TRANSITORIOS EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN: UNA INTRODUCCIÓN CONTEXTUALIZADA DEL CONCEPTO DE SERIES

Patricia N. Baldini [1,2]
(1) Departamento de Electrónica – FRBB – Universidad Tecnológica Nacional –Buenos Aires. Argentina
(2) Dto. Ingeniería Eléctrica y de Computadoras – UNS - Buenos Aires. Argentina
pnbaldi@frbb.utn.edu.ar

Área Temática: Aplicaciones de sucesiones y series numéricas.

Palabras clave: sucesiones numéricas, series geométricas, convergencia, transitorios en líneas de transmisión, enseñanza de matemática en ingeniería .

RESUMEN

En este trabajo se presenta una metodología didáctica para facilitar la construcción por parte del estudiante de ingeniería electrónica, de los conceptos de series infinitas y convergencia. La dificultad implícita en la temática requiere de una forma de abordaje que no solo facilite la apropiación de su significado sino que enfatice su utilidad en el contexto profesional. En este marco se plantea cómo el análisis de transitorios en líneas de transmisión permite introducir e interpretar físicamente sucesiones y series convergentes a través de principios de reflexión de ondas electromagnéticas y de leyes básicas de teoría de circuitos.

INTRODUCCIÓN

La dificultad que presentan los alumnos de ingeniería con respecto a la comprensión del concepto de límite, se intensifica cuando se lo presenta en relación a la convergencia de sucesiones y series. La idea de una suma de infinitos términos resulta tan difícil de asimilar como de relacionar a situaciones prácticas. Esto conduce a que no se le asocie un sentido más allá de la matemática abstracta con la consecuente desmotivación. De modo que se considera fundamental buscar metodologías de aprendizaje contextualizadas para posibilitar la correcta valoración de los nuevos conocimientos.

Desde este punto de vista, se presenta en este trabajo una experiencia didáctica en la que la matemática surge naturalmente como una forma eficiente de representar un fenómeno físico concreto, permitiendo su resolución e interpretación. Con este objetivo se propone el estudio de la transmisión de información codificada mediante pulsos en sistemas digitales o conmutados de alta velocidad. El comportamiento transitorio de las tensiones y corrientes en ambos extremos de la línea de transmisión que enlaza el transmisor con el receptor, puede ser interpretado mediante un proceso de múltiples reflexiones en las discontinuidades electromagnéticas. Se muestra que en ese proceso ondas reflejadas que se generan pueden se modelizadas matemáticamente por medio de sucesiones numéricas convergentes temporalmente a cero. La evolución en el tiempo de las tensiones y corrientes en distintos puntos de la línea quedan expresadas mediante las sucesiones de sumas parciales, del tipo geométrico, con la razón dependiente de los parámetros físicos del problema. Se comprueba que el valor absoluto de la razón es siempre menor a uno, es decir, se cumple la condición necesaria y suficiente de convergencia. Los valores de convergencia o estacionarios pueden calcularse a partir de un simple circuito equivalente.

FUNDAMENTACIÓN

El estudio de sucesiones y series en la carrera de Ingeniería Electrónica, resulta necesario desde diferentes puntos de vista. De todos modos ninguno queda claro hasta que se las emplea de modo directo en la resolución de un problema real. La sola mención de futuras aplicaciones o la presentación de ejemplos simples orientados a la especialidad, suelen resultar insuficientes como incentivo en un tema de difícil comprensión. Domina la idea de que una suma de infinitos términos solo tiene sentido matemático y es de poca utilidad para un ingeniero. La consecuencia es que se lo aborda con reticencia y con la única intención de superar una evaluación [7,8].

La opción de recurrir a herramientas de visualización gráfica, utilizada con frecuencia en los cursos de análisis [6,7], si bien permite una comprensión a nivel intuitivo de convergencia o divergencia, no resulta suficiente para despertar el interés de los alumnos a la hora de la formalización matemática del tema. El simple cambio de soporte no es suficiente para lograr experiencias cognitivas integrales.

Teniendo en cuenta las competencias previstas para los alumnos del segundo año de Ingeniería Electrónica, se propone con ese fin, la introducción de sucesiones y series geométricas a través del análisis de la evolución temporal de tensiones y corrientes en líneas de transmisión alimentadas por pulsos de tensión. La discontinuidad representada por el receptor en el extremo de carga genera reflexiones que pueden ser representadas matemáticamente como una sucesión geométrica cuya razón depende de los coeficientes de reflexión en ambos extremos de la línea. Estos coeficientes serán, para los casos considerados, números reales con valor absoluto menor a uno ya que representan la fracción de la onda incidente que se refleja en la discontinuidad. Desde el punto de vista matemático, se garantiza la convergencia

El comportamiento transitorio de las ondas de tensión y corriente totales en cada punto de la línea queda expresado por la superposición de las ondas incidente y reflejadas que coexisten en cada intervalo de tiempo. El modelo matemático que surge de forma inmediata, es la sucesión de sumas parciales asociada, mientras que los valores estacionarios representan la suma de la serie, es decir, el límite de la sucesión de sumas parciales. De este modo, un fenómeno físico contribuye tanto a la construcción de los conceptos involucrados como a justificarlos

otorgándole significado, mientras que la visualización gráfica acompaña el proceso [3]. Se logra una mejor predisposición para la posterior formalización teórica y generalización de una temática que, de otro modo, resulta de difícil comprensión.

PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA MOTIVADOR

Cuando se transmiten señales eléctricas a alta velocidad, éstas se propagan como ondas electromagnéticas por el material dieléctrico que rodea a los conductores que realizan la conexión. El tiempo de tránsito de la señal por la línea deja de ser relativamente despreciable y los elementos de interconexión se comportan como líneas de transmisión. Como consecuencia pueden producirse reflexiones que originan errores de detección, interferencia con circuitos cercanos y sobretensiones que ponen en riesgo los dispositivos. Por lo tanto, es indispensable el estudio de los transitorios para tener en cuenta estos posibles fenómenos.

Se considera una línea de transmisión inicialmente desenergizada ($V(0^-,z) = 0$, $I(0^-,z) = 0$), sin pérdidas, es decir, sin atenuación y con impedancia característica Z_0 resistiva. La línea es alimentada desde una fuente de tensión constante con impedancia R_S (el transmisor) en el instante en que se cierra un interruptor. Las ondas electromagnéticas de tensión y corriente que se generan viajan hacia el extremo receptor con velocidad finita. El tiempo de tránsito de la onda por la línea es $t_1 = \frac{l}{v_p}$, donde v_p es la velocidad de propagación de las ondas. Al llegar a la carga, la discontinuidad implícita produce reflexiones debido a que la relación entre las amplitudes de las ondas de tensión y corriente debe adaptarse progresivamente a la condición de borde representada por la impedancia R_L. El grado de desadaptación se mide con el llamado coeficiente de reflexión definido como $\rho_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0}$ que determina en cada intervalo de tiempo correspondiente, el porcentaje de la onda incidente que se refleja. Solo en el caso particular en que $R_L = Z_0$ no existirán reflexiones y, en consecuencia, transitorio. Las ondas reflejadas se propagan en dirección al extremo transmisor. Encuentran al llegar otra condición de borde determinada por la impedancia de la fuente, que genera nuevas reflexiones con coeficiente $\rho_S = \frac{R_S - Z_0}{R_S + Z_0}$.

Al suponer impedancias resistivas, los coeficientes de reflexión resultan reales y con valor absoluto no superior a uno. Las nuevas ondas progresivas y regresivas continúan el proceso, con amplitudes cada vez menores, de modo que definen sucesiones convergentes a los valores de estado estacionario de tensión y corriente.

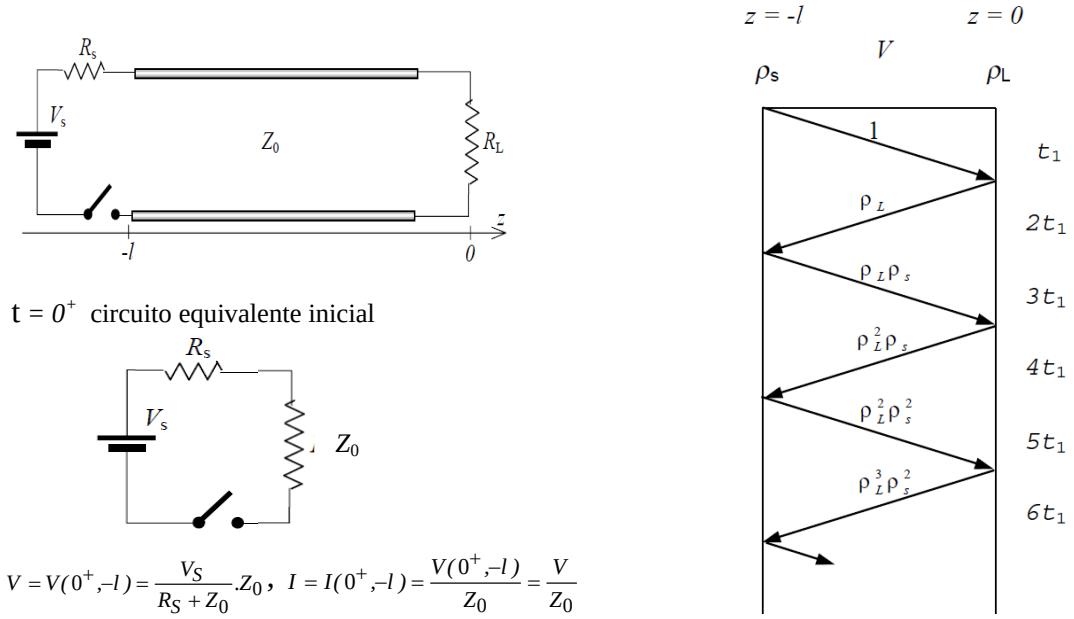


Figura 1: a) Esquema de LT; b) circuito equivalente inicial y c) diagrama de rebotes

Las sucesiones resultantes de tensiones y corrientes, producto de las reflexiones, pueden determinarse gráficamente mediante el diagrama de rebotes de la figura 1 c). En este diagrama el eje horizontal representa la distancia a lo largo de la línea mientras que el eje vertical indica el tiempo medido en unidades de tiempo de tránsito, t_1 , y las flechas muestran las ondas reflejadas progresivas y regresivas.

PLANTEO DEL MODELO DE SUCESIONES Y SERIES

Mediante la técnica gráfica descripta pueden obtenerse las expresiones de cada una de las ondas reflejadas, tanto progresivas como regresivas, es decir, las que se reflejan en la fuente y viajan hacia la carga, (V^+, I^+), y las que se reflejan en la carga y viajan en dirección opuesta ,(V^-, I^-).

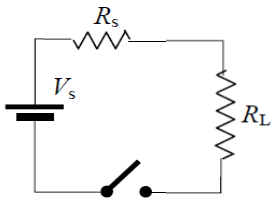
Para $t > 0$

$$V^-((2n-1)) = V^-((2n-1)t_1, 0) = (\rho_S\ \rho_L)^{n-1}(1+\rho_L)V$$
$$V^+(2n) = V^+(2nt_1, -l) = (\rho_S\ \rho_L)^{n-1}\rho_L(1+\rho_S)V$$

$$I^-((2n-1)) = I^-((2n-1)t_1, 0) = (\rho_S\ \rho_L)^{n-1}(1-\rho_L)\frac{V}{Z_0}$$
$$I^+(2n) = I^+(2n\,t_1, -l) = (\rho_S\ \rho_L)^{n-1}\rho_L(\rho_S - 1)\frac{V}{Z_0} \qquad , \quad n = 1,2,3,\cdots$$

donde $V = \dfrac{V_S}{R_S + Z_0}.Z_0$ .Si definimos la razón como $r = (\rho_S\,\rho_L)$, todas las sucesiones son geométricas, de la forma $K.r^n$ (*K: cte.)* y, por lo tanto convergen a cero debido a que $|r| = |\rho_S\,\rho_L| < 1$. Es decir, que las reflexiones se hacen despreciables a medida que el tiempo transcurre ($n \to \infty$) [1,2].

Circuito equivalente final $t \to \infty$



$$V_{Lss} = V_{Tss} = \lim_{t\to\infty} V(z,t) = \frac{V_S\ R_L}{R_S + R_L}$$

$$I_{Lss} = I_{Tss} = \lim_{t\to\infty} I(z,t) = \frac{V_S}{R_S + R_L}$$

Figura 2: circuito equivalente final y valor de convergencia de las series de tensiones

Durante el proceso transitorio, la evolución en el tiempo de la tensión y la corriente en cualquier punto de la línea ($-l \le z \le 0$) y en cada intervalo de tiempo entre reflexiones, de duración $2\,t_1$, pueden expresarse mediante las sucesiones de sumas parciales correspondiente. Para el extremo receptor ($z = 0$)

$V_L(0) = V(0^+,0) = 0$, $I_L(0) = I(0^+,0) = 0$

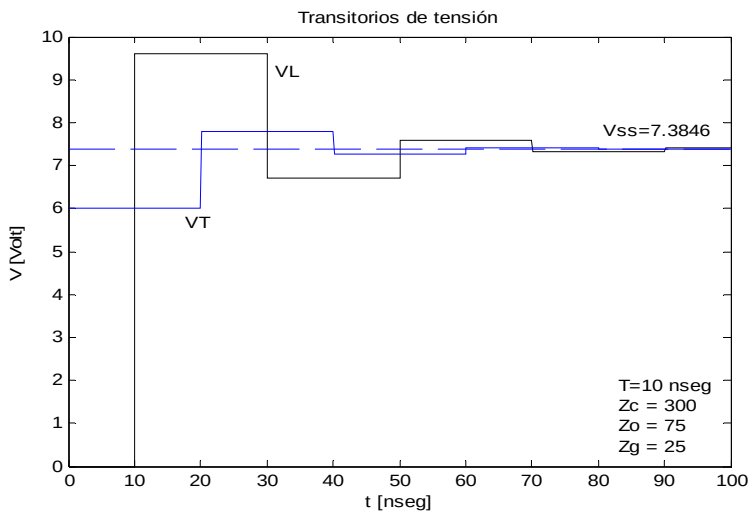
$$V_L = (1+\rho_L)V\sum_{k=1}^{n}(\rho_S\,\rho_L)^{k-1} \quad \text{y} \quad I_L = (1-\rho_L)\frac{V}{Z_0}\sum_{k=1}^{n}(\rho_S\,\rho_L)^{k-1} \quad , \quad (2n-1)\,t_1 < t < (2n+1)\,t_1 \ , \ n>0$$

Un ejemplo de los gráficos correspondientes a tensiones $V(t,z)$ en función del tiempo pueden verse en la figura 3 para $z = -l$ y $z = 0$. La oscilación que se observa en a) se debe a que $r < 0$ ($\rho_S < 0$, $\rho_L > 0$). La figura 3 b) muestra un comportamiento monótono creciente y corresponde a $r > 0$ ($\rho_L > 0$, $\rho_S > 0$).
Los valores finales o estacionarios ($t \to \infty$) pueden determinarse a partir del circuito equivalente final que se muestra en la figura 2, en el que se tiene en cuenta que el efecto de la línea se agotó, por lo que tensiones y corrientes se uniforman en todas las posiciones.

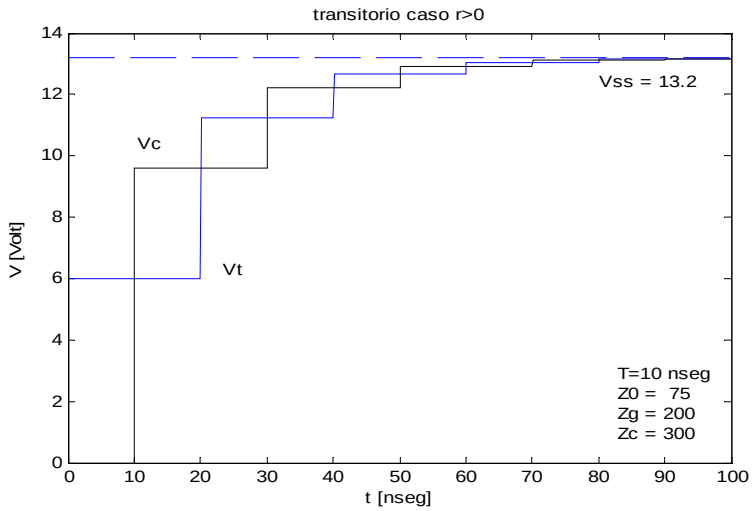
Desde otro punto de vista, cuando $n \to \infty$ los valores de convergencia de las series geométricas resultantes, de la forma $\lim_{n\to\infty} K\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1}$ (*K: cte.)* tiene la siguiente expresión, en función de los parámetros físicos del problema :

$$V_L = (1+\rho_L)V\sum_{k=1}^{\infty}(\rho_S\,\rho_L)^{k-1} = V\,\frac{(1+\rho_L)}{1-\rho_S\,\rho_L} = V\,\frac{R_L(R_S+Z_0)}{Z_0(R_S+R_L)} = \frac{V_S\ R_L}{(R_S+R_L)}$$

$$I_L = (1-\rho_L)\frac{V}{Z_0}\sum_{k=1}^{\infty}(\rho_S\,\rho_L)^{k-1} = \frac{V}{Z_0}\,\frac{(1-\rho_L)}{1-\rho_S\,\rho_L} = \frac{V}{Z_0}\,\frac{(R_S+Z_0)}{(R_S+R_L)} = \frac{V_S}{(R_S+R_L)}$$



a)



b)

Figura 4: Sucesiones de sumas parciales que modelizan las tensiones transitorias: a) caso $r < 0$ b) caso $r > 0$

COMENTARIOS FINALES

Si bien se declara actualmente que la enseñanza debe orientarse a construir un conocimiento significativo, con el fortalecimiento de las habilidades fundamentales para aprender y que favorezca el desarrollo de las competencias previstas en función del perfil profesional, esto muchas veces queda restringido en la práctica a la incorporación de las nuevas tecnologías a los modelos tradicionales. Es indudable que la incorporación de las TICs resulta positiva en el proceso de aprendizaje y en la comunicación con el alumno, pero abordar un verdadero cambio significa, desde el rol del docente, reformular la concepción sobre la práctica pedagógica. En esta dirección, un aspecto pendiente que afecta directamente el interés de los alumnos en las materias de matemáticas, es la falta de relación directa con las temáticas específicas de cada orientación.

Con el enfoque planteado en este trabajo para la construcción del conocimiento a partir de un problema, se propende a que los alumnos desarrollen un pensamiento reflexivo que trascienda a la mera aplicación sistemática de una metodología matemática para la obtención de un resultado. Se pretende lograr que sean capaces de ver que la matemática provee un lenguaje conciso y eficiente para describir y analizar los sistemas asociados con la electrónica. Es de esperar que, de este modo, no solo aumente la motivación sino también que se favorezca el desarrollo de competencias transversales [5] que mejoren el rendimiento en las asignaturas siguientes.

CONCLUSIONES

La estructura curricular dominante en las carreras de Ingeniería determina que los primeros dos años del plan de estudios estén conformados fundamentalmente por materias básicas, de forma tal que queda en manos de los docentes lograr la integración de estas asignaturas mediante un enfoque transdisciplinario. Son evidentes las dificultades que presentan los alumnos avanzados en el empleo eficiente de las metodologías matemáticas para la interpretación y resolución de problemas propios de la electrónica. En la mayoría de los casos, se evidencia la mera acumulación de procedimientos y conceptos, carentes de funcionalidad por presentarse disociados de las aplicaciones.

Desde este punto de vista, la metodología sugerida se basa en presentar un problema propio de la especialidad que conduce de modo natural e intuitivo a la introducción, en el caso planteado, de sucesiones y series, asociándoles un significado físico fácil de interpretar y que le otorga sentido a la noción inherente de límite. La visualización gráfica se incorpora como parte del análisis del proceso físico planteado y contribuye a clarificar las conclusiones.

De este modo se facilita la comprensión de los conceptos subyacentes, contando con una mejor predisposición por parte del alumno. La matemática surge como una herramienta necesaria para dar respuesta a un problema concreto y la formalización teórica le otorga un marco sólido que la independiza de la situación particular y permite su generalización.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1- Kaplan, W. (2003) Advanced Calculus. Pearson . 5ta. ed . Addison Wesley. NY.

2- Kreiszig, E. (2000) Matemática Avanzada para Ingeniería.VII. 3ra. ed Limusa Wiley

3- Gómez J. (2004) La Ingeniería como Escenario y los Modelos Matemáticos como Actores. *XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática.* Castellón. España.

4- Mamoma, J. (1990). Sequences and series-sequences and functions: student' confusions. .*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* 21(1), p.333-3337.

5- Villasevil F., López F. y Rossado L. (2001). Cognitive and metacognitive model in electronics engineering teaching. Fmerle D., Jackson C., Lannin J. y Nair S. (2009) Professional Skills in the Engineering Curriculum. *IEEE Trans. on Educatino.* V53 Nro.4. pag. 562 – 571.

6- Hitt F. (2003) Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol* X *No.*2. pg. 213-223.

7- Fuentealba C. y Galindo R. (2004) Visualización de Convergencia Uniforme. *XII Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Chile

8- Dolores C., Martínez G.,Farfán R.M. (2007) Un Estudio Didáctico Relativo a la Noción de Convergencia . en *Matemática Educativa. Algunos Aspectos de la Socioepistemología y la Visualización en el Aula*. Cap 4. Ed Días de Santos. Madrid.