# EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA.

**Horacio J. Aguerre[a], Facundo Bre[a], Mario R. Escalante[a,b], Omar R. Faure[a,b], Viviana C. Rougier[a,b]**
[a]Facultad Regional Concepción del Uruguay, [b]Facultad Regional Concordia,
Universidad Tecnológica Nacional, Argentina
Hora_aguer@hotmail.com, facubre@hotmail.com,
mescalante@frcu.utn.edu.ar, ofaure@frcu.utn.edu.ar, rougierv@frcu.utn.edu.ar
Aplicaciones de la Matemática

**Palabras claves**: Método de los elementos finitos, metodología de la enseñanza, Cálculo Numérico

**Resumen**

En las últimas décadas ha habido grandes avances en las tecnologías disponibles como medios auxiliares para la enseñanza. En este trabajo se propone una metodología para la enseñanza del Método de los Elementos Finitos (MEF) con ayuda de un sistema de álgebra computacional (SAC) y una herramienta computacional de análisis por elementos finitos. La propuesta está dirigida a un curso de Cálculo Numérico de las carreras de Ingeniería Civil e Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica Nacional. Se introduce el MEF en problemas elípticos mostrando las equilvalencias entre las formulaciones diferencial (fuerte), variacional (débill) y de minimización. Se ilustra la metodología propuesta con algunos ejemplos de aplicación.

## 1. INTRODUCCIÓN

La formulación de modelos matemáticos en ingeniería lleva generalmente a ecuaciones diferenciales o integrales. Solamente en los casos más simples es posible encontrar soluciones analíticas exactas de las ecuaciones para el modelo, y en general es necesaria la ayuda de técnicas numéricas para encontrar soluciones aproximadas. El método de los elementos finitos (MEF) es una técnica para hallar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales muy difundida y utilizada hoy en día en ingeniería para problemas de ingeniería estructural, resistencia de materiales, mecánica de fluidos, ingeniería nuclear, electromagnetismo, propagación de ondas, conducción de calor, procesos de convección-difusión, circuitos integrados, ingeniería de petróleo, procesos de reacción-difusión,etc.

El Cálculo Numérico en la actualidad, es una parte esencial de la educación matemática para ingenieros. En el pasado la enseñanza se basaba prácticamente por completo en la tiza y el pizarrón, y los ejemplos podían ser resueltos a mano, para trasmitir las ideas y conceptos principales de los temas. Con el advenimiento de las computadoras y de poderosos softwares matemáticos, se hizo imperativo reconsiderar la manera en que se enseñaba el Cálculo Numérico. Los gráficos en colores hacen posible representar curvas, superficies y sólidos en dos y tres dimensiones de una forma que es tanto más efectiva como motivadora para los estudiantes, quienes debido a los actuales planes de estudio, no tienen mucha experiencia en geometría del sólido.

A través del software también es posible interactuar formalmente con la computación y la programación. Los ejercicios con lápiz y papel en un curso clásico de Cálculo Numérico dan una valorable experiencia en el trabajo simbólico, pero ellos son frecuentemente bastante artificiales. Con el uso del software es que, a través de la experiencia, los alumnos son capaces de comprender e implementar algunas de las técnicas numéricas. El uso de la tecnología ayuda a perderle miedo a la matemática y por otra parte motiva a los estudiantes a jugar con las herramientas de matemática para lograr respuestas en la resolución de problemas.

Aquí se propone el uso de un sistema computacional algebraico en el aula (Maple®, [1]), conjuntamente con un software libre de análisis mediante elementos finitos (LISA[2]) como una herramienta interactiva en la enseñanza, que ayuda a los estudiantes a ganar confianza y destreza en el manejo de ciertos problemas matemáticos. Se pretende que los alumnos conozcan las bases matemáticas del MEF para problemas de campos escalares como técnica numérica para la solución aproximada de ecuaciones diferenciales con valores en el contorno, y a través de la resolución de ejemplos sencillos del campo de la mecánica de estructuras y de electromagnetismo, comprendan los aspectos de implementación involucrados en el mismo para el desarrollo de un algoritmo computacional.

Maple es una potente herramienta, tecnológicamente avanzada, que incorpora algoritmos simbólicos propios reconocidos en todo el mundo. Cualquiera que sea el área científica o técnica en la que se esté trabajando, ya sea en el ámbito de la enseñanza, en el de investigación o en desarrollo, Maple es un entorno ideal que cubre todos los aspectos necesarios. Incorpora herramientas suficientemente flexibles para ajustarse a todas las necesidades de cálculo: desde la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales hasta el modelado de complejos problemas de ingeniería.

LISA es un paquete de análisis mediante elementos finitos de uso libre y gratuito, que posee una interface fácil de usar. Posee un amplio rango de aplicabilidad en diferentes áreas tales como análisis de mecanismos y estructuras, transferencia de calor, problemas de electromagnetismo, entre otros.

## 2. El MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El MEF por novedoso que parezca, tiene ya varios años en su forma conceptual, sin embargo el desarrollo moderno de esta técnica comienza en la década de los '40, específicamente en el campo de la ingeniería estructural con los trabajos de Hrennikoff [3], McHenry [4] y Courant [5]

Desde sus comienzos han existido dos vías de desarrollo en los elementos finitos. Los ingenieros han estado más preocupados por las aplicaciones que por resolver las dificultades matemáticas, quizá la obra pionera en esta dirección sea el libro de Zienkiewicz [6]. Por otra parte, los matemáticos se han ocupado fundamentalmente de estudiar la parte teórica del método, por lo general relacionados con el estudio de los errores y la convergencia, el libro de Strang & Fix [7] fue pionero en esta otra dirección.

En los últimos años, debido a los avances informáticos, el MEF ha tenido un gran desarrollo y ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas ingenieriles, físicos, etc., ya que permite resolver problemas que algún tiempo atrás eran prácticamente imposibles de abordar por métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a realizar prototipos, ensayarlos e ir mejorándolos de forma iterativa, lo que traía consigo un elevado coste tanto económico como en tiempo de desarrollo.

Han sido precisamente los avances informáticos los que han puesto a disposición de los usuarios gran cantidad de paquetes computacionales que permiten realizar cálculos con elementos finitos. Sin embargo, el manejo correcto de este tipo de herramientas exige un profundo conocimiento no solo del material con el que se trabaja, sino también de los principios del MEF. Solo en este caso estaremos en condiciones de garantizar que los resultados obtenidos en los análisis se ajustan a la realidad.

### 2.1. Formulación variacional de un modelo de problema unidimensional

Considérese el siguiente problema de valores de borde

$$(D) \quad \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $u''$ y $f$ son funciones continuas. Integrando la ecuación $-u'' = f$ dos veces, es fácil ver que este problema tiene solución única $u$. Como se explica en [8] el problema (D) modeliza los desplazamientos axiales de una barra de longitud unitaria fijada en los extremos y sometida a una carga tangencial o la temperatura de un modelo de conducción térmica con una fuente de calor de intensidad $f(x)$. También puede interpretarse como el potencial eléctrico en un cualquier punto entre dos placas en un medio homoegéneo.

Se puede demostrar (se omite aquí por razones de espacio) que la solución $u$ del problema diferencial (D) es también solución de un problema de minimización (M) y de un problema variacional (V). Para formular los problemas (M) y (V) se introduce la siguiente notación:

$$(v, w) = \int_0^1 v(x)w(x)dx, \tag{2}$$

para funciones acotadas continuas a trozos.

Considérese también el siguiente espacio vectorial

$$\mathrm{V} = \{ v : v \text{ es continua en } [0,1],\ v' \text{ es continua a trozos y acotada en } [0,1], \text{ y } v(0) = v(1) = 0 \},$$

y el funcional lineal $F : \mathrm{V} \to \mathrm{R}$ dado por

$$F(v) = \frac{1}{2}(v', v') - (f, v). \tag{3}$$

Los problemas (M) y (V), se definen entonces, de la siguiente manera

(M) Encontrar $u \in \mathrm{V}$ tal que

$$F(u) \le F(v) \quad \forall v \in \mathrm{V}. \tag{4}$$

(V) Encontrar $u \in \mathrm{V}$ tal que

$$(u', v') = (f, v) \quad \forall v \in \mathrm{V}. \tag{5}$$

Para problemas de mecánica, la cantidad $F(v)$ representa la energía potencial total asociada con el desplazamiento $v \in \mathrm{V}$. El término $\frac{1}{2}(v', v')$ representa la energía elástica interna de deformación y $(f, v)$ energía potencial de carga. De este modo, la minimización del problema (M) corresponde al Principio de mínima energía potencial. Por otra parte el problema variacional (V) corresponde al Principio de los Trabajos Virtuales.

### 2.2. MEF con funciones lineales continuas a trozos

La idea general de cualquier método numérico es discretizar, si en las diferencias finitas se reemplazan las derivadas por cocientes en diferencias, en los elementos finitos (FEM) el factor esencial es que la integral de una función se puede escribir como suma de integrales en dominios disjuntos cuya unión es el dominio original, entonces se puede hacer un análisis local del problema y haciendo los dominios suficientemente pequeños se pueden elegir funciones sencillas que sean adecuadas para una buena representación del comportamiento de la solución.

Se construye el subespacio $\mathrm{V_h} \subset \mathrm{V}$ de dimensión finita constituido de funciones lineales a trozos. Para ello, sea $0 < x_0 < x_1 < \cdots < x_M < x_{M+1} = 1$, una partición del intervalo $(0,1)$ en subintervalos $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ de longitud $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1,...,M+1$ y sea $h = \max h_j$. La cantidad $h$ es entonces la medida de cuan fina es la partición. $\mathrm{V_h}$ es el conjunto de funciones $v$ tal que $v$ es lineal sobre cada subintervalo $I_j$, $v$ es continua en $[0,1]$ y $v(0) = v(1) = 0$. Como puede observarse $\mathrm{V_h} \subset \mathrm{V}$. En la Fig. 1 se muestra un ejemplo de una función $v \in \mathrm{V_h}$. Como parámetros para describir la función $v \in \mathrm{V_h}$ se pueden elegir los valores $\eta_j = v(x_j)$ en los puntos nodales $x_j = 0,...,M+1$.

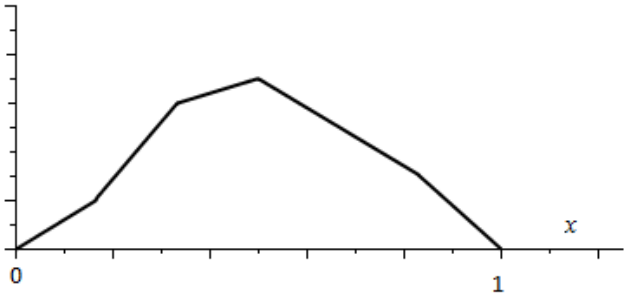



Figura 1: Ejemplo de una función $v \in \mathrm{V_h}$

Sea las funciones bases $\varphi_j \in \mathrm{V_h}$, $j = 1,..,M$ definidas como

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}, \; i, j = 1,..,M, \tag{6}$$

esto es, $\varphi_j$ es una función continua lineal a trozos que toma el valor 1 en el punto nodal $x_j$ y el valor 0 en los restantes puntos nodales (Fig. 2).

Una función $v \in \mathrm{V_h}$ tiene luego una representación de la forma

$$v(x) = \sum_{i=1}^{M} \eta_i \varphi_i(x), \qquad x \in [0,1] \tag{7}$$

donde $\eta_i = v(x_i)$. De este modo, cada $v \in \mathrm{V_h}$ se puede expresar unívocamente como combinación lineal de las funciones bases $\varphi_i$. Se tiene entonces que $\mathrm{V_h}$ es un espacio vectorial de dimensión $M$ con base $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$.

El MEF para problemas de valores de borde (D) puede ahora formularse como sigue:

($\mathrm{M}_h$): Encontrar $u_h \in \mathrm{V_h}$ tal que $F(u_h) \leq F(v) \quad \forall v \in \mathrm{V_h}$.

De la misma manera que para los problemas (M) y (V), se tiene que ($\mathrm{M}_h$) es equivalente al problema variacional de dimensión finita ($\mathrm{V_h}$): Encontrar $u_h \in \mathrm{V_h}$ tal que

$$(u_h', v') = (f, v) \quad \forall v \in \mathrm{V_h}. \tag{8}$$

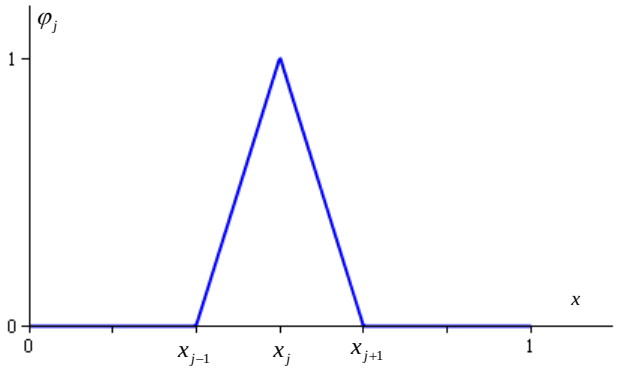



Figura 2: Función base $\varphi_j$

El MEF para problemas de valores de borde (D) puede ahora formularse como sigue:

($\mathrm{M}_h$): Encontrar $u_h \in \mathrm{V_h}$ tal que $F(u_h) \leq F(v) \quad \forall v \in \mathrm{V_h}$.

De la misma manera que para los problemas (M) y (V), se tiene que ($\mathrm{M}_h$) es equivalente al problema variacional de dimensión finita ($\mathrm{V_h}$): Encontrar $u_h \in \mathrm{V_h}$ tal que

$$\left(u_h', v'\right) = (f, v) \quad \forall v \in \mathrm{V_h}. \tag{9}$$

De este modo el MEF para el problema diferencial (D) se puede formular como ( $\mathrm{V_h}$ ) o su equivalente ( $\mathrm{M}_h$ ). El problema ( $\mathrm{V_h}$ ) es conocido generalmente como método de Galerkin y ( $\mathrm{M}_h$ ) como método de Ritz. Obsérvese que si $u_h \in \mathrm{V_h}$ satisface la Eq. (9), entonces en particular

$$\left(u_h', \varphi_j'\right) = \left(f, \varphi_j\right) \qquad j = 1, \ldots, M, \tag{10}$$

y si estas ecuaciones se cumplen, teniendo en cuenta que

$$u_h = \sum_{i=1}^{M} \xi_i \varphi_i(x), \qquad \xi_i = u_h(x_i), \tag{11}$$

la Eq. (10) se puede escribir

$$\sum_{i=1}^{M} \xi_i \left(\varphi_i', \varphi_j'\right) = \left(f, \varphi_j\right) \qquad j = 1, \ldots, M, \tag{12}$$

que es un sistema lineal de $M$ ecuaciones con $M$ incógnitas $\xi_1, \ldots, \xi_M$. En forma matricial el sistema dado por la ecuación (12) puede escribirse como

$$\mathrm{K}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}, \tag{13}$$

donde $\mathrm{K} = (k_{ij})$ es una matriz $M \times M$ con elementos $k_{ij} = (\varphi_i', \varphi_j')$. $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots \xi_M)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_M)$ con $b_i = (f, \varphi_i)$ son vectores $M$-dimensionales:

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{M1} & \cdots & k_{MM} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

La matriz K es conocida como matriz de rigidez y **b** como vector de carga, terminología que proviene de las primeras aplicaciones del MEF en mecánica estructural. Además, la matriz K es simétrica y definida positiva y por lo tanto es no singular, con lo cual el sistema lineal dado por la Eq. (13) tiene solución única.

### 2.3. Estimación del error del MEF

Para estudiar el error del método que es $u - u_h$, restando las ecuaciones (5) y (9) se obtiene el siguiente resultado de ortogonalidad

$$\left((u_h - u)', v'\right) = 0 \quad \forall v \in \mathrm{V_h}, \tag{14}$$

que se utiliza para demostrar que $u_h$ minimiza la norma de la derivada del error en $\mathrm{V_h}$. Una estimación del error viene dada por

$$\left|u(x) - u_h(x)\right| \le h . \max_{0 \le x \le 1} \left|u''(x)\right| \quad \forall x \in [0,1], \tag{15}$$

que demuestra la convergencia porque el error tiende a cero cuando el diámetro de la partición tiende a cero pues la derivada segunda de la solución (dato del problema) es una función acotada.

## 3. EJEMPLO

Se ilustra seguidamente la metodología a partir del problema (D) dado por la Eq. (1), cuya solución analítica se obtiene integrando dos veces la ecuación diferencial e imponiendo luego las condiciones de borde. Adoptando $f(x) = 1$, la solución general de (D) es

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \tag{16}$$

cuya gráfica se muestra en la Fig. 3.

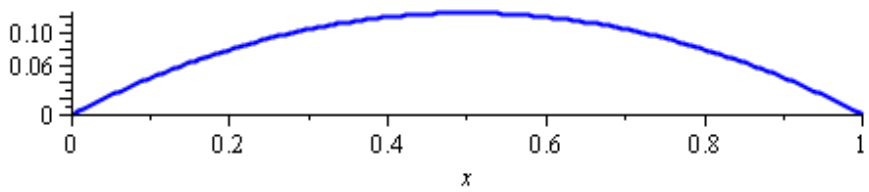



Figura 3: Solución del problema diferencial (D)

### 3.1. Implementación del MEF en Maple

Se adopta una partición regular del dominio de 6 puntos $(M = 6)$, *i.e.* 5 elementos y 6 nodos, siendo $h_j = 0.2,\ j = 1, \ldots, 5$. En la Fig. 4 se muestra la discretización del dominio, donde se indica el número de elemento (en azul) y el número de nodo (en rojo)

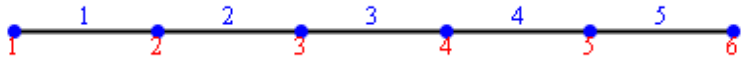



Figura 4. Dominio discreto. 5 elementos y 6 nodos.

Se construyen luego las funciones bases $\varphi_j$, mostradas en la Fig. 5.

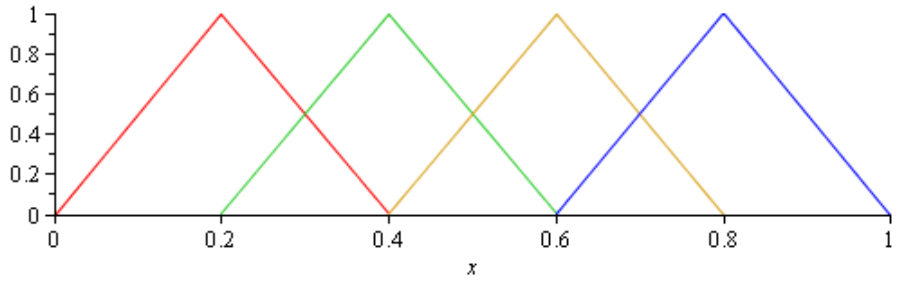



Figura 5: Funciones bases $\varphi_j$ lineales a trozos.

De la formulación variacional discreta (Eq. (9)) se obtienen la matriz de rigidez K y el vector de cargas **b**.

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Finalmente, resolviendo el sistema lineal $\mathrm{K}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{b}$ (Eq. (13) se obtienen los valores numéricos aproximados de la solución en los nodos:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} 0.80 \\ 0.12 \\ 0.12 \\ 0.80 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

En la Fig. 6 se muestra la solución aproximada obtenida mediante el MEF implementado en MAPLE con una subdivisión del dominio en 5 elementos.

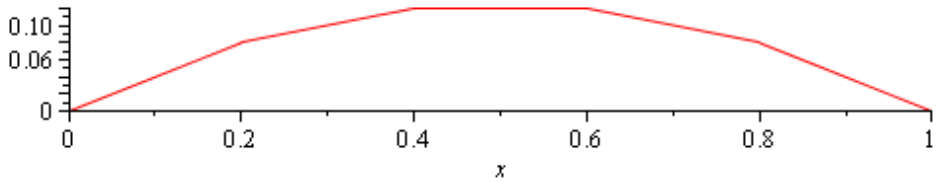



Figura 6: Solución aproximada $u_h$

A fines comparativos, se ilustra en la Fig. 7 la solución aproximada obtenida con MEF conjuntamente con la solución analítica exacta del problema diferencial.

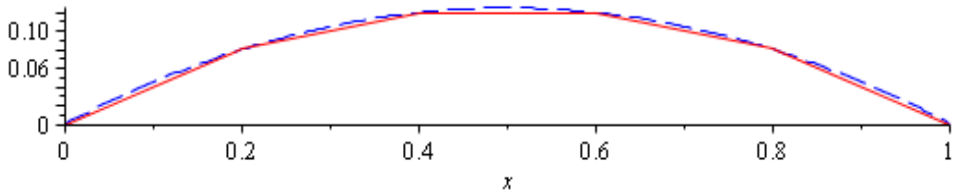



Figura 7: Solución analítica exacta (línea a trazos) y solución aproximada (línea continua)

En el ejemplo analizado, se consideraron condiciones de bordes homogéneas del tipo Dirichlet, esto es, $u(0) = u(1) = 0$. Sin embargo, la implementación es la misma para el caso de condiciones de borde tipo Dirichlet no homogéneas. Condiciones de borde no homogéneas, surgen entre otros casos, al modelar por ejemplo, un problema de electrostática en el cual dos placas delgadas conductoras paralelas entre sí y perpendiculares al eje *x* están separadas una distancia *d* como se observa en la Fig. 8. La placa de la izquierda es mantenida a un poten-

cial constante $V(0)=V_0$ y la segunda placa es mantenida a un potencial $V(d)=0.$ La región entre las placas está constituida por un medio no magnético que possee una permisividad relativa $\varepsilon_r$ y una densidad de carga volumétrica uniforme $\rho_v(x)=-\rho_0$. La distribución del potencial en cualquier punto entre las dos placas, para un medio homogéneo, lineal, e isótropo ($\varepsilon_r=$ cte , $\varepsilon_0$ : permisividad del vacío) , es gobernado por la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} V''(x)=\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0} & \text{si } 0\le x\le d \\ V(0)=0, V(d)=1 \end{cases} \tag{19}$$

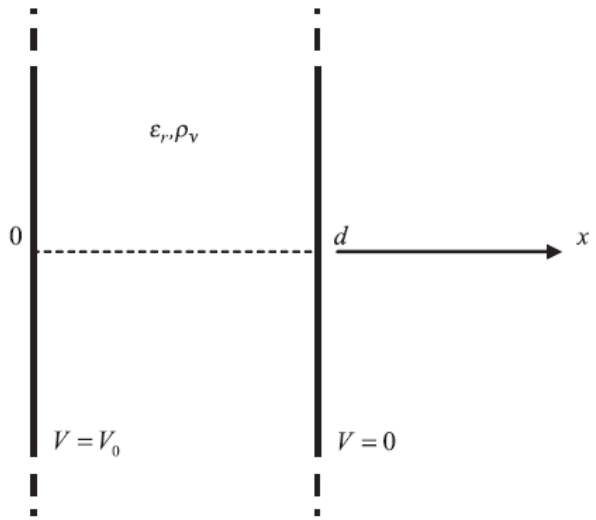



Figura 8: Geometría de un problema de valores de borde electrostático

Para otras condiciones de borde, por ejemplo $u(0)=0,\ u'(1)=0$, en donde en el extremo derecho se tiene una condición de borde del tipo Neuman, el problema tiene un grado de libertad más (incógnita) que corresponde a la solución aproximada en $x=1.$ Debe considerarse entonces una función base adicional $\varphi_{M+1}$ para el nodo M+1 (Fig. 9).

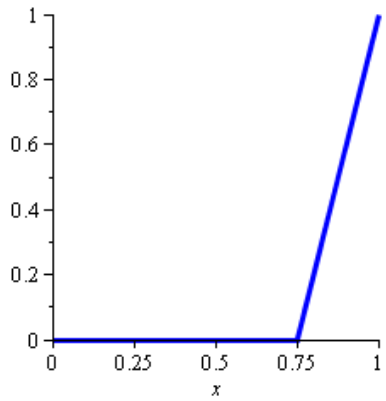



Figura 9: Función base $\varphi_{M+1}$

### 3.2. Implementación del MEF en LISA

El problema diferencial resuelto anteriormente surge también de modelar el problema unidimensional de una barra elástica empotrada en sus extremos y sometida a una carga distribuida uniforme en dirección tangencial (Fig. 10), en la que se adoptan los siguientes datos: $A=1\text{m}^2$ (sección transversal), $E=1\text{N/m}^2$ (módulo de elasticidad), $L=1\text{m}$ (longitud).

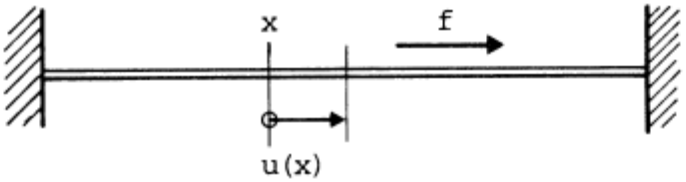



Figura 10: Barra elástica sometida a una carga distribuida (axial) tangencial.

En la Figura 11, se muestra el entorno gráfico de LISA, en donde se ha representado el dominio ya discretizado en 5 elementos (barra) y 6 nodos.

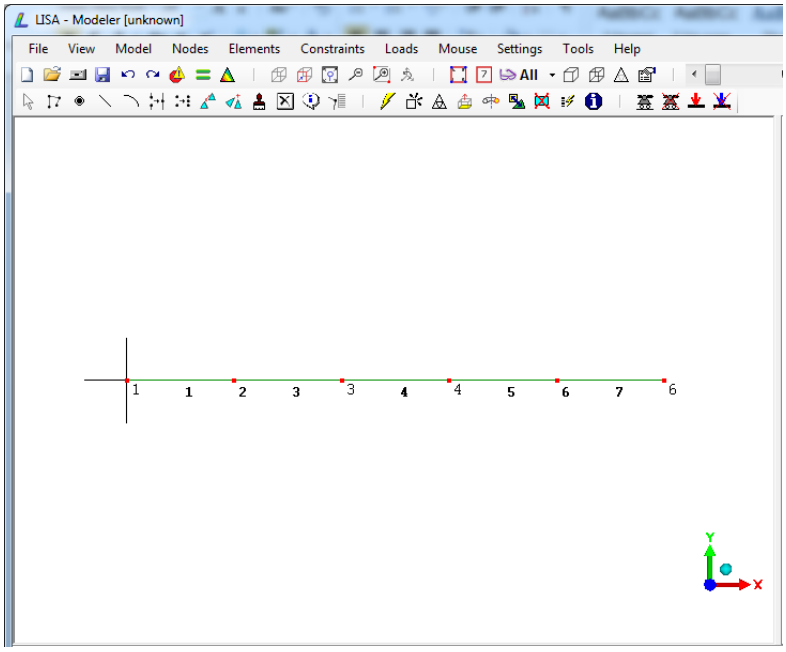



Figura 11: Entorno gráfico de LISA®. Barra representada mediante 5 elementos (barra) de 2 nodos.

Luego de especificado, el tipo de análisis (estructural), el tipo de elementos a usar (barra/truss) y las características mecánicas del material y geométricas de las secciones, se imponen sobre los nodos las condiciones de borde y las cargas (Fig. 12).

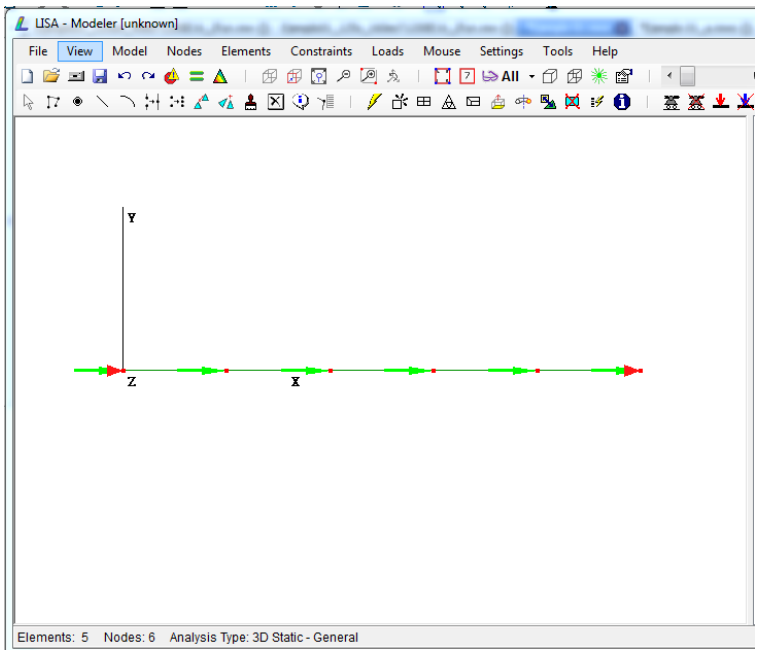



Figura 12: Interface gráfica: Condiciones de bordes y cargas impuestas sobre los nodos.

Resuelto el análisis por elementos finitos, en el entorno gráfico del posprocesador, se pueden observar y analizar los resultados. En las Figuras 13 y 14 se muestra la curva solución del problema estático (desplazamientos) y la tabla de valores con los desplazamientos y las fuerzas nodales.

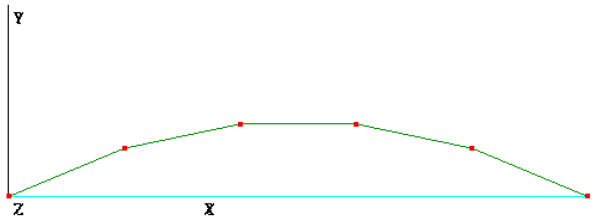
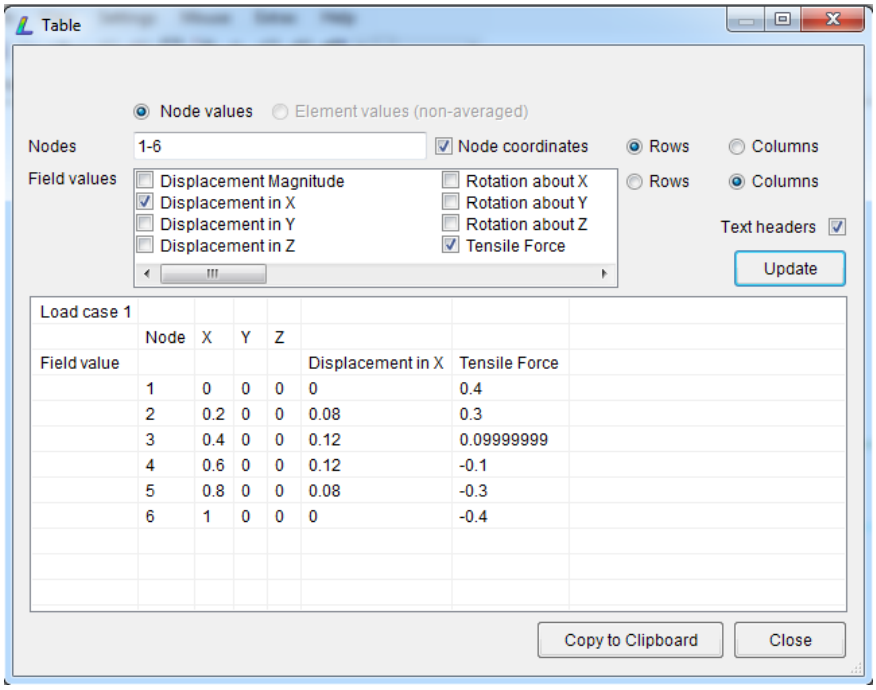



Figura 13: Solución aproximada (desplazamientos) del problema mediante el MEF, implementado en LISA. 5 elementos barra, 6 nodos.




Load case 1

| | Node | X | Y | Z | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Field value | | | | | Displacement in X | Tensile Force |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.4 |
| | 2 | 0.2 | 0 | 0 | 0.08 | 0.3 |
| | 3 | 0.4 | 0 | 0 | 0.12 | 0.09999999 |
| | 4 | 0.6 | 0 | 0 | 0.12 | -0.1 |
| | 5 | 0.8 | 0 | 0 | 0.08 | -0.3 |
| | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | -0.4 |

Figura 14: Tabla de valores correspondientes a los desplazamientos y fuerzas nodales internas; obtenidos mediante el MEF implementado en LISA

## 4. CONCLUSIONES

Se mostró una propuesta metodológica para la enseñanza del MEF en un curso de Cálculo Numérico de las carreras de Ingeniería Civil y Eléctrica que se dictan en la Universidad Tecnológica Nacional, con el auxilio de herramientas computacionales. A partir de un problema diferencial modelo, se analizaron las formulaciones variacional y de minimización de un funcional equivalentes. Se trata de una alternativa didáctica ventajosa que permite introducir a los alumnos en los principios básicos del MEF y al mismo tiempo mostrar herramientas computacionales de uso en ingeniería.

## 5. REFERENCIAS

1. MAPLESOFT®. Maple 14 Academic. Waterloo, Ontario.
2. LISA Finite Element Technologies. Version 7.4.1. Sonnenhof Holdings, Ontario.
3. Hrennikoff A., Solution of problems in elasticity by the frame work method. Journal of Applied Mechanics, Vol. 8, No. 4, pp. 169-175, 1941.
4. Mc Henry D., A Lattice analogy for the solution of plane stress problems. Journal of Institution of Civil Engineers,Vol. 21, pp. 59-82, 1943.
5. Courant R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49, pp. 1-23, 1943.
6. Zienkiewicz, O., The finite element method in engineering science, McGraw-Hill,London, New York , 1971. ISBN 0070941386.
7. Strang G. and Fix G., An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973, ISBN 0130329460.
8. Johnson C., Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, Dover Publications, 2009. ISBN 048646900X.