los estudiantes comenzaron a construir un modelo matemático para dar cuenta del mismo. Los 38 alumnos se distribuyeron en grupos de 3 o 4 integrantes. Todos los grupos presentaron un informe escrito.

Para el análisis posterior de las actividades desarrolladas por los alumnos se utilizaron las producciones de los alumnos y las anotaciones realizadas por una de las autoras de este trabajo, presente en carácter de observadora no participante.

Primera Sesión

El profesor a cargo del dictado de la asignatura Matemática entregó a los alumnos reunidos en grupos de 3 o 4 un folleto sobre piletas de natación El docente pensó que esta situación podría implicar a los estudiantes en el análisis de la presencia de la Matemática en la sociedad y decidió llevarla a cabo.

Los alumnos deberían encontrar sus propias preguntas correspondientes a la situación de la vida real dada. Por ello, las consignas que dio a sus alumnos fueron las siguientes:

- Piensa en por lo menos dos cuestiones matemáticas significativas para el texto y responde a ellas mediante un cálculo.
- Acuerda con el grupo cuáles preguntas serán escritas en el pizarrón.
- Resuelve las preguntas propuestas por los otros grupos.

Algunas de las preguntas que desarrollaron los distintos grupos son:

¿Cuánta agua necesitamos para llenar la pileta?

Si la pileta se llena a través de dos cañerías de agua, cada una de ellos proporciona 20 litros de agua por minuto. El agua cuesta 2 $ por el metro cúbico ¿Cuánto costará llenar la pileta?

¿Cuánto tiempo tarda en llenarse?

¿Cuántas personas deben estar al mismo tiempo en la pileta para que el agua vierta encima del borde?

¿Cuánta lona se necesita para tapar la piscina, si es cilíndrico?

¿Cuánto cuesta si usted llena 170 litros en la piscina?

¿Cuánto tiempo toma para limpiar la piscina si una bomba puede bombear 175 litros por hora?

¿Qué cantidad mínima de azulejos se necesitan para revestir toda la pileta?

Con esta tarea de formular sus propias preguntas los alumnos lograron involucrarse personalmente en la tarea. Cada grupo trató de encontrar una pregunta "difícil" que no sólo los demás alumnos deberían contestar sino ellos mismos.

Segunda sección

Reportaremos parte del trabajo de elaborado por un grupo de cuatro alumnos. Ellos comienzan dando respuesta a la pregunta: ¿Cuánta agua se necesita para llenar la pileta?

Cabe resaltar que en el anuncio entregado por el profesor sobre piletas de natación no se dice al usuario cuánta agua tiene que usarse para llenar cada uno de los diseños que se muestran.

Uno de los diseños mostrados en el folleto (ver figura 1) tiene un radio de 2.8 metros y una profundidad de 1.2 metros. La distancia entre la superficie de agua y el borde de la piscina es 0.06 metros, entonces haciendo uso de la fórmula de volumen de un cilindro calcularon la cantidad de agua que se necesitaba para llenar la pileta.

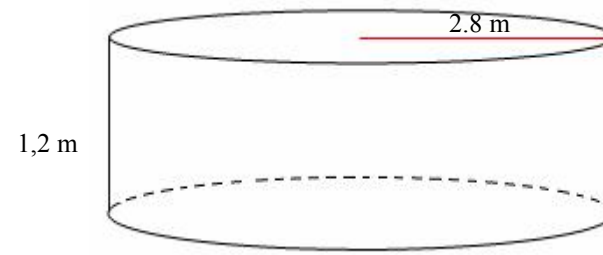

Figura 1

El punto de partida es la presentación de una situación no matemática, extraída de la vida diaria, susceptible de ser formulada en términos matemáticos. Los estudiantes tienen un problema que han deben modelar y resolver. La única información de que disponen los alumnos es la que aparece en el folleto proporcionado por el profesor.

Ellos consideraron que "los lados de la piscina son rectos." Entonces empezaron discutiendo la fórmula para calcular el volumen de la piscina para el posible nivel más alto de agua. Esto es, vincularon con el conocimiento matemático ya existente.

Y comenzaron el proceso de matematización usando la fórmula para calcular el volumen. Usaron su calculadora para conseguir un resultado que estaba en metros cúbicos. Como esta unidad de medida no era útil para validar su resultado, expresaron su resultado en litros. Luego la compararon con un cubo de $1\,m$ de arista y decidieron que su solución era posible.

Según este análisis de la tarea se identificaron claramente todas las fases de la modelización en el trabajo de los estudiantes

También consideraron otros de los diseños de pileta que aparecían en el anuncio (ver figura 2).

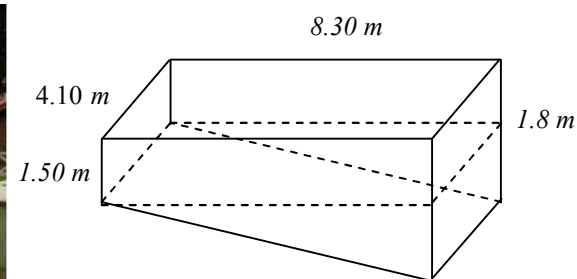

Figura 2

Primero observaron que la piscina mostrada en la figura 2, está conformada por dos secciones diferentes: en los 150 primeros centímetros de profundidad se tiene un paralelepípedo recto rectangular (una caja de caras rectangulares) y en la parte restante se tiene una forma de prisma con caras rectangulares y triangulares. En una primera etapa quisieron averiguar el volumen total de la pileta.

Vol. del prisma (base rectangular):

$$(4.10m \times 8.30m) \times 1.50m = 51.045\ m^3$$

Vol. del prisma (base triangular):

$$\left(\frac{0.3m \times 8.30m}{2}\right) \times 4.10m = 5.1045\ m^3$$

Vol. Total:

$$51.045\ m^3 + 5.1045\ m^3 = 56.1495\ m^3$$

Cantidad de agua necesaria: 56149.5 l.

Consideraron conveniente posteriormente, expresar el volumen V del agua contenida en la pileta (cuando ésta no está necesariamente llena) en función de la altura h, medida a partir de la parte más profunda de dicha pileta.

A continuación proporcionamos el modelo que representa el volumen (V) de la pileta en función del nivel de agua que hay en ella (h):

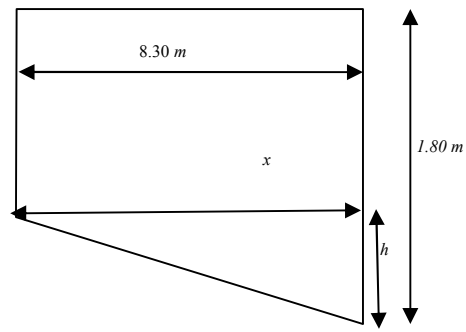

Figura 3 – a)

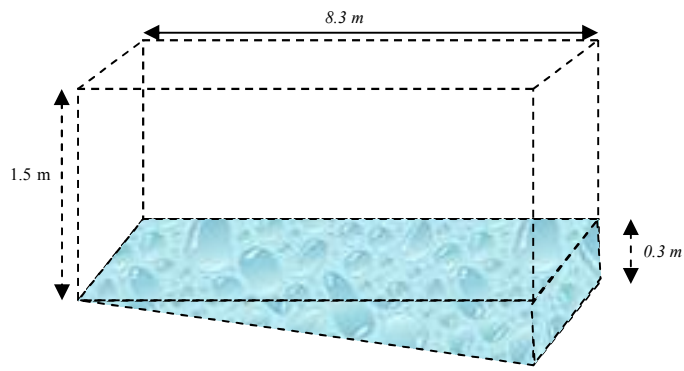

Figura 3 – b)

En la figura 3-b) vemos la porción de la piscina que está llena de agua (parte sombreada) y que tiene un volumen V_1. Este grupo propuso la siguiente forma de calcular dicho volumen:

V_1 = (área del triángulo rectángulo de catetos x, h)(anchura de la piscina) $= \dfrac{x\,h}{2} \times 4.10$.

Es decir:

$$V_1 = 2.05\, x\, h$$

En la figura 3- a) vemos una proyección de la piscina donde, por semejanza de triángulos, se cumple que

$$\frac{x}{h} = \frac{8.3}{0.3} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{83}{3} \Rightarrow x = \frac{83}{3} h$$

Entonces,

$$V_1 = 2.05\, x\, h = 2.05\left(\frac{83}{3} h\right) h = \frac{3403}{60} h^2$$

Es decir: $V_1(h) = \dfrac{3403}{60} h^2$ para $0 \le h \le 0.3$.

Nótese que el volumen de todo el semiparalelepípedo es

$$V_p = V_1(0.3) = \frac{3403}{60} 0.3^2 = 5.1045$$

En una segunda etapa, cuando el semiparalelepípedo ya fue rebasado por el agua, vemos lo siguiente:

Ahora la porción de la piscina llena de agua está conformada por el semiparalelepípedo que tiene un volumen

$$V_p = 5.1045\,\mathrm{m}^3$$

y por un paralelepípedo recto rectangular con una altura igual a $h - 0.3$ y un volumen V_c dado por

$$V_c = (\text{largo})(\text{ancho})(\text{altura}) = (8.3)(4.1)(h - 0.3)$$
$$V_c = 34.03 \times (h - 0.3) = 34.03h - 10.209$$

Entonces, el volumen de toda la porción de la piscina que está llena de agua hasta una altura h es

$$V_2 = V_p + V_c = 5.1045 + (34.03h - 10.209) = 34.03h - 5.1045$$

Es decir: $V_2(h) = 34.03(h - 1.5)$ para $0.3 < h \leq 1.8$.

3. Por lo tanto el volumen V en función de h es

$$V(h) = \begin{cases} \dfrac{3403}{60} h^2 & si\ 0 \leq h \leq 0.3 \\ 34.03(h - 1.5) & si\ 0.3 \leq h \leq 1.8 \end{cases}$$

Con respecto a lo que significa trabajar con modelos matemáticos y procesos de modelización, debemos resaltar la forma en que el grupo pasó por las diferentes etapas:

1) *Interpretación de datos y condiciones del problema:* Mediante este problema concreto, los estudiantes identificaron las restricciones y condiciones del problema. Utilizaron diferentes sistemas de representación para describir el fenómeno, con lo que pudieron transitar de una representación a otra.

2) *Matematización:* Los estudiantes describieron relaciones matemáticas que interpretaban el problema, desarrollaron algoritmos y propiedades, así como formularon el modelo matemático que daba repuesta a la situación.

3) *Validación y verificación del modelo:* Los alumnos pudieron establecer una relación entre el comportamiento del modelo y el problema real, evaluando datos del dominio; además, instauraron predicciones mediante la evaluación de nuevos datos, adecuándose a las condiciones del problema. En un proceso de modelización tal aspecto es importante porque permite validar el modelo que explique nuevos datos, ya sea de manera exacta o muy aproximada.

Los estudiantes analizan a menudo modelos ya existentes, como una aplicación de la matemática estudiada. En este trabajo se muestra además la elaboración de "modelos activos" es decir, los alumnos crearon un modelo real mediante la identificación de los objetos que son de interés y sus relaciones (simplificación).

Luego, esto tiene que ser traducido a un modelo matemático (matematización), posteriormente se encuentra una solución al modelo. La solución y el proceso general se valida en el mundo real (por ejemplo, en comparación con los datos reales obtenidos por la observación o ensayos). Se critica al modelo, en sí mismo y frente a las posibles alternativas.

Además hay una componente de investigación: el estudiante ha de recoger información con el fin de desarrollar las actividades propuestas, de esta forma se pretende que el alumno tome contacto con el mundo extra-académico y se preocupe de recoger información en el contexto real. Seguidamente se inicia un proceso de investigación por parte de los alumnos y que a menudo necesitaran la ayuda del profesor.

Análisis de la experiencia y conclusiones

Del análisis de la experiencia concluimos que la utilización de la modelización matemática como estrategia pedagógica pudo tornar el aprendizaje más significativo, pues es posible percibir la relación entre la matemática y el mundo real.

Estar implicado en un tema de la vida real motiva a los estudiantes para trabajar y pensar independientemente. Además, tienen que utilizar su conocimiento anterior sobre contenidos matemáticos y relacionarlos con situaciones de la vida real. Para convencer a los demás de su modelo matemático y de sus soluciones, es esencial que los estudiantes interactúen, acuerden y discrepen.

Esta forma de trabajo permite que adquieran una visión integrada de la matemática, reconozcan su utilidad para resolver problemas del medio, además de que comprendan y valoran la utilidad de los conceptos y procesos. Dicho aspecto cobra relevancia porque una de las dificultades en el aprendizaje de la matemática radica en la comprensión y la utilidad de los conceptos cuando se presentan fuera de contexto.

También este tipo de trabajo fomenta la expresión de ideas, permite acceder a la información y adquirir elementos de juicio para opinar críticamente sobre los acontecimientos que se exponen. En tal sentido, usar como estrategia pedagógica la modelización matemática ha sido positivo para el grupo, ya que les ha ofrecido la posibilidad de desarrollar sus potencialidades al enfrentarse a un problema real, cercano a su entorno, y utilizar el conocimiento matemático disponible.

Dentro de las implicaciones didácticas, podemos señalar que un trabajo de este tipo:

- Ofrece una visión integrada de la Matemática que permite comprender y valorar la utilidad de los conceptos y procesos. Al trabajar los contenidos con problemas concretos incorporando la modelización de situaciones y el trabajo en grupo como integración del contenido, se enriquece el trabajo matemático del aula y esto además permite el desarrollo de capacidades y habilidades matemáticas necesarias para el mundo actual.

- La modelización matemática es una buena herramienta para la enseñanza / aprendizaje de la Matemática. En este tipo de experiencias se plasma el papel relevante de la modelización matemática como perspectiva adecuada y pertinente para estudiantes de carreras no matemáticas.
- En el ámbito cognitivo podemos establecer el protagonismo adquirido por el aprendizaje de los alumnos que asumen el papel de actores en su propio aprendizaje.
- En los procesos de modelización se evita la carga de formalismos apostando por un aprendizaje más intuitivo y próximo a las situaciones planteadas.
- Da significado a los conceptos y métodos matemáticos, apreciando la aplicabilidad de los conceptos, la utilidad de las representaciones gráficas y de la manipulación algebraica en la descripción matemática del fenómeno en estudio.
- Realza el aspecto formativo de la matemática, estimulando el interés por el descubrimiento y la creatividad.
- Fortalece el trabajo en equipo, fomentando el debate y a la vez potenciando el sentido crítico.

Referencias Bibliográficas:

Alsina, C. (1998). Neither a microscope nor a telescope, just a mathscope. Proceed. International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) 1997.

Aravena, M. (2001). Evaluación de proyectos para un curso de álgebra universitaria. Un estudio basado en la modelización polinómica. Tesis de doctorado, Universidad de Barcelona, España.

Bassanezi, R. C. (2002) Ensino aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia", São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. S, Hein, N. (2003) Modelagem Matemática no Ensino;3ª ed – São Paulo: Contexto.

Silveira, J. C.; Ribas, J. Discussões sobre Modelagem Matemática e o Ensino-Aprendizagem. Só Matemática**.** Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a8>.