SOLUCIONES EXACTAS Y NUMÉRICAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES QUE MODELAN EL COMPORTAMIENTO DE FLUIDOS

Horacio A. Petit, Leonel O. Pico y Mirta R. Barbosa
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Avda. A. del Valle 5737 - (7400) Olavarría. Argentina.
E-mail: lpico@fio.unicen.edu.ar; mbarbosa@fio.unicen.edu.ar.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales, soluciones exactas, soluciones numéricas,

Resumen
Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de fluidos son expresiones matemáticas de gran complejidad que involucran vectores y tensores en sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Su resolución permite obtener distribuciones de velocidades. Las soluciones analíticas sólo son posibles para geometrías sencillas. Las técnicas computacionales permiten obtener soluciones numéricas para comportamientos complejos. En este trabajo se obtuvieron soluciones exactas y numéricas. La gran versatilidad de estas últimas, permite una visión rápida de las modificaciones que sufren los perfiles de velocidad. Esto induce en el estudiante un espíritu crítico para la toma de decisiones, con aprovechamiento integral de sus propios recursos.

INTRODUCCIÓN

La mecánica de los fluidos es de fundamental importancia en la formación del ingeniero. Esta disciplina aporta los fundamentos teóricos para el análisis de las ecuaciones que gobiernan el movimiento, basándose en expresiones matemáticamente complejas que involucran magnitudes vectoriales y tensoriales en sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

La Ecuación de Continuidad, el Balance Microscópico de Cantidad de Movimiento y el Balance de Energía constituyen el basamento de la fluidodinámica.

La expresión lagrangiana de la ecuación de continuidad, Ec. (1), toma un marco de referencia móvil, por lo que sigue la trayectoria de la partícula y puede expresarse a través de una derivada material

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\ \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{v}} \tag{1}$$

O desde el punto de vista de Euler, Ec. (2), a través de derivadas espaciales en un punto fijo,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\underline{\nabla} \cdot \rho \underline{v} \tag{2}$$

donde: ρ: densidad del fluido; t: tiempo; v: velocidad del fluido.

El Balance Microscópico de Cantidad de Movimiento, Ecs. (3) y (4), también puede expresarse como:

Lagrange:
$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p - \underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} + \rho\, \underline{g} \tag{3}$$

Euler:
$$\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} = -\underline{\nabla} \cdot \rho \underline{v}\underline{v} - \underline{\nabla} p - \underline{\nabla} \cdot \underline{\tau} + \rho\, \underline{g} \tag{4}$$

donde: p: presión; τ: tensor esfuerzo viscoso; g: aceleración de la gravedad y el significado físico de cada término de las Ecs. (3) y (4) es:

$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt}$: Fuerzas inerciales por unidad de volumen

$\underline{\nabla} p$: Fuerzas de presión por unidad de volumen

$\underline{\nabla} \cdot \underline{\tau}$: Fuerzas viscosas por unidad de volumen

$\rho\, \underline{g}$: Fuerzas gravitatorias por unidad de volumen

$\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t}$: Velocidad de cambio en la aceleración local

$\underline{\nabla} \cdot \rho \underline{v}\underline{v}$: Cambio en la velocidad debida a las fuerzas convectivas.

Los sistemas de Ecs. (1) y (3) o Ecs. (2) y (4) no se pueden resolver analíticamente para sistemas complejos. Para geometrías sencillas y considerando las propiedades del fluido, es posible hacer simplificaciones obteniéndose sistemas resolubles. Por ejemplo, considerando fluido invíscido (μ = 0) se anula el término viscoso.

Cuando la viscosidad y la densidad son constantes, el fluido se denomina newtoniano y el balance se convierte en la ecuación de Navier – Stokes (NS). Para esta transformación se tiene en cuenta la ley constitutiva de la viscosidad de Newton, Ec. (5):

$$\underline{\tau} = -\mu\, \underline{\nabla v} \tag{5}$$

donde: μ: viscosidad del fluido y $\underline{\nabla v}$: tensor velocidad de deformación

La ecuación de NS puede expresarse como:

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{v} + \rho \underline{g} \tag{6}$$

Su resolución permite obtener las distribuciones de velocidades, tanto en estado estacionario como transitorio. Presenta tres tipos de soluciones: analítica exacta, aproximada y numérica. Las soluciones analíticas exactas sólo son posibles en casos de geometrías sencillas. Las aproximadas pueden aplicarse a flujos bidimensionales (por ejemplo flujo reptante y capa límite). Afortunadamente, el actual desarrollo de técnicas computacionales ofrece herramientas numéricas y software que han permitido ampliar notablemente el campo de las soluciones numéricas dado que son capaces de simular situaciones de mayor complejidad.

En este trabajo se estudia el comportamiento de flujos con diferente complejidad matemática. A través del mismo se incentiva al estudiante a correlacionar la física de los problemas con la matemática involucrada. Se analizan flujos simples para los cuales se obtuvieron la solución analítica exacta y la correspondiente numérica, a fin de comparar los resultados obtenidos mediante ambas metodologías. Por otra parte, se obtuvieron soluciones numéricas en sistemas en los que las soluciones exactas no son viables.

Adicionalmente, en el trabajo se muestran brevemente distintas alternativas de discretización. La estrategia de resolución contribuye a la representación de la distribución de las variables en estudio a través de cambios en el número de nodos, en el tamaño del paso, etc.

El estudio del movimiento de fluidos constituye un punto no sencillo en la formación del ingeniero. Cuando el estudiante cuenta con una sólida base matemática es capaz de interpretar adecuadamente el comportamiento del fenómeno físico involucrado. Desde las cátedras de Mecánica Aplicada y Fenómenos de Transporte se estimula a los estudiantes a explotar la potencialidad de la resolución numérica tanto para obtener soluciones como para analizar sus resultados.

CASOS ANALIZADOS

Sistemas con soluciones exactas

a. Flujo en una película descendente

En este caso se considera un fluido incompresible y newtoniano que desciende sobre una superficie plana inclinada en estado estacionario con flujo laminar y se desprecian los efectos de extremo. El sistema se puede representar gráficamente como se ilustra en la Figura 1.

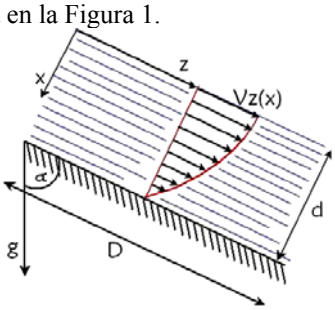


Figura 1. Flujo descendente sobre una pared plana inclinada un ángulo α respecto de la vertical.

Se utilizan coordenadas rectangulares, siendo $v_x = v_y = 0$. Por ser un sistema no confinado, no existe variación de presión, (dp/dx =0). Con lo anterior, la componente z de la ecuación de NS resulta:

$$\mu \frac{d^2 v_z}{dx^2} + \rho g \cos\alpha = 0 \tag{7}$$

Con condiciones de contorno:

$z = d \quad v_z = 0 \qquad$ y $\qquad z = 0 \quad dv_z/dx = 0$

la solución analítica exacta de la Ec. (7) es:

$$v_z = \frac{\rho g \cos\alpha \; d^2}{2\mu}\left[1 - \left(\frac{x}{d}\right)^2\right] \tag{8}$$

Para el problema anterior es posible la resolución numérica. La Figura 2 muestra la grilla de discretización del campo de flujo unidimensional utilizada para diferencias finitas. La discretización en diferencias finitas centrales correspondiente a la Ec. (7) conduce a la Ec. (9).

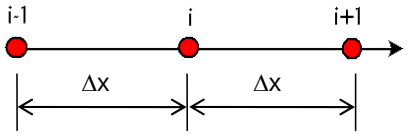


Figura 2. Grilla de diferencias finitas para campo de flujo unidimensional.

$$v_{i+1} - 2\,v_i + v_{i-1} = -\frac{\rho g \cos\alpha}{\mu}\Delta x^2 \tag{9}$$

donde: v_{i-1}: velocidad en el nodo i-1; v_i: velocidad en el nodo i; v_{i+1}: velocidad en el nodo i+1; Δx: distancia entre nodos, de valor constante.

$$\frac{d^2 v_i}{dx^2} \approx \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} \tag{10}$$

La posibilidad de contar con las soluciones analítica y numérica, permite validar la segunda y observar la importancia del número de nodos de la grilla considerada. La Figura 3 ilustra esta situación comparando la solución analítica y la numérica con 3, 10 y 100 nodos, respectivamente. También es posible analizar la influencia del ángulo α (Figura 4). Para $\alpha = 90º$ (posición horizontal) el fluido permanece estático; en tanto que cuando la pared se encuentra vertical la influencia de las fuerzas gravitatorias maximizan la velocidad. Lo anterior constituye una forma didáctica que permite la comprensión de los métodos matemáticos para abordar los aspectos físicos del problema.

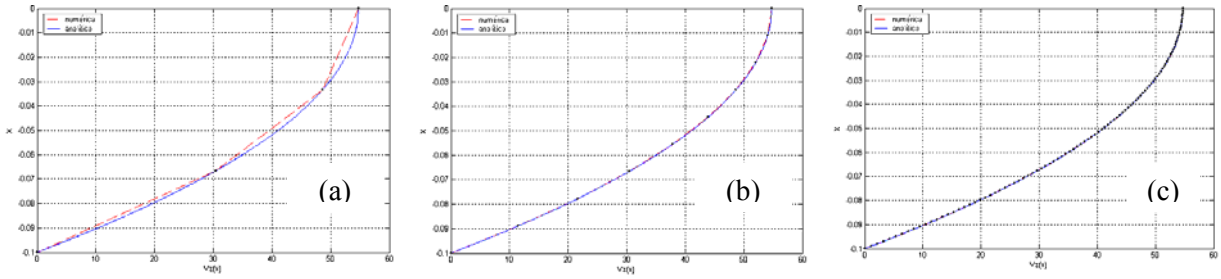


Figura 3. Perfiles de velocidad correspondientes a soluciones analítica y numérica de la Ec. (7). Número de nodos considerados: (a) 3 nodos, (b) 10 nodos, (c) 100 nodos.

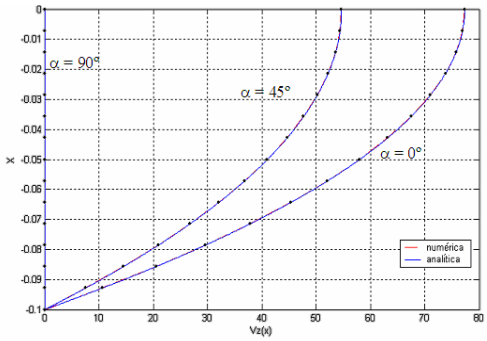


Figura 4. Perfiles de velocidad para glicerina deslizándose sobre una placa plana con diferentes inclinaciones.

b. Flujo entre dos placas infinitas y paralelas

Este tipo de flujo admite solución analítica exacta. No obstante, la solución numérica ofrece versatilidad para el análisis de los resultados. Se considera un fluido incompresible y newtoniano confinado entre dos placas planas paralelas y muy grandes para despreciar los efectos de borde. El flujo es laminar y en estado estacionario. La Figura 5 muestra el sistema para una diferencia de presiones tal que $p_2 > p_1$. La placa superior se mueve hacia la derecha, con velocidad v_u, y la inferior hacia la izquierda, con velocidad v_d..

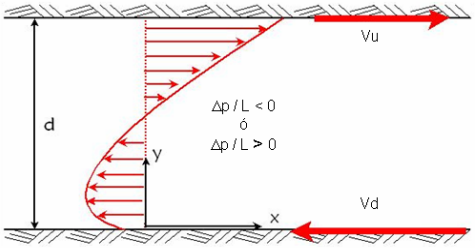


Figura 5. Flujo newtoniano e incompresible entre dos placas planas y paralelas.

En esta situación, la única componente del movimiento es en la dirección x, con lo que de la ecuación de NS resulta:

$$0 = -\frac{dp}{dx} + \mu\left(\frac{d^2 v_x}{dy^2}\right) \tag{11}$$

Con las condiciones de borde:

$$x = 0 \qquad\qquad v_x = v_d$$

$$x = d \qquad\qquad v_x = v_u$$

la solución analítica exacta a la que se arriba es:

$$v_x(y) = -\frac{\Delta P}{\mu \cdot L} \cdot y^2 + \left(\frac{v_u + v_d}{d} + \frac{\Delta p \cdot d}{2 \cdot \mu \cdot L} \right) \cdot y - v_d \tag{12}$$

donde: L: longitud de la placa; Δp: diferencia de presiones aplicada.

Mediante la discretización por diferencias finitas la Ec. (11) puede expresarse como:

$$v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} = -\frac{\Delta p}{\mu \cdot L} \cdot \Delta y^2 \tag{14}$$

A continuación se analizan diferentes situaciones de presión y velocidades. En las Figuras 6 y 7 se superponen las soluciones exactas y numéricas. Manteniendo fija la placa inferior y tomando v_u = 0.1 m/s, con Δp = 250 Pa, para glicerina se obtiene el perfil de velocidades de la Figura 6(a). La Figura 6(b) muestra los perfiles de velocidades para glicerina, mercurio y agua, con el objeto de observar la influencia de las propiedades del fluido, para las mismas condiciones de variables fluidodinámicas. En la Figura 6(c), se cambia el signo de la diferencia de presiones con lo que se revierte la dirección del flujo, a pesar de que la placa superior se sigue moviendo hacia la derecha. En la Figura 7(a) las dos placas se mueven hacia la derecha, con velocidades v_d = 0.2 m/s y v_u = 0.1 m/s, y se representa gráficamente los perfiles de velocidad para observar el efecto de la diferencias de presiones aplicadas entre -250 Pa/m < Δp/L < 230 Pa/m. La Figura 7(b) presenta el caso en que las placas se mueven en sentido opuesto, manteniendo los valores de diferencias de presiones en el mismo intervalo. La Figura 7(c) muestra la influencia de la viscosidad del fluido.

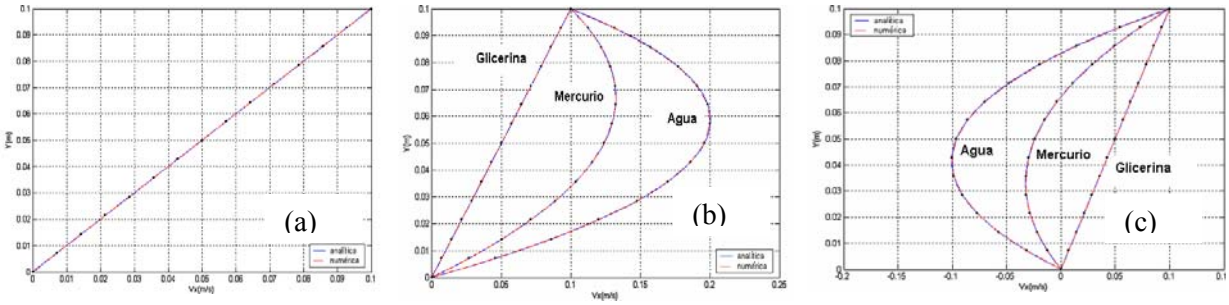


Figura 6. Perfiles de velocidades para distintos fluidos, en diferentes condiciones fluidodinámicas.

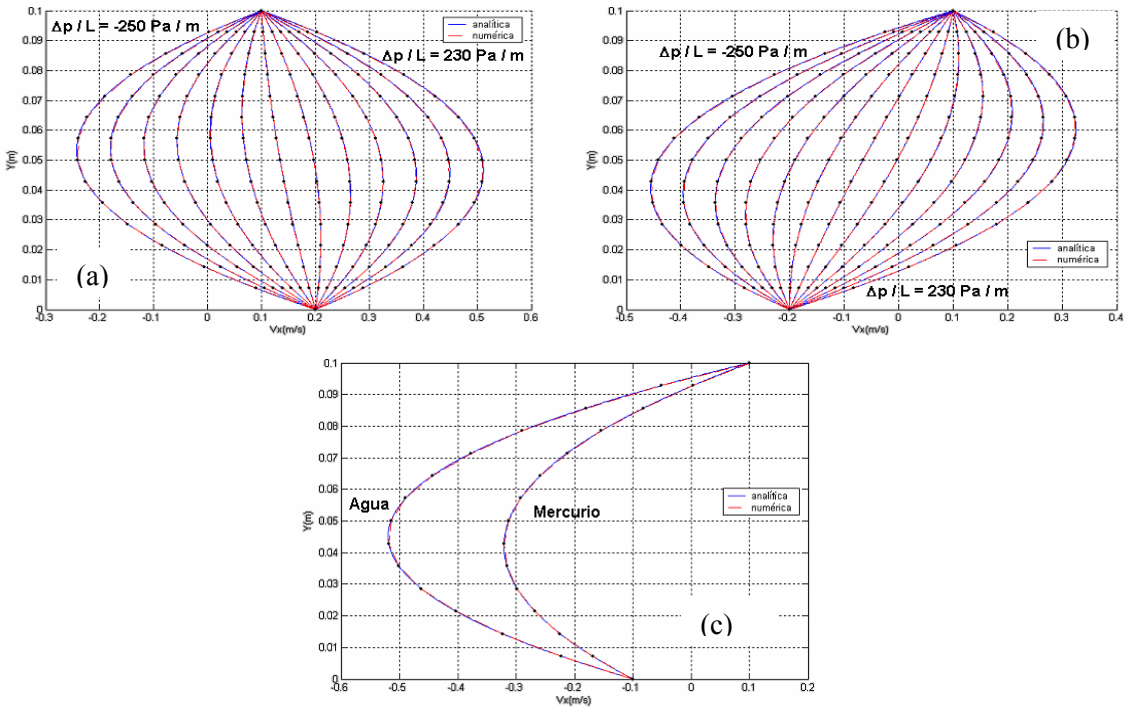


Figura 7. (a) y (b) Influencia de la diferencia de presiones sobre los perfiles de velocidades. (c) Influencia de la viscosidad del fluido

Sistemas con soluciones aproximadas

Cuando el flujo es no estacionario o existe más de una componente de la velocidad, las ecuaciones diferenciales resultantes se expresan en derivadas parciales y su resolución es matemáticamente dificultosa. En

particular, cuando el flujo tiene más de una componente de la velocidad existirá más de una componente en la ecuación de NS, originando sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales acopladas.

a. Flujo en conducto de sección rectangular

En este caso se tiene un sistema con flujo bidimensional, dado que es función de x e y, $v_z = v_z(x,y)$. Se considera el flujo laminar en estado estacionario y en un conducto horizontal de un fluido newtoniano e incompresible. El sistema estudiado se representa en la Figura 8.

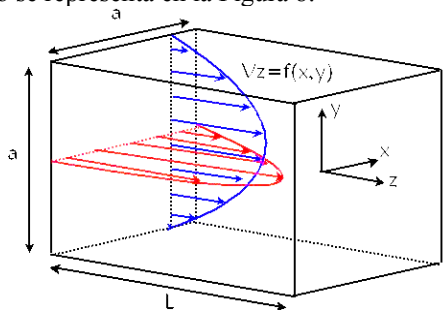


Figura 8. Distribución de velocidades en un conducto de sección rectangular.

En esta situación la ecuación de NS resulta:

$$-\frac{\Delta p}{\mu \cdot L} = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \tag{14}$$

Con las condiciones de borde:

$x = \pm a/2$	$v_x = v_y = 0$
$y = \pm a/2$	$v_x = v_y = 0$
$x = y = 0$	$dv_z/dx = dv_z/dy = 0$

En este caso no es posible la solución analítica exacta, por lo que se recurre a la solución numérica. La discretización de la Ec. (14) mediante diferencias finitas centrales es:

$$-\frac{\Delta p}{\mu \cdot L} \cdot \Delta x^2 \approx v_{i,j+1} + v_{i-1,j} - 4v_{i,j} + v_{i+1,j} + v_{i,j-1} \tag{15}$$

La grilla de diferencias finitas utilizada para la discretización de la sección transversal del conducto rectangular e muestra en la Figura 9. Dado que la velocidad es función de dos variables, $v_z = v_z(x,y)$, la grilla adoptada es bidimensional.

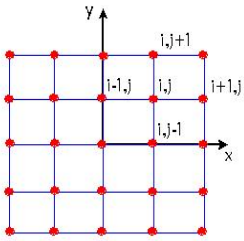


Figura 9. Grilla de diferencias finitas para campo de flujo bidimensional.

Desde el punto de vista fluidodinámico, se puede observar la influencia de las propiedades físicas del fluido y de la diferencia de presiones aplicada al mismo. En particular, para mercurio, con $\Delta p/L = 20$ Pa/m, a = 0.1 m y 30 nodos, se obtiene la solución que se muestra en la Figura 10.

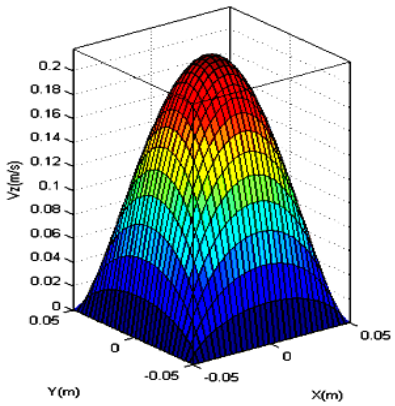


Figura 10. Distribución de velocidades para el flujo de mercurio en un conducto de sección rectangular.

b. Flujo en estado transitorio

Se considera un sistema de placas planas, paralelas e infinitamente grandes. El fluido es newtoniano e incompresible y se mueve con flujo laminar. La Figura 11 ilustra la situación con las placas superior e inferior moviéndose a v_u y v_d, respectivamente. Como se trata de un fluido confinado, es posible aplicar una diferencia de presiones. En esta situación, la ecuación de NS resulta:

$$-\frac{\Delta p}{\rho \cdot L} = \frac{\partial v_x}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \tag{16}$$

donde: ν: viscosidad cinemática

La discretización de la Ec. (16) mediante diferencias finitas es:

$$\frac{\Delta p}{\rho \cdot L} \approx \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot v_i^{l+1} - \frac{\nu}{\Delta y^2} \cdot v_{i-1}^{l} + \frac{2 \cdot \nu}{\Delta y^2} \cdot v_i^{l} - \frac{\nu}{\Delta y^2} \cdot v_{i+1}^{l} + \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \cdot v_i^{l-1} \tag{17}$$

En la Figura 12 se muestra la grilla de diferencias finitas utilizada para la discretización de los perfiles de velocidad, considerando el tiempo como parámetro

La evolución de los perfiles de velocidad para glicerina fluyendo entre placas se muestra en la Figura 13. La separación entre placas es d = 0.1 m, cuyas respectivas velocidades son v_u = 0.3 m/s y v_d = 0.5 m/s, con Δp = 0. Se considera que el fluido se encuentra inicialmente en reposo y la duración máxima del evento es de 4 s. Cada una de las soluciones anteriores se obtuvo con una grilla de 100 nodos, para intervalos de tiempo de 0.2 s.

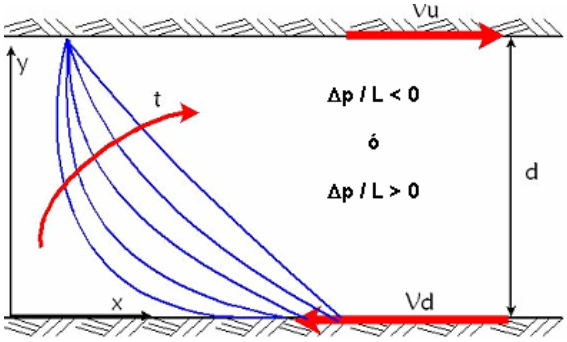


Figura 11. Flujo transitorio entre dos placas planas paralelas.

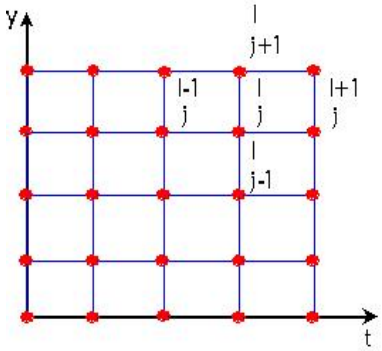


Figura 12. Grilla de diferencias finitas para campo de flujo transitorio.

Para el mismo valor de v_u, pero con la placa inferior moviéndose en sentido contrario a 0.35 m/s y considerando Δp = 0, los perfiles de velocidad correspondientes a distintos tiempos entre el reposo inicial y un tiempo máximo de 1 s se aprecian en la Figura 14. Estas soluciones se obtuvieron también con una grilla de 100 nodos, para intervalos de tiempo de 0.066 s.

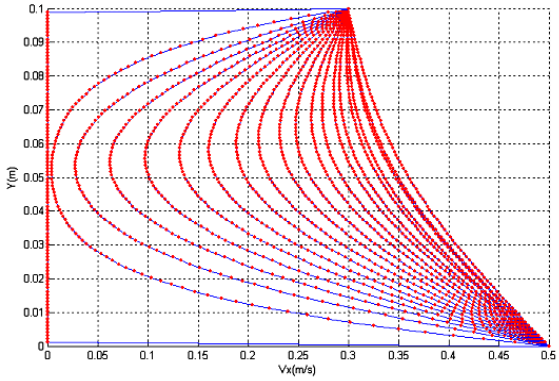


Figura 13. Evolución temporal de los perfiles de velocidad para glicerina. Placas moviéndose en el mismo sentido.

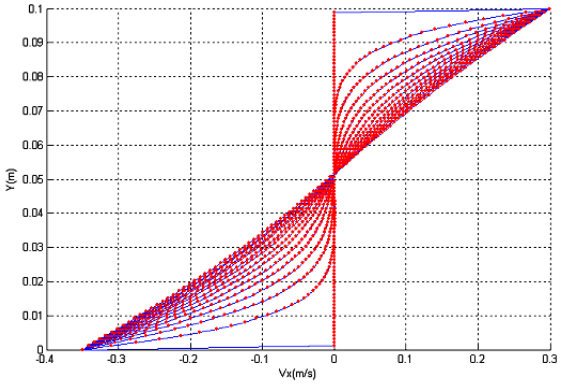


Figura 14. Evolución temporal de los perfiles de velocidad para glicerina. Placas moviéndose en sentidos opuestos.

En el siguiente caso se considera v_u = 0.3 m/s y v_d = 0.5 m/s, moviéndose las placas en el mismo sentido, con Δp/L = 40 Pa/m. La Figura 15 muestra los perfiles de velocidad para distintos tiempos hasta un valor máximo de 2 s. La grilla considerada consta de 100 nodos y los intervalos temporales adoptados son de 0.1 s.

A fin de observar la deformación que sufre el fluido en los primeros instantes del movimiento a partir del reposo, se modificó la duración del evento. Por otra parte, se incrementa la diferencia de presiones para visualizar mejor la deformación, Δp/L = 500 Pa/m. La simulación del movimiento lograda con estas condiciones se presenta en la Figura 16(a). Nuevamente, se empleó una grilla de 100 nodos con intervalos temporales de

0.035 s. La Figura 16(b) muestra una situación análoga a la anterior, considerando v_d = 0.4 m/s en sentido contrario, con una duración del evento de 1 s. La grilla tiene 100 nodos con intervalos temporales de 0.05 s.

La importancia de la influencia de la viscosidad en el flujo de fluidos se puede observar en la Figura 17. Para agua y mercurio, de muy bajas viscosidades, la transferencia de cantidad de movimiento lograda a t = 3 s es mucho menor que la correspondiente al aceite de motor y la glicerina, debido a las altas viscosidades de los dos últimos fluidos.

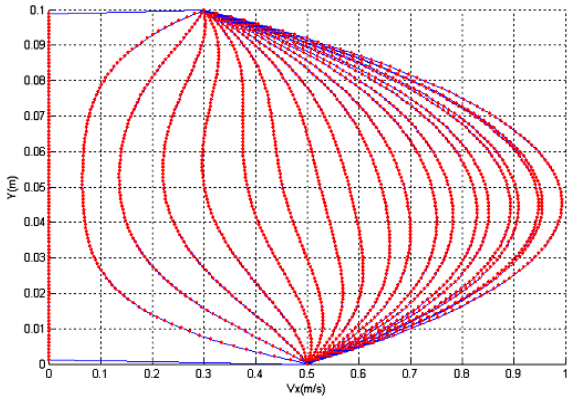


Figura 15. Influencia de la diferencia de presiones sobre los perfiles de velocidad para distintos tiempos.

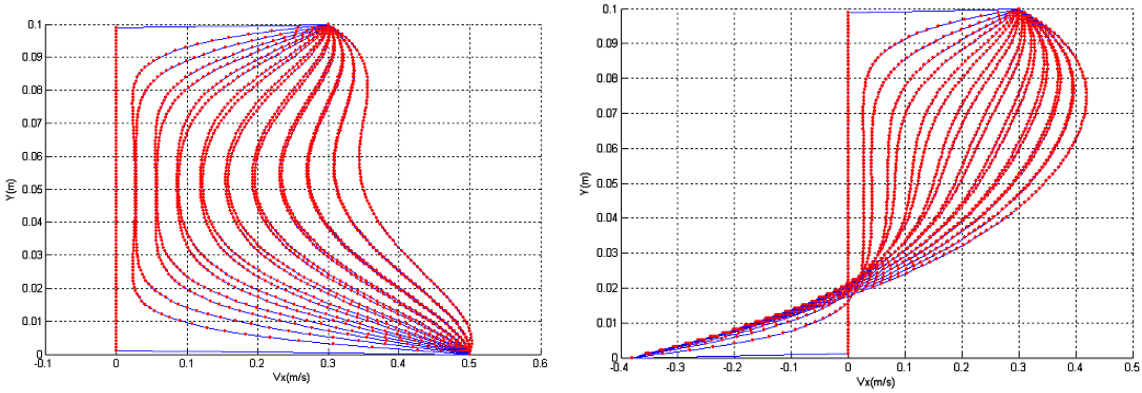


Figura 16. Perfiles de velocidades en los primeros instantes del movimiento, con Δp/L = 500 Pa/m. (a) v_u = 0.3 m/s y v_d = 0.5 m/s. (b) v_u = 0.3 m/s y v_d = - 0.4 m/s

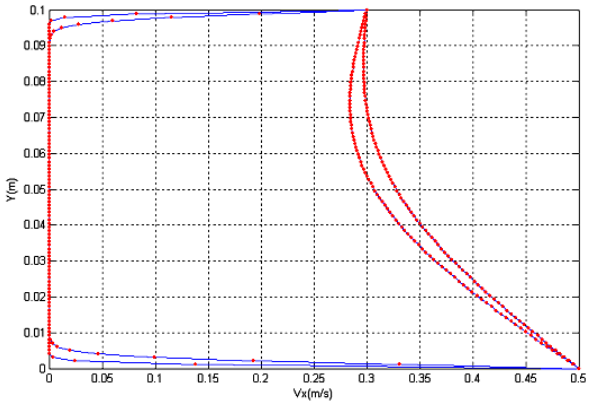
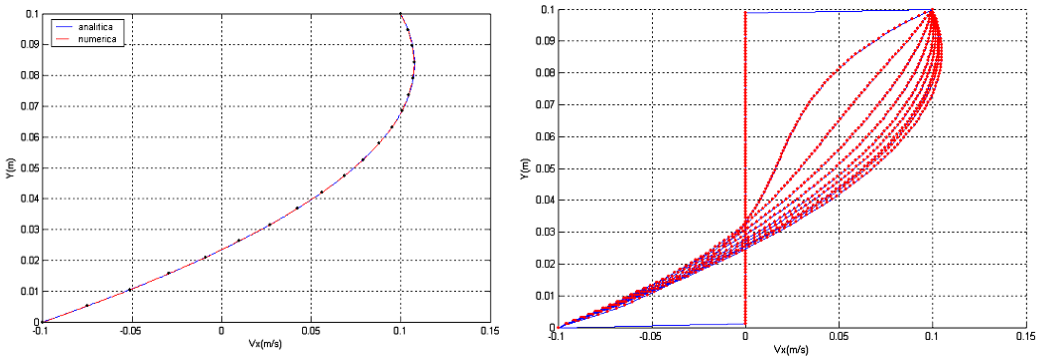


Figura 17. Influencia de la viscosidad de los fluidos sobre los perfiles de velocidades.

En la Figura 18(a) se ilustra el perfil de velocidades en estado estacionario y en la Figura 18(b), los perfiles correspondientes a diferentes tiempos para el estado transitorio.

Los resultados muestran que el perfil de velocidades correspondiente a la finalización del evento transitorio y el obtenido para régimen estacionario coinciden. Esto pone de manifiesto la bondad del método de diferencias finitas, ya que aunque las ecuaciones diferenciales involucradas en cada caso son diferentes, la resolución de las mismas conduce a un resultado común. En el estado estacionario se trata de ecuaciones diferenciales espaciales de primer y segundo órdenes en derivadas parciales, en tanto que en el estado transitorio la descripción matemática del problema corresponde a una ecuación de primer orden en el tiempo y de segundo orden en el espacio.

Es de notar que si bien los tiempos del transitorio son pequeños, la discretización permite una buena visualización de la deformación que sufre el fluido frente al esfuerzo aplicado.



(a) (b)

Figura 18. Perfiles de velocidades para: (a) Estado estacionario. (b) Régimen transitorio.

CONCLUSIONES

Cuando son posibles las soluciones exactas puede apreciarse una buena correlación entre éstas y las soluciones numéricas, especialmente cuando se incrementa el número de nodos, minimizándose el error cometido en las aproximaciones.

La gran versatilidad de las soluciones numéricas, en las que se puede cambiar variables fluidodinámicas (condiciones de contorno de presión y velocidad) y propiedades físicas de los fluidos, permite una visión rápida de las modificaciones que sufren los perfiles de velocidad. Lo anterior constituye una vía para reforzar los conceptos teóricos y para inducir en el estudiante el espíritu crítico y la toma de decisión con aprovechamiento integral de los recursos.

La potencialidad del método de diferencias finitas para la resolución de las ecuaciones que gobiernan el movimiento del fluido se pone de manifiesto tanto en los sistemas con solución analítica exacta como en los que no la tienen.

Es importante que el ingeniero cuente con una sólida formación matemática, dado que la misma le permite realizar un análisis fundamentado de los fenómenos físicos. La carencia de este conocimiento constituye un obstáculo en el abordaje de la gran mayoría de los problemas fluidodinámicos.

BIBLIOGRAFÍA

Fluid mechanics. Fundamentals and applications. Y.A. Çengel y J.M. Cimbala. McGraw-Hill Co. 2005.
Fundamentals of fluid mechanics. B.R. Munson, D.F. Young and T.H. Okiishi. John Wiley & Sons. 1990.
Fundamentals of momentum, heat and mass transfer. J.R. Welty, C.E. Wicks and R.E. Wilson. John Wiley & Sons. 1984.
Introduction to Fluid Mechanics. S. Whitaker. Krieger Publishing Company. 1981.
Fenómenos de Transporte. R.B. Bird, W.E. Stewart, y E.N. Lightfoot. 2da. Ed. Limusa Wiley; México. 2006.
Computational Fluid Dynamics. T.J. Chung. Cambridge University Press; United Kingdom. 2002.
Fundamentals of Computational Fluid Dynamics. Lomax H, Pullian T. NASA research center. Toronto. 1999.
Computational Methods for Fluid Dynamics. J.H. Ferziger, M. Peric. Springer. Berlin. 2002.