# CAMBIO CONCEPTUAL Y TRANSFERENCIA DE CONOCIMIENTOS. ANÁLISIS DE EXPERIENCIAS CON ALUMNOS DE INGENIERÍA

**Marta Anaya – María Inés Cavallaro**
**UTN. FRBA – UBA. Fac. de Ingeniería, Argentina**
manaya@fi.uba.ar – mariainescavallaro@yahoo.com.ar

**Palabras Clave :** Funcional Delta, cambio conceptual, transferencia dinámica

**Resumen**
En este estudio, realizado con alumnos de ingeniería cursando el tercer año de la carrera, se analizarán los resultados de una experiencia instruccional enmarcada en la teoría del cambio conceptual en el área del análisis funcional. Se discutirán las causas del fracaso en la formación adecuada del concepto desde la perspectiva de la transferencia de conocimientos, sus tipologías y dificultades. Desde este enfoque teórico más profundo, se darán recomendaciones para la enseñanza

**Introducción**

Muchas de las dificultades que el alumnado presenta en el trabajo sobre ciertos conceptos matemáticos, están vinculadas con preconceptos, modelos intuitivos y heurísticas del pensamiento que son persistentes y resistentes al cambio.

En algunas situaciones, cuando se presenta en clase un concepto matemático, es posible que los estudiantes ya tengan imágenes, esquemas e intuiciones vinculadas a la nueva idea que pueden interferir con el proceso de aprendizaje produciendo una percepción distorsionada del concepto.

Con el desarrollo de la edad, la experiencia y como producto de la instrucción formal, se establecen creencias fuertes y estables ([1], [2])

Por otro lado, según Fischbein ([3]), cada vez que una persona debe enfrentar una noción que resulta intuitivamente inaceptable produce, deliberada o inconcientemente, sustitutos intuitivos más aceptables, es decir, modelos intuitivos que se pueden comprender, representar y manipular.

El proceso de aprendizaje requiere, entonces, no sólo el trabajo metacognitivo de la concientización de las propias tendencias y sesgos del pensamiento, sino de una integración de la nueva información y la reorganización del conocimiento existente, que es lo que se ha denominado "cambio conceptual" ([4], [5], [6], [7], [8]).

Las situaciones instruccionales que se propongan como remediales para este tipo de problemática, deben ajustarse a las particularidades de la dificultad que se plantea, pero, en general, requerirán que se generen algunas condiciones ([4]):

a) Que haya disconformidad respecto de las concepciones existentes por que no alcanzan para resolver el problema o porque generan resultados erróneos
b) Que exista una nueva concepción alternativa que sea inteligible
c) Que la nueva concepción aparezca como plausible
d) Que la nueva concepción resulte fructífera

En las siguientes secciones se presentará el análisis de resultados de un estudio realizado con estudiantes de ingeniería.

Se trabajó sobre el concepto de la funcional Delta de Dirac y las dificultades generadas por preconceptos y modelos mentales previos que interfirieron con la comprensión de dicho concepto.

En la primera sección se presentará el marco teórico vinculado a los preconceptos y modelos intuitivos previos actuantes en el momento de la experiencia.

En la segunda sección se describirá la experiencia instruccional basada en la metodología asociada a la Teoría del Cambio Conceptual.

En la tercera sección se analizará el fracaso en el logro del cambio conceptual desde la teoría de la transferencia del conocimiento.

Finalmente, la cuarta y quinta sección se dedicarán a las conclusiones y recomendaciones para la enseñanza.

**I. Delta de Dirac. Modelos intuitivos previos**

La modelización utiliza modelos mentales y representaciones en dos formas diferentes pero igualmente importantes: como herramientas esenciales para interpretar y manipular la realidad, y como recurso para tratar con nociones teóricas de cierta dificultad. En ambos casos, la estrategia al abordar un problema es resolver en el contexto del modelo e interpretar el resultados en términos del sistema original.

E. Fischbein (1987), ha señalado que cada vez que una persona debe hacer frente a una noción que le resulta intuitivamente inaceptable, tiende a producir, ya sea deliberadamente, o inconscientemente, sustitutos intuitivamente más aceptables, comúnmente llamados modelos intuitivos, por lo que pueden ser percibidos, representados, o manipulados como otras realidades concretas.

La matemática es una de las principales fuentes de modelos para fenómenos reales. Además, conceptos

matemáticos complejos se tornan más accesibles en su comprensión y manejo con la ayuda de cierto tipo de modelos llamados intra-matemáticos, entre los cuales distinguiremos:

- Las analogías intramatemáticas, en los que el original y el modelo pertenecen a sistemas conceptuales diferentes, estableciéndose un isomorfismo entre el original y el modelo.
- Los modelos paradigmáticos, en los cuales el original consiste en una clase de objetos mientras que el modelo está provisto por un ejemplo o subclase de la categoría considerada. ([3])).

Cuando se introduce un concepto matemático utilizando algunas de estas representaciones, a menudo ocurre que los estudiantes ya tienen imágenes, esquemas e intuiciones previamente formadas relacionadas con el modelo empleado que pueden interferir con el proceso de aprendizaje llevando a una percepción distorsionada de la teoría matemática a la que pertenece el concepto original.

**II. La experiencia instruccional y sus resultados**

Siguiendo esta línea, hemos estudiado algunas dificultades que presentaron los estudiantes de ingeniería al trabajar en ciertos temas de la matemática y las relacionamos con sus modelos mentales intuitivos. En particular, en un estudio que comenzó hace unos años, hemos venido trabajado sobre el caso de las dificultades en el aprendizaje del impulso unitario Delta de Dirac y su modelo matemático en el marco de la teoría de distribuciones. ([ 9])

La Teoría de Distribuciones data de la década 1930-40, durante la cual fue desarrollada en un intento de dar sentido a la "diferenciación" de funciones discontinuas. Éste es el caso del impulso unitario (introducido por Dirac en 1926) como la "derivada" de la función de Heaviside. Hasta aquél momento, esta operación había sido usada en forma poco rigurosa por físicos e ingenieros ya que, si bien estos métodos carecían de rigor, eran bastante efectivos.

En 1950, Schwartz desarrolló en forma rigurosa la teoría de distribuciones en la cual Delta fue definida como un funcional sobre funciones de prueba ([10])..

Con respecto a los estudiantes, se han observado sistemáticamente muchas dificultades y errores en la formalización del concepto de función generalizada, tanto en los exámenes escritos y orales como en la aplicación a la modelización de situaciones reales.

El estudio fue realizado y repetido durante cinco cuatrimestres no consecutivos con estudiantes en su último curso de Matemática (Análisis Matemático III), de edades entre 20 y 23 años. Cada curso tenía entre 25 y 30 alumnos.

La experiencia instruccional, en cada caso, siguió las pautas de la teoría del cambio conceptual :

1) Se reveló a los estudiantes los preconceptos
2) Se discutieron y evaluaron los preconceptos
3) Se generó el conflicto cognitivo a partir de los preconceptos
4) Se guió hacia la generación del concepto

**Procedimiento**

1) Se pidió a los estudiantes que modelaran matemáticamente la siguiente situación: ***"Se golpea una pelota con una maza sobre una superficie horizontal plana, de forma tal que se mueve en línea recta y sin fricción"***.

Todos los alumnos eligieron a la función de Heaviside como modelo para la velocidad y "derivaron" la velocidad para obtener la fuerza o la aceleración actuante sobre la pelota, obteniendo un múltiplo de Delta como resultado. Las nociones de impulso y Delta de Dirac las traían previamente de los cursos de física.

Todos los alumnos asociaron a Delta con *un pulso corto e intenso*, representándola como una función nula para t distinto de cero e infinita para cero.

2) y 3) Se planteó, entonces, el siguiente diálogo con el docente:

***Transcripción del diálogo entre docentes y alumnos:***

***Prof:*** *Han propuesto que la Delta de Dirac es una función que vale cero en todos los puntos menos en el cero, y sin embargo cuando calculan la transformada de Fourier con esta integral el resultado no es cero ,sino 1. Cómo se explica?*

***Al:*** *¿ Y acaso la transformada de Fourier de la delta no es 1?* (esta información es obtenida a través de las tablas de Fourier que los alumnos manejan)

***Prof.:*** *Si... Pero la integral de una función que es cero salvo en un punto cuánto da?*

***Al:*** *Cero .¿Pero la integral de la delta no es 1?*

***Prof:*** *¿Qué es la delta?*

***Al:*** *Una función que vale cero en todos los puntos menos en el cero que vale infinito y tiene integral 1.*

***Prof:*** *¿qué significa que una función numérica "valga infinito" en un punto? Infinito no es un número.*

***Al:*** *Bueno... tiende a infinito en cero.*

***Prof:*** *¿Cómo va a tender a infinito si en todos los demás puntos vale cero?*

***Al:*** *Pero es que tiene integral 1...*

***Prof:*** *¿Cómo puede ser si vale cero salvo en un punto?*

***Al:*** *No, claro, pero ¿la delta no se define así? Yo pensé que a lo mejor con la delta es distinto.*

Es decir, al intentar modelar esta situación dentro de la teoría de funciones de variable real, se llegaron a resultados incorrectos desde el punto de vista físico y matemático. La contradicción entre los dichos de los estudiantes y los conceptos de función de variable real e integral definida ya muy trabajados, se hizo evidente, produciéndose un conflicto cognitivo. Se discutieron las fuentes y causas del error.

4) Como resolución del conflicto creado se suministraron las herramientas matemáticas necesarias (16 horas de teoría de distribuciones).

Posteriormente, a modo de post-test se realizaron dos tipos de evaluaciones:

- Un cuestionario escrito en el que se indagó sobre los conceptos teóricos y sobre la manipulación de ciertas distribuciones en la modelización de situaciones.
- La presentación de un informe escrito sobre la modelización de la situación inicial.

Los alumnos fueron entrevistados individualmente para que lo explicasen. Las entrevistas permitieron explorar más profundamente en las creencias de los estudiantes que exponían sus formas de razonamiento, los modelos intuitivos involucrados y los conceptos que fueron activados en el momento de la resolución.

Del análisis de los datos obtenidos ([9]) se concluyó que:

El 80% de los estudiantes lograron responder correctamente sobre preguntas teóricas referidas a la teoría de distribuciones y mostraron habilidad para aplicarla a la modelización de situaciones. Es decir se consiguieron cambios que les permitieron operar y resolver en forma correcta.

Sin embargo, durante las entrevistas, a modo de post test, se les volvió a indagar sobre el problema de la maza, pudiéndose observar que los modelos intuitivos detectados en un principio continuaban presentes en sus modelos explicativos. Se pudo observar que los nuevos conceptos no habían sido completamente internalizados por algunos de estos alumnos. Coexistían el modelo matemático de las distribuciones enseñado , el modelo físico-matemático elaborado para esta situación concreta, descripto en términos de fuerza, velocidad y aceleración, el modelo intuitivo previo correspondiente a los conceptos previos. En algún momento, cada uno de éstos era utilizado aún cuando el modelo intuitivo previo fuera contradictorio con los otros dos modelos.

Veamos tres ejemplos:

**A2:** (Lee el problema y los datos) *Bueno, el modelo para v(t) en principio no tenía velocidad ¿no? Vale 0 para t menor a 0 y vale un $v_0(t)$ para t mayor o igual a 0. También se puede graficar. Aceleración de t , aceleración de t de repente se acelera de golpe y después no se acelera más o sea aceleración de t vendría a ser como una delta.*

**P:** ¿Porqué decís que es como una delta?

**A2:** *Porque para tiempos distintos de cero el móvil estaba quieto entonces no estaba acelerado y no se aceleraba tampoco y para tiempos posteriores a cero se mueve con movimiento rectilíneo uniforme por lo tanto no se acelera, no tiene aceleración y en el único instante en donde hay aceleración es en el tiempo =0 en que pasa de tener una velocidad = 0 a tener una velocidad $v_0$ entonces ahí me parece como si fuese una delta, me da la idea representando que es como una delta el tema es que es una aceleración...si una va al límite tendría que ser una aceleración prácticamente infinita es medio raro..Ésa es la única parte que me complica...lo mismo que la F(t) F(t) también sería como una Delta porque es como el impulso está aplicado en el tiempo =0, después no hay ninguna fuerza actuando en t =0, no hay rozamiento , no hay nada.*

**P:** Y decime…… la velocidad…

**A2:** *Vendría a ser una u(t)*

**P:** Claro, pero ...¿Cómo derivás u(t)?

**A2:** *O sea tengo que estar hablando de distribuciones*

**P:** ¿ La derivaste es como función?

**A2:** No, como función, no se puede derivar porque hay como una discontinuidad en tiempo t =0, entonces no la puedo derivar como una función.

Cuando se le pregunta qué es un impulso responde:

**A2**: *Un impulso es justamente quizás una fuerza que se aplica así en un instante...en un $\Delta t$ que vendría tendiendo a 0 y que tendría un valor grande, alto, pero sería como una Delta, o sea hay una asociación entre impulso y lo que vendría a ser la representación como una delta, me parece. Ahora eso lo veo físicamente quizás me cuesta definirlo en términos estrictos matemáticos. Me refiero a ir desde los postulados físicos y escribirlo en forma matemática, capaz que me cuesta un poco pero yo lo veo así lo veo como que un impulso, le pego a algo es como una delta. Es la idea que tengo me parece.¿Sí?*

Este alumno si bien ha hecho uso correcto de la teoría aprendida, muestra una gran inseguridad entre los conceptos matemáticos y los físicos.

Otro alumno explica:

**A3:** *La derivada del escalón es la delta.*

**P:** ¿Qué vas a dibujar?

**A3:** (Grafica la función de Heaviside y explica) *Va a ser así, y acá está este salto, bueno , no lo dibujo pero...*

**P:** ¿Y antes de haberle pegado?

**A3:** (Completa el gráfico) *Éste va a ser v(t), cuando yo derive éste ahí va a aparecer la delta ¿no?, porque de acá para acá es como si fuera recto o sea, sigue así y así , es real vale cero la derivada, y ahí va a aparecer la delta, bueno a(t) acá valdrá...*

**P:** Disculpame, vos me decís que cuando derivás la velocidad…. ¿qué pasa?
**A3:** *Va a aparecer una delta, acá por este salto...*
**P:** En realidad ¿Cómo estás derivando ésto?
**A3:** *Si lo derivo como distribución va a dar una, una delta acá...*
Cuando se le pregunta qué es un impulso responde:
**A3:** "*Claro en Física a ver si me acuerdo, así, porque en realidad es más o menos esto ahora que me doy cuenta lo que hacemos es que, a ver fuerza es masa por aceleración, si integro los dos lados ¿que da?, masa por velocidad y masa por velocidad es cantidad de movimiento... acá queda un delta...*"
A continuación intenta recordar lo que aprendía en física para el caso en que se producía el choque de dos pelotitas, la conclusión de **A3** es:
*"Nosotros mirábamos cómo era antes, cómo era después, y en realidad lo que siempre te pedían es qué velocidad tenía al final, entonces nosotros no íbamos por este camino, pero en realidad en el teorema éste estaba implícito porque te pedían ésto, lo que pasa es que en Física ni te lo explican te dicen que tiene que ser una fuerza impulsiva que el tiempo es corto...y punto. En realidad yo esto ni lo conocía en Física I"*
Aquí, la confusión de este alumno es más compleja: por un lado, sigue derivando puntualmente, como función, a una función a la que afirma que hay que derivar como distribución, por otro lado al encontrar una discontinuidad de salto finito en un punto, a la derivada "en ese punto", le asigna como valor "Delta". Este alumno muestra dificultades no sólo con el conocimiento impartido de distribuciones sino también con el conocimiento matemático del concepto de derivada usual de una función.
La asignación de la Delta como "valor" en el punto de discontinuidad, fue su manera de "conceptualizar" que la derivada como distribución de una función con una discontinuidad de salto finito incluye en su expresión una delta concentrada en ese punto. Por otro lado, la noción de impulso que trae de física le resulta incompleta.
Otro alumno explica por escrito :
**A4:** *"En el momento que la pelota es golpeada actúa un fuerza pero esta fuerza sólo está aplicada a la pelota en un tiempo infinitesimal, luego de este impulso la pelota se desplaza con velocidad constante. Inicialmente* $t_0 = 0$, $v_0 = 0$, $F(t_0) = F_0$ .
A continuación plantea el modelo de Newton y le queda $(F(t) / m)\, dt = d\, v(t)$ luego explica:
**A4** *" Para hallar la velocidad para todo 't' después del impulso"*
*Integrando ambos lados, tenemos* $\int_0^t \frac{F(t)}{m} dt = \int_0^v dv(t) = v - v_0$ => $v - v_0 = 0$ => $v = v_0$ "
*" con lo cual llegamos a un absurdo ya que* $v_0 = 0$ *, por lo tanto la conclusión anterior nos dice que la pelota no se mueve. Pero en realidad se mueve con velocidad constante, por lo que hay que analizar el problema desde otro punto de vista"*
Aquí claramente ha expuesto el conflicto desde el punto de vista físico. Sin embargo la resolución del problema que plantea sigue teniendo las contradicciones matemáticas ya mencionadas, como se observa a continuación:
*"Para poder sortear este problema utilizamos la función Delta de Dirac* $\delta(t) = 1$ *y 0 para otro t".*
Confrontado con esta definición corrige en otro momento:
*"En realidad la función impulso es* $\delta(t) = \begin{cases} 0 & si\ t \neq 0 \\ \infty & si\ t = 0 \end{cases}$ => F(t) = $F.\ \delta(t)$, *F intensidad de la fuerza"*
A continuación plantea:
"*las ecuaciones de Newton...* $F.\delta(t) = m(dv(t)/dt)$ => $F.\delta(t)\, dt = md\, v(t)$
*Multiplicamos ambos miembros de la ecuación por* $e^{-zt}$ *para hallar la transformada de Laplace como distribución:*

$$\Rightarrow \int_0^\infty F.\delta(t).e^{-zt} dt = \int_0^\infty m.e^{-zt} dv(t)$$

Trabaja por separado con cada miembro utilizando la notación formal de la teoría de distribuciones, sólo que fuera del contexto enseñado de las distribuciones temperadas:
"$F <.\delta(t)\ ,\ e^{-zt} > = F\ e^{-0t} = F$ "
integra por partes el segundo miembro y llega a que $F = mzV(z)$ => $V(z) = F/mz$
*Antitransformamos para hallar la velocidad* $v(t) = > v(t) = F/m\ u(t)$ *con* $u(t) = 1$ *si* $t \geq 0$, $0$ *si* $t < 0$"
Y termina termina graficando $v(t)$ como un escalón de altura $F/m$.
Aquí, parecería que este trabajo fue de comprobación, y que lo copió de algún texto no matemático.
Luego responde:
*"Un impulso es una fuerza muy grande que se aplica sobre un cuerpo en un instante determinado de tiempo."*
Este alumno, al interactuar con su entorno (que es más amplio que la clase de matemáticas) repitió la contradicción en el entorno matemático, sin percibirla como tal.
Al analizar los resultados de la primera experiencia se concluyó que el modelo de las distribuciones había resultado ser intuitivamente inaceptable para varios de los estudiantes, que tarde o temprano evidenciaron en sus explicaciones que aún concebían a Delta como una función de variable numérica, nula para todo t excepto en

cero donde es infinita y con integral distinta de cero. Este último modelo resultó ser para ellos intuitivamente más aceptable a pesar de las contradicciones que conlleva. Para neutralizar estas contradicciones se le daba a Delta el estatus de "especial" o "diferente".([9])

**III. Análisis de los resultados desde una nueva perspectiva**

En la experiencia instruccional descripta, todos los pasos para el cambio conceptual habían sido llevados a cabo Sin embargo, se pudo observar como resultado sólo un cambio a nivel procedimental -gran parte de los estudiantes realizaban los cálculos sin incurrir en contradicciones con la matemática- y en cierta forma, a nivel de sus respuestas conceptuales formales -varios de ellos lograron reproducir la definición enseñada-. A pesar de esto, para muchos de los alumnos el modelo explicativo no había variado y la transferencia a diferentes contextos no se había realizado correctamente.

Luego de haber trabajado la teoría y metodología del Cambio conceptual en distintos tipos de situaciones con bastante éxito ([12], [13], [14]), quedó planteado el interrogante de porqué en el caso de la Delta de Dirac esta metodología no fue todo lo eficaz que se había esperado. Entonces, se volvieron a retomar los datos sobre la experiencia descripta con el objeto de analizar el fracaso en el logro de un cambio conceptual en esta problemática.

En este sentido, se profundizó el estudio de lo que significa un cambio conceptual en relación a la transferencia de conocimientos, sus tipos y dificultades.

**Transferencia y cambio conceptual**

Una transferencia de conocimientos ocurre cuando una persona utiliza el conocimiento que posee sobre una situación en otra.

La transferencia es importante para el cambio conceptual ya que los nuevos conceptos se construyen sobre la base de conocimientos previos y las dificultades en la transferencia puede proveer explicaciones de porqué la gente cambia sus ideas en algunos contextos y no en otros ([15]).

El término *innovación* será utilizado para indicar los cambios que la transferencia puede precipitar tanto en los conceptos como en el entorno. De esta forma, el cambio conceptual es parte de la innovación.

En el estudio de la transferencia de conocimientos para la innovación, se presentan dos temas fundamentales:

a) *el problema del conocimiento* que plantea el interrogante de cómo el conocimiento anterior de cierta clase puede contribuir a crear nuevo conocimiento de otra clase y
b) *el problema de la inercia*. Que se plantea porqué las personas pueden fallar en la innovación aún cuando tengan los conocimientos previos pertinentes a la situación. La inercia es la tendencia a que situaciones nuevas queden asimiladas dentro de procesos y/o modelos propios preexistentes, lo que inhibe cualquier intento innovación. De esta forma, las personas tratan situaciones novedosas con los mismos esquemas y enfoques que utilizan para situaciones conocidas sin llegar a plantearse el cambio de sus ideas o acciones

Desde esta nueva perspectiva, podemos decir que, en el caso que se está analizando, los conocimientos básicos previos requeridos para introducir el concepto de Delta de Dirac y de Distribución (o función generalizada) comprenden: la teoría de funciones numéricas de variable real que incluyen los conceptos de límite, diferenciabilidad, integral definida, el teorema fundamental del cálculo, y nociones básicas de álgebra lineal y transformaciones lineales. Estos conocimientos habían sido impartidos en cursos previos que habían sido aprobados por estos alumnos. De hecho, a partir de estos conocimientos, los alumnos aprendieron los procedimientos correctos de cálculo relacionados con la Delta de Dirac y ciertas distribuciones. Y lograron además una innovación parcial en la conceptualización.

Sin embargo, por un lado, algunas de las dificultades que se observaron, están relacionadas con las conceptualizaciones y conocimientos previos de las funciones numéricas. Y por otro lado, el modelo muy familiar de las funciones numéricas, fue asumido por los alumnos como paradigmático y esto dificultó la aceptación de ideas nuevas como la de *funcional*: o sea una función con valores numéricos cuya variable no es un número sino que es una función (de prueba). Esto implicaba, además tener que considerar espacios de funciones y funciones definidas en dichos espacios.

Al realizar el cálculo de la transformada de Fourier y operar con las distribuciones, los estudiantes trabajaron con la teoría impartida utilizando las funcionales, pero al ser indagados en el concepto de la delta y su transferencia al impulso físico, los estudiantes volvieron a tratar a la delta como función numérica, evidenciando que no habían formado el nuevo concepto.

De esta forma, muchos alumnos transfirieron erróneamente modelos previos que volvían a actuar en el momento en que se le requería al alumno una explicación de los procesos involucrados en la resolución, mostrando un claro caso de inercia.

La transferencia de conocimientos previos que, por supuesto, es imprescindible para el tratamiento de situaciones novedosas, conlleva a su vez un riesgo: el conocimiento previo podría ser tal que permitiese arribar a resultados correctos aunque se sustentaran sobre la base de la incorrecta adaptación de ese conocimiento a la nueva situación. Las explicaciones de los alumnos A3 y A4 son un ejemplo.

Más aún, el tema que tratamos, justamente, es un ejemplo histórico de este hecho ya que el impulso unitario (introducido por Dirac en 1926) como la "derivada" de la función de Heaviside, había sido usada en esta forma poco rigurosa por físicos e ingenieros, y si bien estos métodos carecían de rigor, eran bastante efectivos.

Es preciso aclarar que ésta concepción es alentada desde muchos libros de texto utilizados en Física y en Electrónica, en un intento deliberado de simplificar la presentación de las ideas y procedimientos. Las explicaciones más rigurosas que a veces se colocan en algún apéndice, son ignoradas sistemáticamente por los estudiantes.
La pregunta es entonces qué tipo de transferencia se necesitaría para vencer estas dificultades de transferencia incorrecta de conocimientos y modelos previos y de inercia? Es decir, cuáles son las condiciones que llevan a lograr una transferencia que no sea una mera repetición?.
En este sentido, diversos autores ([15]) señalan que antes de que una persona realice una innovación conceptual le resulta difícil saber si vale la pena, ya que en general las personas aprenden a seguir rutinas que les alcanzan para "salir del paso" y, en consecuencia, no reconocen ni buscan ni se arriesgan con otras alternativas.
Existen dos tipos de tranferencia que podrían proveer medios para vencer el problema de la inercia:
1)Transferencia por similaridad:
La Transferencia por similaridad ocurre cuando la gente es capaz de reconocer que tiene ideas previas bien formadas que pueden ser aprovechadas para describir otra situación de una nueva manera.
En este tipo de transferencia, se re-conceptualiza la nueva situación en términos del conocimiento previo (que debe estar muy bien formado) a través de un "mapeo". La interacción con el entorno (el trabajo en clase, la guía del docente, los materiales a utilizar) apunta a aplicar los conceptos e ideas previas.
2) Transferencia dinámica:
La transferencia dinámica ocurre cuando se coordinan las competencias y los conocimientos a través de la interacción con el entorno para generar nuevos conceptos. Se basa en la coordinación de sistemas, que pueden ser disímiles. El entorno provee una realimentación y/o reestructuración de las ideas.
La transferencia por similaridad y la transferencia dinámica son diferentes mecanismos que llevan a la innovación, no están contrapuestas, y pueden yuxtaponerse para dar lugar a innovaciones.
La teoría de distribuciones y funciones generalizadas, aparece así como el resultado de la yuxtaposición de una transferencia por similaridad y una transferencia dinámica en la interacción entre los entornos físico y matemático. Esta interacción se genera a partir de pensar las funciones como densidades de masa y observar que el conocimiento de una magnitud variable puede alcanzarse conociendo el efecto que causa sobre otras magnitudes variables (que serán las funciones de prueba correspondientes a cada teoría). La observación de que muchas magnitudes no corresponden a densidades de masa, da lugar a una reestructuración de conceptos del análisis tales como derivada, convolución y transformada de Fourier.
En el caso de la conceptualización de la Delta los alumnos han hecho una transferencia por repetición de la teoría de funciones numéricas a la de distribuciones.
El modelo intuitivo previo aceptado junto con las reglas de procedimientos "especiales" para tratar la delta como una función fueron parte la inercia por la cual los estudiantes no pudieron cambiar de perspectiva y considerar otro punto de vista.
La interacción con el entorno influyó en formas contradictorias: por un lado, desde la clase de matemática se contribuyó a la formación de competencias disciplinares y metacognitivas para lograr un cambio de perspectiva y, por el otro la tendencia de los estudiantes a la inercia fue reforzada por el contexto de bibliografía y clases de física. De este modo, no se desarrolló la transferencia dinámica.
La transferencia por similaridad tampoco ocurrió en su forma adecuada. De hecho para muchos estudiantes, los conocimientos previos no estuvieron suficientemente formados, concretamente el Teorema Fundamental del Cálculo y sus implicancias fue conceptualmente ignorado por un gran número de estudiantes.
La complejidad e innovación que se requería para el tema, requería de la yuxtaposición de ambos tipos de transferencia, que no se concretaron, por lo que no hubo innovación profunda.
.

**IV Conclusiones**

En la experiencia presentada y analizada en este trabajo se muestran dificultades de los alumnos vinculadas con un modelo intuitivo persistente y, un ensayo instruccional vinculado a la teoría del cambio conceptual .
La particularidad es que, al contrario de otras experiencias realizadas en el marco de esta teoría, en esta experiencia se observó que la evolución de cada grupo alumnos al ser expuestos, luego del conflicto cognitivo, a una nueva teoría no era la deseada.
Si bien los alumnos aprendieron ciertas reglas para operar con las distribuciones o funciones generalizadas, no hubo una innovación en lo conceptual, por lo que no se produjo el cambio conceptual.
Es decir, el desempeño en cuanto a operar con las distribuciones o funciones generalizadas, en las evaluaciones tradicionales y en las situaciones de modelización resultó muy bueno. Sin embargo al indagar más profundamente en entrevistas individuales se hizo evidente la persistencia de los modelos instalados, sin cambio de ideas o perspectivas.
Esta persistencia puede ser analizada como una no-innovación del modelo mental previo de la Delta como función "especial" que inhibe su conceptualización como funcional. La no-innovación, remitió a una falla en la transferencia del concepto de función al concepto de función generalizada o distribución.
Esta falla se asoció por un lado a conceptos matemáticos previos, no suficientemente bien formados, y por otro lado al problema de la inercia en la transferencia.

Este último problema se evidenció en la adopción de una conceptualización de la Delta de Dirac según una repetición del modelo de función numérica sin preocupación por las contradicciones con la teoría matemática aún después de la enseñanza impartida.
La falla en los conocimientos previos, incidió en contra de la transferencia por similaridad. La interacción con el entorno en lo que se refiere a textos y clases de física incidió en contra de la transferencia dinámica.

**V Recomendaciones para la docencia**

En muchos casos, estudiantes de ingeniería y graduados perciben la importancia de adquirir sólidos conocimientos y conceptos matemáticos para su posterior desenvolvimiento, pero en otros casos los conocimientos teóricos son desestimados por considerar que la matemática en una simple herramienta para la ingeniería, y a lo sumo relegados a cursos de posgrado.
Sin embargo, al tener que realizar modelos y modelos matemáticos para resolver un problema del mundo real, la transferencia por similaridad y la transferencia dinámica de conceptos de la matemática y hacia la matemática, son procesos que deberán llevarse a cabo durante el proceso de modelización.
Surge, entonces, la necesidad de investigar profundamente en los preconceptos y modelos mentales que no logran ser erradicados completamente y pueden acarrear dificultades en el desempeño posterior.
Es por eso necesario que los docentes estén al tanto de estas dificultades y sus causas para generar materiales y modelos instruccionales tendientes a favorecer la superación de las mismas.
En cuanto a las metodologías de enseñanza, las experiencias dentro de la teoría del cambio conceptual podrían ser un punto de partida para corregir errores producidos por sesgos del pensamiento, pero, no deben ser experiencias aisladas que colaboren en la resolución de una problemática muy acotada, sino que deben estar insertas en un plan curricular que tenga en cuenta las dificultades persistentes de los alumnos. Es así, que en el caso de la Delta de Dirac, hay muchos modelos previos actuantes y es poco probable que puedan ser desarticulados todos simultáneamente en un curso de pocas semanas.
Evidentemente, la presentación de teorías tan complejas como la Teoría de Distribuciones, requieren de muchos pasos previos. Por ejemplo, la presentación de los operadores lineales que aparecen en la instrucción previa como tales. Es decir, la derivación, la diferenciación, el cálculo de primitivas, etc. deberían mostrarse como "funciones definidas sobre funciones" para ayudar al alumno a considerar temas conocidos desde una nueva perspectiva.
Respecto de los materiales, diremos que los problemas que son presentados tradicionalmente a los alumnos requieren habilidad para reconocer y clasificar situaciones, así como seleccionar herramientas de cálculo apropiadas, es decir, requieren manejo procedimental con restricciones conceptuales. Esto parece resultar insuficiente entrenamiento para lograr el tipo de transferencias que se necesitan para el cambio conceptual.
Sería conveniente elaborar e incorporar problemas y situaciones de modelización que expongan preconceptos y permitan su discusión y superación.
Finalmente, sería recomendable trabajar en forma coherente y articulada desde las distintas asignaturas desde las cuales el alumno recibe información y formación, para que no resulte en contradicciones que inducen o, por lo menos, sustentan errores conceptuales difíciles de erradicar.

**Referencias**

[1] Tversky,A.& Kahneman,D.( 1982 ) Judgment under uncertainty: Heuristic and biases. In Kahneman, D., Slovic, P, Tversky, A. (eds) Judgment under uncertainty: Heuristic and biases. Cambridge University Press, Cambridge
[2]Fischbein,E.&Schnarch,D (1997) . The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. Journal for Research in Mathematics Education 28(1), 96-105.
[3] E. Fischbein, (1987) *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
[4]Posner, G y otros. (1982). Accomodation of a scientific conception: Towards a theory of conceptual change. Science Education, 66, 211-227.
[5] Vosniadou, S. (2004). Extending the conceptual change approach to mathematics learning and teaching. Special Issue on Conceptual Change. Learning and Instruction 14, 445-451.
[6] Rittle-Johnson, B, Siegler, R, Wagner Alibali, M (2001). Developing Conceptual Understanding and Procedural Skills in Mathematics: an iterative Process. Journal of Educational Psychology. Vol 93 (2). pp. 346-362.
[7]Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou, A., & Papademetriou, E. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. Learning and Instruction, 11. 381–420.
[8] Davis,J.(2001) Conceptual Change.In M. Orey(Ed).Emerging perspectives on learning, teaching and technology.
[9] Cavallaro M.I., Anaya M. (2002). Modelos intramatemáticos y modelos mentales en cursos de matemática para la ingeniería. Anales del II EMCI Internacional, X EMCI. Nacional, Resistencia.
[10] L. Schwartz, (1950), *Theorie des Distributions.* Hermann, Paris.

[11] Cavallaro, M.I.-Anaya, M., García Argiz, E., Aurucis, P. (2007). Estimative abilities in probabilistic judments of engineering students. *Internacional Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol 38, No 7,15. pp 917-925
[12] Cavallaro, M.I.-García Argiz, E., Aurucis, P. (2009) Cambio conceptual en Estadística. Anales del XV EMCI (Encuentro Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería),
[13] Cavallaro, M.I.-García Argiz, E., Aurucis, P. (2008). Cambio conceptual en Probabilidad. Anales del XIV EMCI (Encuentro Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería).
[14] Cavallaro, M.I.-García Argiz, E., Aurucis, P. (2010). La preparación del ingeniero en la resolución de problemas de Probabilidad y Estadística. Anales del Congreso Mundial de Ingeniería. Buenos Aires.
[15] Schwatrz D.& Varma S., Martin L. Dynamic transfer and inovation. Forthcoming in Vosniadou, S. (in press) Handbook of Conceptual Change.Erlbaum.