EL EJE VITAL DE LOS PROCESOS DE VALIDACIÓN: EL LENGUAJE MATEMÁTICO

D`Andrea, R.E.[1] **y Sastre Vázquez, P.**[2]

(1) Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería. Rosario. Argentina.
(2) Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Bs.As. Facultad de Agronomía. Azul. Argentina
rodolfoedandrea@yahoo.com.ar; pasava2001@yahoo.com.ar

Investigación Educativa
Palabras Claves:
lenguaje matemático; lenguaje natural; lenguaje simbólico; visualización; conjunción; disyunción

RESUMEN

Los estudiantes que ingresan a la Universidad a Carreras de grado de Ingeniería y Ciencias Naturales se enfrentan con numerosas dificultades. Entre ellas, la consecuencia de la modalidad del ciclo medio que se limita a la realización de ejercicios de aplicación de algoritmos mientras que los cursos de Matemática destinados a este tipo de estudiantes requieren del sustento teórico para los desarrollos procedimentales. Ocurre entonces que para comprender tales desarrollos teóricos, se requiere que el sujeto de aprendizaje conozca el lenguaje matemático, clave vital para acceder a los procesos de validación, que caracterizan a la epistemología propia de la Ciencia Matemática. En este trabajo se reseñan algunas investigaciones documentales sobre lenguaje matemático, haciéndose hincapié en una realizada en Facultad de Química e Ingeniería "Fray Rogelio Bacon" de UCA ROSARIO con el consecuente análisis de los resultados que desembocan en reflexiones factibles de generar investigaciones derivadas.

INTRODUCCIÓN

En general, los estudiantes ingresantes a Carreras universitarias de grado de Ingeniería y Ciencias Naturales que utilizan Matemática como herramienta presentan numerosas dificultades. En particular, al iniciar sus cursos de Matemática, surgen obstáculos epistemológicos y didácticos que interfieren el proceso de enseñanza-aprendizaje. Uno de los más notables es su incompetencia en el manejo del *lenguaje matemático*.

Según Gascón (1997) la actividad matemática en los estudios de secundaria se puede calificar de *mostrativa*, es decir, basada en recordar, ordenar y sistematizar conocimientos fundamentados en el sentido común. En este nivel educativo las definiciones se realizan mediante comentarios y ejemplos concretos, haciendo un uso muy limitado del *lenguaje matemático*. Por otra parte, este autor considera que en la universidad los estudios de Matemática se centran en una actividad que podemos llamar *demostrativa*, cuyo objetivo principal es la construcción de conocimientos matemáticos, de manera que se utiliza de forma rigurosa el lenguaje mencionado, con su particular estructura y simbología.

El desconocimiento de los ingresantes sobre el lenguaje matemático es el causante de la producción de numerosos errores de construcción y de interpretación, dificultando el proceso de incorporación de nuevas estructuras conceptuales.

Se intenta entonces, poder dar alguna respuesta a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las habilidades cognitivas implicadas en la adquisición del lenguaje matemático? ; ¿Cuál es el proceso cognitivo característico en la apropiación del lenguaje matemático?, ¿Los modos de estudiar y aprender matemática son facilitadores u obturadores del desarrollo de determinadas habilidades cognitivas?

MARCO TEÓRICO

El lenguaje matemático posee una simbología propia que hace a la epistemología de esta disciplina, la que no debe ignorarse cualquiera sea el destinatario del Curso de Matemática universitaria. Es fundamental conocer el significado de este lenguaje para poder interpretar lo que se quiere decir, y para su instrumentación en el método que le es propio a esta Ciencia.

El Método matemático se basa en el raciocinio y la abstracción. El raciocinio se manifiesta a través de la deducción, manejando la Ciencia Matemática a través de su específico lenguaje, elementos tales como: conceptos primitivos, definiciones, y proposiciones. Estos elementos son los instrumentos a través de los cuales se pueden llevar a cabo los procesos de validación, que hacen a la epistemología de esta Ciencia.

Las proposiciones que maneja el lenguaje matemático son de tres tipos: *axiomas qu*e son proposiciones verdaderas, que se aceptan intuitivamente, y que no necesitan ser demostradas; *proposiciones verdaderas* que a diferencia de cualquier proposición común del lenguaje cotidiano requieren inexorablemente para tener validez, ser demostradas. Si éstas son trascendentes dentro de la comunidad matemática se las considera estrictamente un *Teorema*, ya que las mismas expresan resultados claves de avance científico dentro de esta ciencia.

También vale destacar la existencia de *Lemas*, que son proposiciones verdaderas que necesitan de la prueba para el sostén de su verdad y que forman parte de un teorema más largo y finalmente están los *Corolarios***,** que son proposiciones que siguen inmediatamente a un teorema, o sea que resultan su consecuencia.

Finalmente una proposición matemática que se cree verdadera pero que no ha sido demostrada se denomina *conjetura o hipótesis* y existen también tipos de *proposiciones falsas*, es decir que se cumplen para algunos casos particulares, y cuya prueba consiste en la exhibición de un contraejemplo.

Marcipar Katz (2001) identifica y determina los supuestos subyacentes al plantear la matemática como lenguaje del modo siguiente:
1. El lenguaje utilizado en Matemática no sólo es una expresión en la que se "comunican" los conceptos sino que es a través de el con el que se construye el concepto mismo.
2. Uno de los factores que intervienen en la crisis del aprendizaje matemático es la manera en que los docentes comunican los contenidos matemáticos, debido al empleo del difundido lenguaje autosuficiente y formal.
3. El lenguaje autosuficiente y formal conlleva a que la matemática aparezca hoy como una disciplina extremadamente abstracta, extremadamente pura, que escapa totalmente (o casi) a los condicionamientos sociales.
4. El conocimiento matemático está íntimamente ligado a las habilidades lingüísticas matemáticas.

Sin embargo para el abordaje de cualquier curso de Matemática universitaria dirigido a estudiantes de Ingeniería y Ciencias Naturales de forma en que pueda cumplirse lo expresado se requiere del manejo del Lenguaje matemático en todas sus facetas.
Tal manejo para que llegue a la coronación del desenvolvimiento adecuado del mismo debe transitar sus tres facetas ya que este se presenta de modos diferentes, es decir como: a) un *Lenguaje Coloquial* con el que puede expresarse en forma oral o escrita; b) un *Lenguaje Simbólico* que ofrece la ventaja de ser más sintético y más claro para la generación de argumentaciones propias de las pruebas que permiten el sostén de proposiciones a demostrar y c) como un *Lenguaje gráfico* que sirve para aclarar o interpretar conceptos o proposiciones a través de la visualización.
Debe destacarse que en los tres casos se trata del mismo lenguaje, pero expresado de modo diferente. Pero la clave del lenguaje matemático es el lenguaje simbólico que es la esencia de la Matemática misma, aunque a diferencia de los otros dos requiere específicamente que quién se inicie en el mismo deba recorrer un camino hacia la abstracción.

La faceta inicial y más primitiva del lenguaje es la coloquial, que es esencial, ya que permite la expresión a través de la palabra, o sea del lenguaje natural; pero le sigue o puede considerarse en correlato horizontal, su faceta gráfica a través de la visualización, la que permite la expresión a través de un simple esquema o bosquejo a mano alzada o un sofisticado software matemático.
De Guzmán (1996), al referirse a la Visualización Matemática, se manifiesta claramente expresando: *"Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa… Los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en que se mueven…. Las ideas básicas del análisis elemental, por ejemplo, orden, distancia, operaciones entre números, nacen de situaciones bien concretas y visuales….. Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas. Que la visualización constituya un aspecto extraordinariamente importante de la actividad matemática es algo totalmente natural si se tiene en cuenta la naturaleza misma de la matemática."*
Así, para la generación posmoderna de estudiantes inserta en una *"cultura de videoclip"* (Economist.com, 2006), que se encuentra cursando Carreras de grado universitarias, el estímulo del lenguaje gráfico es vital por un lado por el acompañamiento que produce en su propio lenguaje visual y por otro por la comprensión y apropiación que genera a la hora del abordaje de cualquier estructura conceptual. Diametralmente opuesto a la tendencia marcada por el bourbakismo, que desde la mitad del siglo pasado hizo hincapié en la comprensión de las estructuras matemáticas desde la exposición formal, predominando exclusivamente el lenguaje simbólico, sin importar la impronta visual.

El lenguaje simbólico, exclusivamente inherente a la Ciencia Matemática, es la codificación del visual y coloquial, establecido como un sistema de conocimientos bien estructurados que se ha ido desarrollando a lo largo de la historia, y a diferencia de otras ciencias tiene el propósito de caracterizar los hechos y reglas de razonamiento con precisión alejando así las ambivalencias propias del lenguaje natural.
A propósito del carácter instrumental del lenguaje natural planteado por Vigotsky (1988) en la formación de las estructuras cognoscitivas del sujeto, es necesario considerar el mismo como un producto de la cultura, un producto social en constante evolución. Por lo tanto para Vigotsky la educación es una actividad social en la que se crean entornos alrededor del sujeto que pueden beneficiar o perjudicar su aprendizaje, los entornos referidos por Vigotsky denominados como ZDP (zonas de desarrollo próximo) no se reducen al papel de la escuela en la formación educativa, sino que existen entornos como la misma sociedad con sus estereotipos, los medios de información, el entorno familiar, y también hay entornos que se circunscriben al propio desarrollo del sujeto en cuanto al relacionamiento de sus conocimientos actuales, los conocimientos que le falta estructurar y los

conocimientos que está tratando de sistematizar, otro entorno que no deja de ser menos importante es el contexto histórico en los que el conocimiento se desarrolla.

A este respecto, Mariscal Antezana (2003) postula con claridad y elocuencia: *"El lenguaje tiene una utilidad instrumental porque es un conjunto de símbolos dotados de reglas de construcción y su aplicación en la comunicación genera lo que se llama la interpretación semántica, es decir que cuando se intenta comunicar alguna idea se forma un vínculo del emisor y el receptor por medio de un canal; el canal no es más que una secuencia de símbolos dotados de alguna estructura (una frase, un discurso, etc.). El uso adecuado del lenguaje es uno de los afluentes para el aprendizaje de la matemática, y desde el principio de su formación, el estudiante no dimensiona la importancia que tiene la captación del lenguaje que es tanto como la acción del pensar. De modo que el entorno no le permitió diferenciar la comunicación natural de la comunicación matemática, así el entendimiento de los problemas pasa necesariamente por una adecuada utilización del lenguaje de ésta Ciencia".*

En la investigación realizada en la Facultad de Química e Ingeniería "Fray Rogelio Bacon" de UCA ROSARIO por D´Andrea (2010) donde como producto del diagnóstico surgido de los trabajos de campo de la misma llevados a cabo durante 2009 y consistentes en: Encuestas a Docentes, estudiantes y la realización de una serie de ejercicios de validación a los efectos de propiciar una adecuada utilización del lenguaje matemático, se propone un modelo didáctico para la presentación, reproducción y evaluación de teoremas y proposiciones a demostrar. A continuación se citan textualmente las fases iniciales de tal presentación, que consta de 11 peldaños ascendentes, a tener en cuenta para el desarrollo en el estudiante del pensamiento lógico–abstracto en el abordaje de demostraciones matemáticas. Se citan solamente los cinco primeros que hacen al objetivo de este trabajo cuya dirección enfoca exclusivamente al lenguaje matemático.
"Si se considera un hipotético teorema o proposición matemática a demostrar, las estrategias didácticas traducidas a una secuencia de tareas a los efectos de la presentación en clase de las mismas a los efectos de generar un aprendizaje comprensivo; significativo y constructivo con una perspectiva implícita que permita desarrollar un pensamiento lógico que pueda ser extrapolado a otras disciplinas son las siguientes:

I. *<u>Presentación del teorema o proposición a demostrar</u>: En este punto se presenta inicialmente el teorema o proposición a demostrar al estudiante textualmente, en su estructura formal.*

II. *<u>Interpretación coloquial</u>: En esta fase se plantea al estudiante que intente explicar coloquialmente qué entiende de lo expuesto formalmente. Esta fase podría ser expuesta por el docente conjuntamente con el grupo de estudiantes interactuando, pero lo primero es vital si se quieren construir aprendizajes verdaderamente significativos. Con esto quedaría cubierta una primera etapa de la presentación a través del lenguaje coloquial, que es el más primitivo y esencial para el estudiante, de modo de construir la apropiación desde los niveles más elementales. Esta apropiación permitirá la comprensión del teorema o proposición a demostrar, de modo que si no se lograra este efecto, no tiene sentido seguir adelante con las siguientes estrategias.*

III. *<u>Verificación</u>: En esta etapa el estudiante es instado por el docente a verificar el teorema o proposición a demostrar por sí mismo debiendo generar mínimamente dos ejemplos. Debe destacarse que esta etapa como la siguiente tienen órdenes indistintos.*

IV. *<u>Visualización</u>: En esta etapa el estudiante nuevamente es instado por el docente a visualizar el teorema o proposición a demostrar con lo que se constituye una segunda etapa del lenguaje matemático en la apropiación de esta estructura, complementándose con el lenguaje coloquial y retroalimentándose. La visualización puede ser una interpretación geométrica de la proposición a demostrar, o bien una reproducción gráfica de lo postulado por el teorema o proposición a demostrar a través de un simple esquema, dibujo, figura, o a través del software.*

V. *<u>Simbolización</u>: Luego de la explicación coloquial, la verificación y la visualización vuelve a exponerse formalmente el teorema o proposición a demostrar, es decir de forma simbólica, porque ya con la traducción de la estructura del teorema a través de los lenguajes coloquial y visual, la comprensión de la expresión simbólica del teorema o proposición a demostrar ya tiene otra accesibilidad para el estudiante y en esta etapa el estudiante a través de la comprensión del mismo por vía de los lenguajes mencionados, es capaz de la comprensión simbólica, penetrando de esta forma en el vital proceso de abstracción, imprescindible para llevar a cabo la prueba formal."*

El estudiante puede con la totalidad de la propuesta didáctica lograr, entre otras, acciones como:

- ✓ *Comprender la importancia que los lenguajes coloquial, simbólico y visual revisten a la hora de la comprensión de una proposición a demostrar.*

- ✓ *Comprender, como consecuencia del ítem anterior, la vital importancia que significa el haberse apropiado de la significación de una proposición previamente a la realización de su demostración.*
- ✓ *Integrar teoría y práctica en las asignaturas del área Matemática, haciendo que las demostraciones formen parte de las mismas como un ejercicio cotidiano y no como una acción obligada y ritual porque se encuentran dentro de los contenidos teóricos obligatorios del curso de Matemática que el estudiante se encuentre realizando."*

UN IMPORTANTE ANTECEDENTE

El investigador danés Niss (2003) define la competencia matemática como la habilidad para entender, juzgar, hacer y usar las Matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extramatemáticas en las que estas juegan o podrían jugar su papel, identificando a tales competencias del modo siguiente:

i. Pensar matemáticamente.
ii. Plantear y resolver problemas matemáticos.
iii. Modelar matemáticamente.
iv. Argumentar matemáticamente.
v. Representar entidades matemáticas (situaciones y objetos).
vi. Utilizar los símbolos matemáticos.
vii. Comunicarse con las Matemáticas y comunicar sobre Matemáticas.
viii. Utilizar ayudas y herramientas (incluyendo las nuevas tecnologías).

De hecho, en Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías, la competencia fundamental de la lista precedente es el modelaje matemático que es vital y donde precisamente radica la importancia de la Ciencia Matemática. Niss define el modelaje como "*el arte de aplicar las matemáticas a la vida real"*. Podría caracterizarse el modelaje matemático como "*una herramienta innovadora de enseñanza eficiente y una correa de transmisión que proporciona la adquisición de conocimientos y hermana matemática y realidad"*.

Claro, para modelar matemáticamente, se debe pensar matemáticamente, y este pensamiento requiere el planteo y resolución de problemas; para tal planteo y resolución se requiere conocer a los entes matemáticos, utilizarlos y esto implica el conocimiento de su lenguaje para poder comunicarse con esta Ciencia, lo que permitirá conocer las estructuras conceptuales, que constituyen el basamento, lo que implícitamente permite argumentar, todo esto por supuesto con la utilización de ayudas y herramientas como el uso del software.

Debe observarse que el lenguaje es el eje central de las acciones antes descriptas como competencias, y nexo entre la modelización y la resolución de problemas. Es claro que ese modelaje que permite extrapolación entre realidad y abstracción no se produce sino a través del lenguaje propio de esta Ciencia, ya que el poder utilizarlo requiere poder comunicarse con ella, por ende es vital el enfoque inicial con el que se construya el acceso del estudiante al lenguaje matemático.

El primer paso es conectarse al lenguaje a través de sus piedras angulares, que son la conjunción y la disyunción estructuras lógicas predominantes en infinidad de definiciones básicas del Álgebra elemental, soporte esencial de los cursos de Matemática universitaria propios de Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías.

La falta de manipulación del lenguaje matemático en el ciclo medio es una tendencia mundial, casi general, salvo excepciones de instituciones que aún propugnan desde la Ciencia Matemática, la vitalidad del uso del mismo en el desarrollo epistemológico de la misma. Los procesos epistemológicos en el ciclo medio prácticamente han desaparecido, limitándose a la resolución de problemas, que al decir de Parra (1990) consiste en la realización de *"ejercicios de aplicación de algoritmos"*, no concibiéndose como procesos y estructurados de tal forma que el estudiante, seleccione el algoritmo correcto, sin obligarlo a interactuar con situaciones que lo lleven a *"comprometer sus conocimientos, a revisarlos, a modificarlos, o rechazarlos para formar un conocimiento nuevo."*

Esto es perfectamente claro y necesario, pero es otra gran falencia de ese estudiante que hoy ingresa a la universidad, la dificultad de la lectura de un enunciado, y de su extrapolación al lenguaje coloquial y gráfico, y es totalmente comprensible en virtud de la eliminación del ciclo ya mencionado de la exposición de la prueba de teoremas, lo que incluye la exposición de la teoría en general, como manifiestan claramente Legorburu y Miguiarra (2004): *"En la década del 90, se inició una tendencia a eliminar la enseñanza del método axiomático en la escuela, hasta llegar a suprimir la presentación de los teoremas en la forma convencional (con hipótesis, tesis y demostración), situación que continúa hasta la actualidad".*

Pensar en introducir el lenguaje matemático en los cursos universitarios citados requiere de un análisis previo que permita conocer sobre que terreno se encuentra este estudiante ingresante con respecto al conocimiento del lenguaje mencionado. A los efectos de tal conocimiento, se cita a continuación parte de un trabajo de campo realizado por D`Andrea (2010) acerca del conocimiento intuitivo de la conjunción y la disyunción.

Así el total de la población estudiada en que se realizaron las respectivas experiencias con cada grupo, totalizó 80 estudiantes presentes.

Las consignas de los ejercicios fueron las siguientes:

1. Determina si cada una de las expresiones siguientes, es Verdadera o Falsa, justificando con tus palabras de la forma más clara posible la elección realizada en cada caso.

a. 2=1 y 4<5; b. 2=1 y 4<5 y 3<8; c. 1=1 y 4<5 y 3<8; d. 2=1 y 4>5 y 3>8

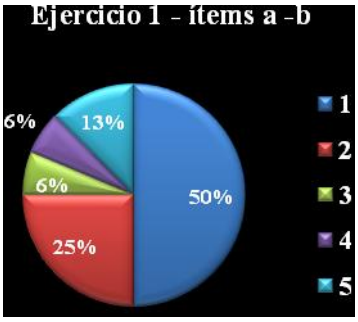
2. Ídem 1 para cada una de las siguientes:
a. 2=1 o 4<5; b. 2=1 o 4<5 o 3<8; c. 1=1 o 4<5 o 3<8; d. 2=1 o 4>5 o 3>8

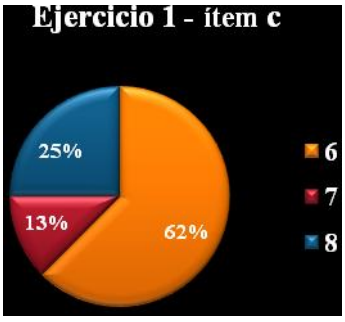
3. Considera la expresión: A las 12 a.m, Voy al cine o al teatro.
Piensa, reflexiona y luego responde claramente justificando con tus palabras las siguientes:
a. ¿Cuándo consideras que va a ser verdadera la expresión dada?
b. Si se cumplen ambas: ¿Será Verdadera o Falsa?
c. Si no se cumple ninguna de ambas: ¿Será Verdadera o Falsa?

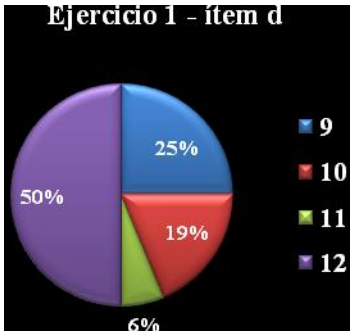
4. Completa con "y" o con "o" justificando claramente con tus palabras en cada caso:
a. (x – 1) (x – 2) (x – 3)=0 si y solo si (x – 1)=0…….(x – 2)=0…….(x – 3)=0
b. (x – 1) (x – 2) (x – 3)≠0 si y solo si (x – 1)≠0…….(x – 2)≠0…….(x – 3)≠0

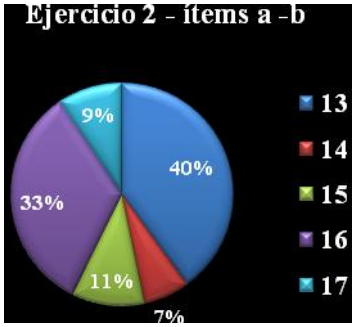
A continuación se detallan como consecuencia del Análisis cualitativo de los cuatro ejercicios precedentes, las categorizaciones que surgen de los diferentes tipos de respuestas dadas por los estudiantes.
1 – 15. Analiza el valor de verdad de cada componente por separado, pero no concluye.
Considera que es Falsa porque:
2. lo es una de las componentes. 3. sin justificar. 4. con justificaciones inconsistentes.
5 – 14 – 23 – 28 – 31 – 33 – 40 . Indiferente: No responde.
6 – 7 – 8: Considera que es Verdadera porque
6. lo son las tres componentes. 7. sin justificar. 8. porque el total tiene sentido.
9 – 10 – 11 – 12: Considera que es Falsa porque
9. lo es una componente. 10. lo son las tres componentes. 11. sin justificar. 12. el total carece de sentido.
13. Considera que es Verdadera porque lo es una de las componentes.
16. Considera que es Verdadera sin justificar la elección.
17. Considera que es Falsa porque no se contempla que se cumplan las dos proposiciones simultáneamente. Confunde con la conjunción.
18 – 19 – 20 – 21: Considera que es Verdadera porque
18. lo son todas las componentes. 19. se cumplen todas. 20. sin justificar. 21. porque tiene sentido el total.
22 – 24 – 25 – 26: Considera que es Falsa porque
22. lo son todas las componentes. 24. sin justificar. 25. ninguna se cumple. 26. una de las dos se cumple.
27. Es Verdadera porque ninguna de las dos se cumple. 29. No tiene sentido, una sola debe cumplirse.
30. La proposición es Verdadera. 32. No se cumple. La proposición es Falsa.
34. Sustituyó por "y". 35. No responde: Indiferente. 36. Sustituyó por "o".

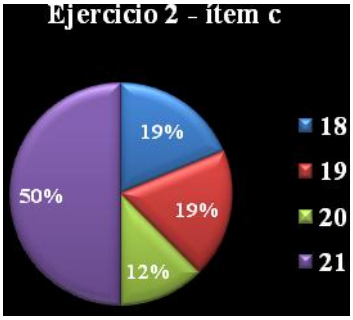
ESTADÍSTICAS

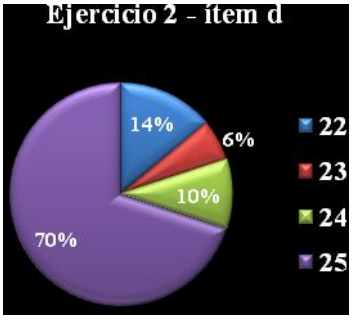


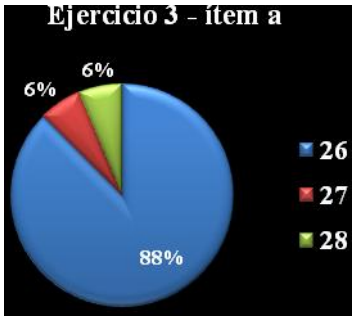


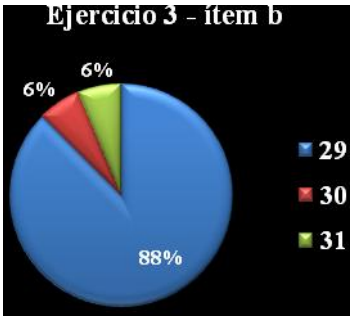


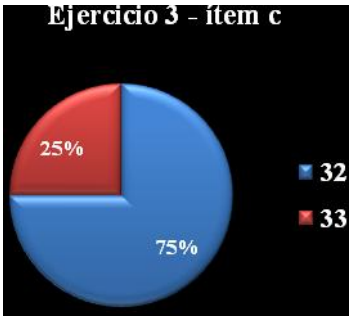


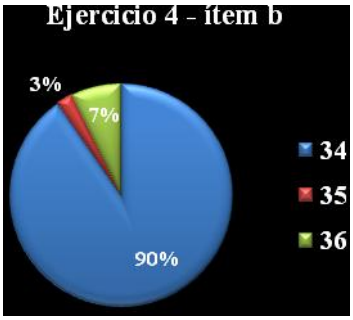












Se observa que la población de estudiantes analizada identifica la conjunción y puede detectar que el valor de verdad de una proposición molecular generada por la conjunción de proposiciones atómicas resulta verdadera cuando estas últimas son todas verdaderas pero en general ya no pueden detectar la falsedad cuando alguna de las proposiciones atómicas resulta falsa y otras verdaderas.
Tienden a analizar separadamente el valor de verdad de cada componente sin arribar a conclusión alguna. Si pueden detectar la falsedad de la proposición completa cuando todas las componentes son falsas, desde la intuición considerando la falsedad total de la proposición. Algo similar ocurre con la verdad.

La disyunción inclusiva no es distinguida claramente, ya que solo comprenden que puede ser verdadera cuando todas las componentes son verdaderas. Algo similar pasa con la falsedad.
En el ejercicio 4 la mayor parte de la población sustituye por "y" por lo que se manifiesta la falta de intuición de las 16 diferentes combinaciones mentales que representa la capacidad de un individuo de contemplar todas las posibles relaciones entre los elementos de un problema, característico del pensamiento formal. Entre las combinaciones mencionadas se encuentra: la negación de la afirmación completa correspondiente a este caso; la conjunción; la disyunción; negación conjuntiva; entre otras. (Carretero, 1985)

La población considerada tiene entre 17 y 20 años, por ende estos estudiantes han superado la etapa en que Piaget (1956) postula que el pensamiento del sujeto ya no parte de lo real a lo teórico, sino que parte de la teoría para establecer y verificar relaciones, de modo que la lógica del sujeto no sólo se ocupa de los objetos sino también de las proposiciones.
Según Huerta (1999) *"los niveles de abstracción que van progresando desde las acciones concretas a los principios y conceptos abstractos, son los que forman la base de las etapas evolutivas…"*

La conjunción es natural que desde lo intuitivo sea comprendida por lo menos cuando todas las componentes son verdaderas, o en menor grado falsas. Tiene un sentido de cotidianeidad, lo que no es ya tan natural es el caso correspondiente a una de las componentes falsa.
Esto está de acuerdo al principio de la verdad (Johnson–Laird, 2001). Este principio describe la tendencia del sujeto a representar los casos verdaderos más que los falsos. En un primer nivel (o representación inicial), las personas se representan inicialmente mediante modelos, las posibilidades verdaderas dejando para hacer explícitas en un momento posterior el resto de la información.
La confusión de la disyunción inclusiva, que puede considerarse, si es presentada de determinada manera como equivalente con el condicional, está asociada a la interpretación psicológica del condicional que fue ampliamente estudiada por Wason y Johnson Laird (1972), entre otros. La tabla de verdad del condicional ha sido considerada como la menos natural desde el punto de vista psicológico.
La disyunción exclusiva es cotidianamente más usual y mucho más "real" que la disyunción inclusiva de modo que el sujeto es capaz de distinguir la verdad o falsedad en el ejercicio propuesto que es por demás de elocuente y representativo.

CONCLUSIONES

El retraso del pensamiento formal en el estudiante posmoderno es un fenómeno a nivel mundial debido a la fuerza arrasadora que impuso la resolución de problemas en el ciclo medio en el área Matemática, como ya se manifestó. Tal metodología enfoca hacia lo procedimental, y si bien ofrece importantes ventajas acarrea en su generalidad la supresión del método axiomático y lógicamente los desarrollos teóricos en general, limitándose a resolver problemas sin un sustento ortodoxo que se apoye en la conceptualización teórica necesaria y en muchos casos esta tendencia se interpreta como la resolución repetitiva de ejercicios de aplicación de algoritmos.

Esto impide el acceso a la construcción y validación de formas proposicionales tales como la conjunción y la disyunción en sus facetas inclusiva y exclusiva. Se enfoca a estas formas proposicionales, ya que son piedras angulares para la construcción de las restantes que revisten mayor complejidad.

El cambio final que marca la transición en la maduración intelectual es la que establece el paso del pensamiento concreto al pensamiento abstracto. En esta fase se produce el paso del pensamiento descriptivo al exploratorio y de las operaciones concretas a las formales, del pensamiento analítico – inductivo al hipotético – deductivo.

No todos llegan a este tipo de pensamiento, se requiere de estrategias didácticas inteligentes que permitan potenciar este tipo de estructuras mentales.

En la investigación ya descripta cuyo sustento experimental se realizó en 2009, por D´Andrea (2010) op.cit. se sugiere la incorporación de una unidad didáctica enfocada a la exposición de breves pero elocuentes nociones de Lógica Simbólica.

Obrando comparativamente y bajo la sustentación de la investigación documental precedente, la incorporación de lógica simbólica como prolegómeno a cualquier curso inicial de Álgebra o Cálculo infinitesimal en una variable, se puede propiciar una buena disposición del estudiante a la hora de abordar procesos de validación, como consecuencia del acceso al lenguaje matemático que permite la introducción de lógica matemática.

Esto permitirá al estudiante acceder a las estructuras conceptuales de cursos iniciales de Matemática sin obligarlo a la inútil instrumentación de la memoria repetitiva que incorpora conceptos desconociendo su génesis, por lo que la apropiación de los mismos será una meta imposible, ya que degeneraran en conocimiento inerte (Perkins, 1995).

Debe destacarse que la incorporación de Lógica en cursos de Matemática dirigidos a estudiantes de Ciencias Naturales e Ingenierías permitirá al sujeto de aprendizaje apropiarse en una primera instancia de la denominada matemática de la “y” y de la “o” , eslabón vital del lenguaje matemático para la construcción de una cadena bien estructurada que permitirá el andamiaje posterior.

Una referencia representativa de lo sugerido sobre las nociones de lógica deseables en cursos como los mencionados pueden encontrarse en la Tesis de Maestría de D´Andrea (2010) donde no solo se describen características esenciales sino que se inserta como anexo el desarrollo completo de tal unidad temática tal y como se les ofreció a los estudiantes analizados para el trabajo de campo de la misma.

BIBLIOGRAFÍA

Carretero, M. (1985). El desarrollo cognitivo en la adolescencia y la juventud: Las operaciones formales. En Carretero, M., Palacios, J. y Marchesi, A. (comps.). Psicología Evolutiva 3. Adolescencia, madurez y senectud. Madrid. Alianza.

D´Andrea, R.E. (2010). Intuición, Comprensión y Repercusión de la Conjunción y Disyunción en el ingresante universitario a Carreras en Ciencias Naturales e Ingenierías. CVEM 2010. Octubre 2010. ISSN en trámite.

D´Andrea, R.E. (2010). Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas. Tesis de Maestría. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina.

De Guzmán, M. (1996). “El rincón de la pizarra”. Ediciones Pirámide. S.A. Madrid, 1996.

Economist.com. (2006). Print Edition. April 20th 2006.
http://www.economist.com/printedition/index.cfm?d=20060429

Gascón Pérez, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, ISSN 1130-488X, Nº 26, 1997, pp.11 – 22.

Huerta, P. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía solo: Un análisis comparado, una integración necesaria. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia. Revista: "Enseñanza de las Ciencias", 1999, 17 (2)

Johnson–Laird, P.N. (2001). Mental models and deduction. Trends in Cognitive Science, 5, 435 – 442.

Johnson–Laird, P.N., Legrenzi, P.J., y Legrenzi, M. (1972). Reasoning and a sense of reality. British Journal of Psycology, 63, 395 – 400.

Legorburu, N y Miguiarra, M. (2004). Volver a las demostraciones. Revista Enseñar.3er Ciclo. Número 2. Septiembre 2004. Editorial Clarín.

Marcipar Katz, S. (2001). "Capacitación Docente en Matemática: Integración de métodos para reflexionar sobre un caso". Tesis de Maestría. Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral. Santa Fe. Argentina.

Mariscal Antezana, G. (2003). Una aproximación a la Didáctica en el Proceso del Aprendizaje de las Matemáticas. Revista digital Ciencias.com. Noviembre 2003. http://www.revistaciencias.com/

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the learning of Mathematics: The Danish Kom Project. 2003.

Parra, B. (1990). "Dos concepciones de resolución de problemas de matemáticas". En: Alarcón Bortolussi, J.; Rosas Domínguez, R.S. (coord.). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Lecturas. 1995. p. 13. SEP, México. (Primer nivel. Programa Nacional de Actualización Permanente. Originalmente apareció en la revista Educación Matemática, 2(3). 1990.

Perkins, D. (1995). La escuela inteligente. Gedisa. Barcelona.

Piaget, J.(1956). Le problème des stades en psycologie de l´enfant. Symposium de l´Association psicologique scientifique de langue francaise. París: PUF.

Vigotsky, L. (1988). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. México. Editorial Crítica. Grupo editorial Grijalbo.