DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL DE LUCES POR COMPUTADORA

Federico Bonifacich, Erica Hinrichsen, Valeria Leoni, Ana Murinigo.
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario. Argentina
fbonifacich@gmail.com, ericah@fceia.unr.edu.ar, valeoni@fceia.unr.edu.ar, anamurinigo@gmail.com
Aplicaciones de la matemática
Palabras claves: modelización, sistemas lineales de ecuaciones, software matemático.

Resumen: En este trabajo, resolvemos un problema planteado por la empresa KSoft S.A. que consiste en determinar la posición de una persona desplazándose dentro de un área, con el fin de realizar un seguimiento de la misma. En primer lugar mostramos una modelización del problema. A continuación, utilizando herramientas básicas de Algebra y Geometría y un software matemático que trabaja simbólicamente, obtenemos la solución del mismo. Verificamos que la solución obtenida puede ser implementada computacionalmente. A través del diseño de un programa en lenguaje *C,* realizamos simulaciones del problema. Por último, abordamos una generalización del mismo.

Introducción

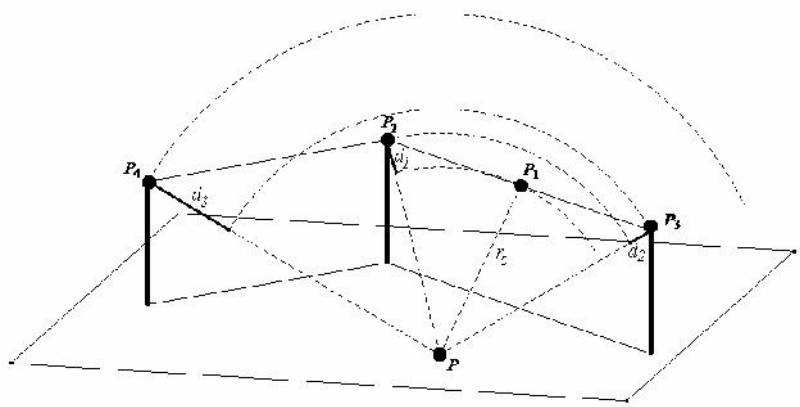
La empresa KSoft S.A., de Rosario, Santa Fe, dedicada a brindar soluciones informáticas a empresas, nos propuso trabajar en la resolución de un problema en el desarrollo de un sistema de control de luces por computadoras. Se realizó una convocatoria destinada a alumnos de las distintas carreras de nuestra Facultad, para abordar el problema de manera interdisciplinaria.

El objetivo consiste en determinar la posición de una persona, desplazándose dentro de un área dada, con el fin de realizar un seguimiento de la misma a través del direccionamiento de artefactos lumínicos hacia ella.

Se dispone de cuatro receptores de ultrasonido, ubicados a la misma altura desde el suelo, tres de los cuales están alineados pues se encuentran apoyados sobre una misma viga. Un emisor de pulsos periódicos de ultrasonido se coloca sobre la persona. Además, los receptores están conectados a un microcontrolador. Se inicia el conteo de tiempo en el microcontrolador, el cual queda a la espera de que los receptores informen la llegada del pulso. De esta manera, se obtiene el tiempo transcurrido entre las recepciones del pulso en cada receptor. A partir de estos tiempos, se propone determinar la posición de la persona.

Desarrollo

Para abordar el problema, notamos con P_1, P_2, P_3 y P_4 a los puntos del espacio en los que se encuentran los receptores, en el orden en el que reciben el pulso, es decir, si $i < j$, entonces P_i recibe el pulso antes que P_j. Además, si P representa al punto emisor y $d(P, A)$ indica la distancia entre los puntos P y un punto A cualquiera, los tiempos obtenidos nos permiten calcular las distancias $d_i = d(P, P_{i+1}) - d(P, P_i)$, para $i = 1, 2, 3$. La siguiente figura se muestra un esquema de la situación.



De esta manera, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales, cuyas incógnitas son la abscisa y la ordenada de *P*.

$$\begin{cases} d(P,P_2) & - & d(P,P_1) & = & d_1 \\ d(P,P_3) & - & d(P,P_1) & = & d_1 + d_2 \\ d(P,P_4) & - & d(P,P_1) & = & d_1 + d_2 + d_3, \end{cases}$$

o, equivalentemente, si (x_i, y_i, z_i) representa la posición del receptor P_i, para $i = 1, \ldots, 4$, y el emisor P tiene coordenadas (x, y, z), tenemos

$$\begin{cases} \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}-\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} &= d_1 \\ \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2}-\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} &= d_1+d_2 \\ \sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2+(z-z_4)^2}-\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} &= d_1+d_2+d_3. \end{cases} \quad [1]$$

Notando con r_0 a $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$ e introduciendo esta ecuación a nuestro sistema, obtenemos:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2} &= r_0 \\ \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2} &= r_0+d_1 \\ \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2} &= r_0+d_1+d_2 \\ \sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2+(z-z_4)^2} &= r_0+d_1+d_2+d_3. \end{cases} \quad [2]$$

Trabajando algebraicamente en [2] y teniendo en cuenta que $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$, pues los receptores se encuentran a la misma distancia desde el suelo, obtenemos el siguiente sistema equivalente a [2]:

$$\begin{cases} (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 &= r_0^{\,2} \\ 2(x_1-x_2)x+2(y_1-y_2)y-2d_1r_0 &= -x_2^{\,2}+x_1^{\,2}-y_2^{\,2}+y_1^{\,2}+d_1^{\,2} \\ 2(x_2-x_3)x+2(y_2-y_3)y-2d_2r_0 &= -x_3^{\,2}+x_2^{\,2}-y_3^{\,2}+y_2^{\,2}+2d_1d_2+d_2^{\,2} \\ 2(x_3-x_4)x+2(y_3-y_4)y-2d_3r_0 &= -x_4^{\,2}+x_3^{\,2}-y_4^{\,2}+y_3^{\,2}+2(d_1+d_2)d_3+d_3^{\,2}. \end{cases} \quad [3]$$

Las últimas tres ecuaciones en [3] constituyen un subsistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, el cual debe ser satisfecho por las coordenadas del punto emisor P.

Resultados

Utilizando un software matemático que trabaja simbólicamente, Maple 11, obtenemos la solución para el subsistema lineal, la cual satisface además, la ecuación cuadrática $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 = r_0^{\,2}$.

A continuación, verificamos que la solución obtenida puede ser implementada computacionalmente, a través del cálculo de los tiempos requeridos por las distintas operaciones matemáticas que el microcontrolador debe realizar y del diseño de un programa en lenguaje *C* que nos permite realizar simulaciones.

Una vez que la solución fue implementada satisfactoriamente por KSoft, decidimos abordar una generalización del problema original, que consiste en suponer que los receptores no están ubicados a la misma altura desde el piso, pero manteniendo la hipótesis de que tres de ellos están alineados. De esta manera, los receptores están contenidos en un plano que no es paralelo al piso. En este caso, se realiza una rotación del sistema de los ejes coordenados ortogonales originales $(Oxyz)$, de manera tal que el "nuevo" eje z resulta perpendicular al plano de los cuatro receptores. De esta manera, el nuevo problema se reduce al problema original.

Conclusiones y extensiones del problema

Cabe destacar que la solución del sistema [1] puede interpretarse como la intersección de tres hiperboloides. Entre otras, esta situación se presenta en modelos de problemas que pretenden localizar un móvil que emite una señal, dadas las diferencias de arribo de la misma, a cuatro estaciones establecidas. Esta técnica se denomina *Posicionamiento Hiperbólico o Multilateración* y es ampliamente utilizada como método de localización, por ejemplo, con del Sistema Global de Posicionamiento (GPS). Si bien existe un algoritmo para calcular la posición exacta de un objetivo móvil con esta técnica, su implementación puede requerir de *hardware* no disponible para el cliente. La solución presentada por nosotros, apoyada en el hecho de que los receptores están fijos y en un mismo plano, es de simple implementación y requiere de tecnología de muy bajo costo.

Por otra parte, el sistema [1] puede ser interpretado como uno cuya solución es la esfera con centro en el emisor P y de radio r_0, tangente a otras tres esferas, éstas con centros ubicados en P_2, P_3 y P_4 y de radios r_0+d_1, $r_0+d_1+d_2$ y $r_0+d_1+d_2+d_3$, respectivamente. Desde este punto de vista, el problema se corresponde con una generalización de un histórico problema de Apolonio en tres dimensiones presentado por Pierre de Fermat en 1629.

Por último y entre otros, modelos como el presentado en este trabajo, están relacionados a la farmacología, en el estudio de la factibilidad de insertar una molécula en el hueco producido por otras cuatro.

Es nuestro propósito estudiar en un futuro próximo, la factibilidad de la aplicación de la técnica *Posicionamiento Hiperbólico* a estas extensiones del problema.

Referencias bibliográficas

1- Bucher, R., Misra, D.: *A Synthesizable VHDL Model of the Exact Solution for Three-dimensional Hyperbolic Positioning System*, VLSI Design, 2002 Vol. 15 (2), pp. 507–520.

2- Lewis, R. Bridgett, S.: *Conic Tangency Equations and Apollonius Problems in Biochemistry and Pharmacology*, Mathematics and Computers in Simulation, 2003 Vol. 61 (2), pp. 101–114 .
3- Nakos, G. y Joyner, D.: *Algebra Lineal con aplicaciones*, Ed. Thomson, 1999.
4- Santaló, L. A.: *Vectores y Tensores con sus aplicaciones*, Ed. Eudeba, 1976.