LOS PROCESOS DE VALIDACIÓN Y SU RELACIÓN CON EL LENGUAJE MATEMÁTICO

D`Andrea, R.E.[(1)] **y Sastre Vázquez, P.**[(2)]

(1) Universidad Católica Argentina. Facultad de Química e Ingeniería. Rosario. Argentina.
(2) Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Bs.As. Facultad de Agronomía. Azul. Argentina
rodolfoedandrea@yahoo.com.ar; pasava2001@yahoo.com.ar

Investigación Educativa
Palabras Claves: lenguaje matemático; validación; verificación; demostración; razonamiento

RESUMEN
Los estudiantes que ingresan a la Universidad se enfrentan a la consecuencia de la modalidad del ciclo medio que se limita a la realización de ejercicios de aplicación de algoritmos mientras que los cursos de Matemática destinados a estudiantes de Ingeniería y Ciencias Naturales requieren del sustento teórico para los desarrollos procedimentales. Para comprenderlos el estudiante necesita conocer el lenguaje matemático y los elementos que hacen a la epistemología de la Ciencia Matemática, los que permiten los procesos de validación característicos. En este trabajo se analizan clasificaciones referidas a los procesos de validación matemática haciéndose hincapié en la investigación realizada en la Facultad de Química e Ingeniería "Fray Rogelio Bacon" de UCA ROSARIO por D`Andrea (2010) que se enfoca específicamente en los ejercicios de validación aplicada a una muestra no aleatoria de estudiantes de Ciencias Naturales e Ingenierías.

Validación Matemática

La palabra "validación" toma mayor presencia a partir de su uso en los trabajos de la Escuela Francesa (Brousseau,1995; Balacheff, 1987). Dentro de este marco teórico, la validación consiste en el empleo de recursos de tipo técnicos, teóricos, disciplinares y argumentativos, por parte del que aprende, para garantizar la validez de un resultado formulado. Esta actividad se realiza teniendo en cuenta las convenciones de una comunidad que maneja el saber en forma experta, ya que es frente a este ámbito que debe dar garantías de validez. En este sentido, la validación es una actividad matemática inherente al estudio de la disciplina; sin embargo, no hay demasiado desarrollo didáctico sobre cómo se aprende o cómo se enseña a validar (Falsetti y otros, 2004).

En este trabajo, siguiendo a Falsetti y otros, (2004) op.cit., se adopta la definición siguiente de validación: *"Entendemos la validación de un conocimiento matemático en situación de aprendizaje como el resultado de un proceso del sujeto por el cual éste es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido. Al manifestar sus razones debe hacer explícitos los sentidos de los objetos matemáticos que manipula y estos sentidos deben corresponderse con los significados aceptados por la Institución Matemática."*

Balacheff (2000) introduce una clasificación acerca de los tipos de prueba que los estudiantes presentan y en la cual el énfasis no está sólo en la relación entre los ejemplos usados y el enunciado que se quiere demostrar, sino en el motivo por el que los estudiantes usan los ejemplos. Y las divide en dos categorías: pragmáticas o experimentales y conceptuales o deductivas.

Las *demostraciones pragmáticas* introducen a la vez una subclasificación en varios tipos:

Empirismo naïf o ingenuo, donde el proceso de validación para el mismo consiste en la verificación de la propiedad para unos pocos ejemplos elegidos sin criterio alguno, de manera aleatoria. Es el tipo más elemental de demostración que presentan los estudiantes.

En el *Experimento crucial*, los procedimientos de los estudiantes se basan en la elección minuciosa de un ejemplo, cuidadosamente escogido pero con el convencimiento de que esa elección es tal que si se cumple para ese particular caso, se cumplirá siempre.

Por otro lado está el *Ejemplo genérico*, que corresponde a procedimientos basados en la elección y manipulación de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase. La demostración, aunque sea particular, pretende ser abstracta y tener validez para toda la clase representada. Aquí los estudiantes comienzan a utilizar propiedades abstractas en sus demostraciones, pero inexorablemente referidas al ejemplo escogido.

Las *demostraciones conceptuales o deductivas*, introducen a la vez también una subclasificación que se describe a continuación:

En el *Experimento mental*, los estudiantes interiorizan las acciones realizadas previamente (generalmente observación de ejemplos), las disocian de esas acciones concretas y las convierten en argumentos abstractos deductivos, y el "cálculo simbólico", cuando la demostración se basa en la transformación de expresiones simbólicas formales. Aquí la explicación se centra en la acción interiorizada, separándola de

su ejecución sobre un representante particular. Es una demostración deductiva abstracta organizada a partir de manipulaciones de ejemplos concretos. Este tipo de demostración aparece como medio para fundamentar las soluciones propuestas en un esfuerzo de explicación.
En el *Cálculo sobre enunciados*, se establecen construcciones intelectuales basadas en teorías más o menos formalizadas o explícitas, que se originan en una definición o propiedad y se basan en la transformación de expresiones simbólicas formales.

Por su lado Bell (1976) se propuso analizar los intentos de los estudiantes por construir demostraciones o elaborar explicaciones en situaciones matemáticas elementales y comparó la forma en que difieren de los usos de la demostración que realiza un matemático profesional. A la luz de este análisis, elaboró una clasificación de los tipos de respuestas que un estudiante puede arrojar, a través de una categorización que distingue entre: empíricas y deductivas. La primera se caracteriza por el uso de ejemplos como factor esencial para la certeza mientras que la segunda se caracteriza por la utilización de la deducción como elemento conector con las conclusiones.
En el trabajo que se presenta se considerará solamente la categoría empírica que es la que interesa para la investigación, distinguiéndose la siguiente subclasificación:

1) *Completa:* El estudiante encuentra y comprueba el conjunto finito completo de los casos requeridos.
2) *Sistemática:* El estudiante encuentra al menos algún subconjunto completo de casos y está intentando encontrarlos a todos.
3) *Parcialmente Sistemática:* El estudiante encuentra algún subconjunto parcialmente completo de los casos requeridos y si bien no encuentra todos, tiene conciencia de la importancia de tal acción.
4) *No sistemática:* El estudiante halla algunos de los casos o ejemplos que se requieren que no constituyen el subconjunto completo y desconoce lo vital de encontrar absolutamente todos los casos.
5) *Extrapolación:* El estudiante infiere la conclusión de un resultado general a partir de un subconjunto de datos suficientemente representativos.
6) *Incapacidad:* El estudiante es incapaz de generar ejemplos adecuados que satisfagan las condiciones impuestas por la proposición a demostrar.

D´Andrea (2010) adapta las clasificaciones de Bell y Balacheff para la investigación realizada a los efectos de encuadrarla a los ejercicios diagnóstico aplicados a estudiantes de Ciencias Químicas e Ingenierías sobre proposiciones cuantificadas universal y existencialmente y esencialmente para proposiciones no necesariamente geométricas.

EJERCICIOS PARA LOS ESTUDIANTES A MODO DE DIAGNÓSTICO

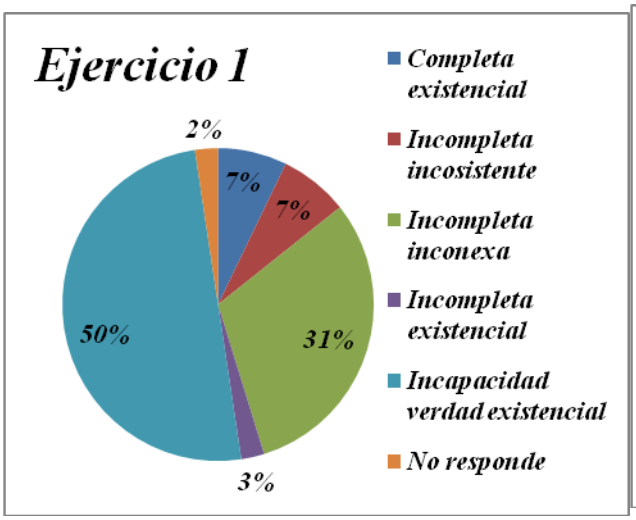
Se tomó una muestra no aleatoria de 42 estudiantes de la Facultad de Química e Ingeniería de UCA ROSARIO, que ingresaban a las Carreras de: Licenciatura en Química Industrial; Ingeniería Industrial turno noche; Ingeniería Ambiental y Licenciatura en Tecnología de los Alimentos. A éstos estudiantes se les propuso resolver una serie de ejercicios de validación de proposiciones, a los efectos de generar un diagnóstico de situación de ingresantes frente a la validación de proposiciones. Los estudiantes ya se hallaban cursando las asignaturas del primer año de la Carrera de Ciencias Naturales o Ingeniería elegida, y la presentación fue voluntaria frente a una convocatoria, siendo el único requisito para presentarse a la misma, tener el curso de ingreso aprobado.
Se destaca que junto con el temario de los ejercicios, se adjuntó una hoja con las gráficas de las funciones trigonométricas: seno, coseno y tangente; las definiciones de número par e impar; la definición de valor absoluto y la resolvente de la ecuación cuadrática a los efectos de que cada estudiante no se perturbara por el recuerdo de una fórmula, definición o gráfica, que por elemental que fuese, interfiriera en el razonamiento de cada ejercicio planteado, ya que lo que interesaba de esos ejercicios para la investigación era el análisis del razonamiento seguido por cada estudiante y no el recuerdo específico de contenidos.

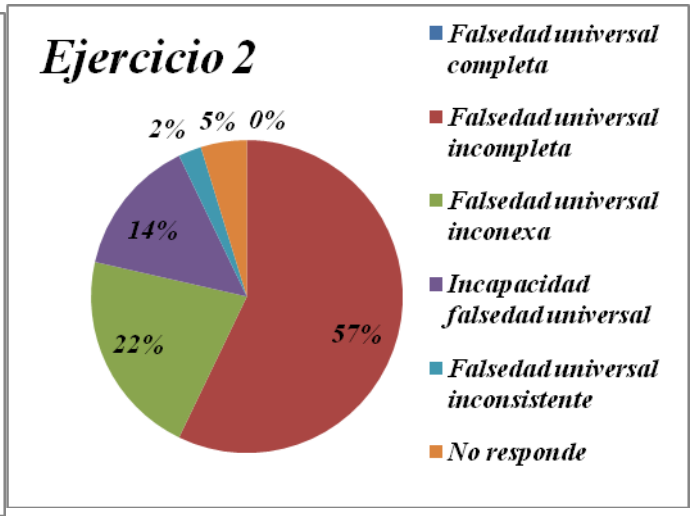
Ejercicio 1: Considera las siguientes proposiciones:

$$i.\ \exists x \in A / (x-1)(x-2)(x-4) = 0, A = \{0,1,2,3,4,5\} / ii.\ \exists x \in \mathbb{R} / (x-1)(x-2)(x-4) = 0$$

i. Decide si son verdaderas o falsas. ii. Explica que razonamientos sigues para justificar cada respuesta en i.
La idea de este ejercicio fue observar como intuitivamente el estudiante reacciona frente a una proposición cuantificada existencialmente, del modo como se describe a continuación:
Primero cómo evaluaba su valor de verdad y como en los casos presentados las dos proposiciones son verdaderas pero con diferente Universal. Lo que seguía era ver cómo se disponían a probar la validez de tales proposiciones. Si bien el estudiante al momento de realizar estos ejercicios desconocía cuestiones de Lógica

simbólica, se apela a la noción de recuento discreto, que le permite una noción implícita de cuantificación y que se desarrolla entre los estadios del final del período preoperacional y el comienzo de las operaciones concretas según Piaget (1981).





Tipo de Respuesta Obtenida, se incluye el tipo de razonamiento seguido.

1) *Observación previa: Aquí el tipo de respuesta obtenida incluye el tipo de razonamiento seguido por el estudiante, de modo que para el análisis que continúa se adaptó la clasificación hecha por Bell (1976) op.cit.*
2) *Completa universal=Completa Bell*: El estudiante encuentra y comprueba el conjunto finito completo de los casos requeridos. No corresponde este caso al ejercicio analizado.
3) *Incapacidad frente a verdad universal=Incapacidad Bell:* El estudiante es incapaz de encontrar todos los casos requeridos que satisfagan las condiciones impuestas por la proposición a demostrar o bien es incapaz de determinar el valor de verdad de la proposición que postula la verdad de una proposición cuantificada universalmente. Tampoco corresponde este caso al ejercicio analizado.
4) *Completa existencial:* El estudiante encuentra y comprueba que se requiere un único caso para probar la validez de la proposición. 3 estudiantes → 7.14%
5) *Incompleta inconsistente:* El estudiante determina el valor de verdad de la proposición pero no justifica su decisión. 3 estudiantes → 7.14%
6) *Incompleta inconexa:* El estudiante determina el valor de verdad de la proposición pero justifica inadecuadamente su decisión. 13 estudiantes → 30.95%
7) *Incompleta existencial:* El estudiante detecta que existe algún caso que prueba la validez de la proposición pero no lo indica. 1 estudiante → 2.38%
8) *Incapacidad frente a verdad existencial:* El estudiante es incapaz de dilucidar que la verdad de la proposición se comprueba con solo encontrar un valor que la satisfaga o bien es incapaz de detectar la verdad de la proposición cuantificada existencialmente. 21 estudiantes → 50%
9) No responde: 1 estudiante → 2.38%

Observaciones

Se observa que en su mayoría los estudiantes no pudieron evaluar el valor de verdad de la función proposicional cuantificada existencialmente, desde su intuición confunden en muchos casos con el universal y en otros, evalúan correctamente la función proposicional pero no saben concluir. Los estudiantes de esta muestra conocen el símbolo mostrado, simplemente como un símbolo más, pero no necesariamente este conocimiento implica que la lectura del mismo es meditativa y atenta, lo que influye notablemente a la hora de la prueba. Es interesante destacar que de una buena lectura de la proposición, se apela a que el estudiante intuitivamente "pruebe" la verdad, que en este caso es una simple exhibición de un ejemplo. Este es un buen comienzo para abrir el camino de la deducción matemática tal como reza en España, el diseño curricular Base, elaborado por el Ministerio de Educación y Ciencia (1989) que considera el razonamiento deductivo como el resultado de un proceso que se inicia con las formas empírico–inductivas de razonamiento, ofreciendo consideraciones como las siguientes: *"Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías…"*

Ejercicio 2: Considera la siguiente proposición: $\forall x \in \mathbb{R} : |x| < 0$

i. Decide si es verdadera o falsa. ii. Explica qué razonamientos sigues para justificar tu respuesta.

La idea de este ejercicio es ver cómo intuitivamente el estudiante reaccionaba frente a una proposición cuantificada universalmente falsa. Primero ver cómo evaluaba su valor de verdad, y luego cómo validaba a la misma. Si bien el estudiante que está realizando estos ejercicios desconoce cuestiones de Lógica simbólica, como se ha manifestado en el prolegómeno hecho al análisis del ejercicio anterior, en este caso se espera que el estudiante pueda probar la falsedad de la proposición utilizando un contraejemplo, o bien que justifique a través de la definición de valor absoluto o apele a la interpretación geométrica de la definición mencionada. Aquí puede entrar en juego la visualización en el último caso, o la mera justificación conceptual en el caso de apelar directamente a la definición. De modo similar al Ejercicio 1 también aquí el tipo de respuesta obtenida incluye el tipo de razonamiento seguido.

Tipo de respuesta obtenida – se incluye el tipo de razonamiento seguido –

1) *Falsedad universal completa:* El estudiante encuentra y comprueba el único caso requerido – contraejemplo – que le permitirá probar la falsedad de la función proposicional cuantificada universalmente. 0 estudiante $\rightarrow 0\%$
2) *Falsedad universal incompleta:* El estudiante detecta la falsedad de la función proposicional cuantificada universalmente, no encuentra el contraejemplo, aunque justifica tal falsedad con argumentos consistentes. 24 estudiantes $\rightarrow 57.14\%$
3) *Falsedad universal inconexa:* El estudiante detecta la falsedad de la función proposicional cuantificada universalmente y no encontrando el contraejemplo, intenta justificar tal falsedad inadecuadamente con argumentos erróneos. 9 estudiantes $\rightarrow$21.43% (*)
4) *Incapacidad frente a Falsedad universal:* El estudiante es incapaz de detectar tal falsedad o detectándola procede de forma opuesta a lo requerido para este caso. 6 estudiantes $\rightarrow 14.29\%$.
5) *Falsedad universal inconsistente:* El estudiante detecta la falsedad de la función proposicional cuantificada universalmente pero no justifica su decisión. 1 estudiante $\rightarrow 02.38\%$
6) *No responde.* 2 estudiantes $\rightarrow 04.76\%$

(*) Las argumentaciones erróneas pueden provenir por ejemplo, para este caso particular, de especulaciones teóricas que muestran desconocimiento de la estructura conceptual de valor absoluto de un número real.

Observaciones

Se observa luego que una buena parte pudo determinar adecuadamente el valor de verdad de la función proposicional cuantificada universalmente. Ninguno de los estudiantes supo encontrar el contraejemplo, pero supieron argumentar adecuadamente, ya sea por la definición de valor absoluto o la interpretación geométrica de la misma. Cuando se dice argumentar es interesante destacar el uso que se hace del término que es el que Duval (1993) hace del mismo, y que distingue del término explicación, ya que la acción de los estudiantes fue la de argumentar y no la de explicar ya que *"en la argumentación se trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la explicación los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento"*. Un porcentaje menor habiendo detectado la falsedad no pudo justificarla o lo hizo erróneamente.

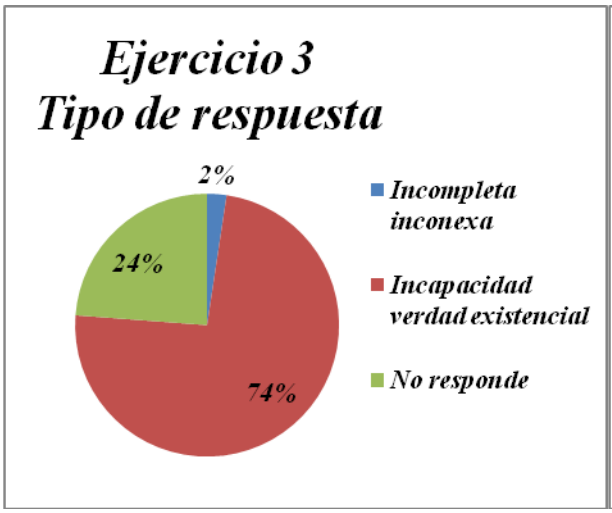
Ejercicio 3

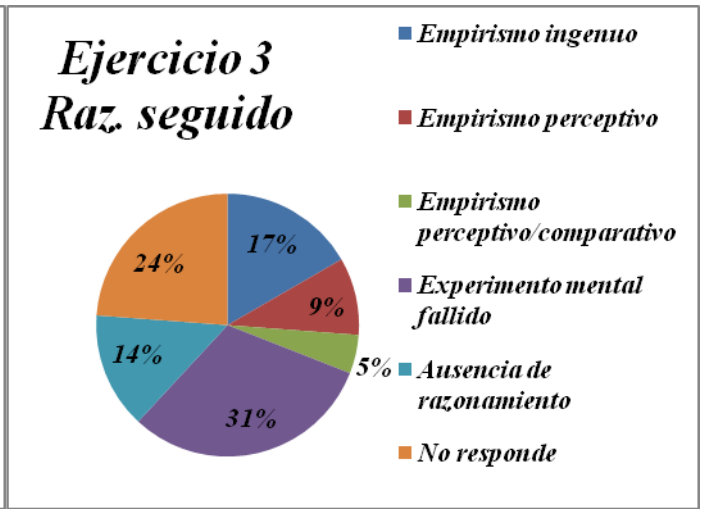
Nota: Este ejercicio fue tomado de "Cómo Entender y Hacer Demostraciones en Matemáticas". Daniel Solow. Limusa, Noriega Editores, México. 1993. p.19.

Considera la siguiente proposición: Existe un ángulo t tal que $cos(t) = t$.

i. Decide si es verdadera o falsa. ii. Explica qué razonamientos sigues para justificar tu respuesta.

En este ejercicio nuevamente se propone una función proposicional cuantificada existencialmente que es verdadera, pero los resultados esperados pueden oscilar desde simples tanteos *näif,* refiriendo a la clasificación que Balacheff (2000)op.cit. hace sobre tipos de demostraciones empíricas en que los estudiantes utilizan ejemplos para validar enunciados. En este tipo de verificación el estudiante prueba con unos pocos ejemplos, usualmente escogidos de forma aleatoria, aunque en la mayoría de los casos, estos quedan satisfechos con la exhibición de un único ejemplo. Por otro lado se espera que el estudiante pruebe la validez de este enunciado haciendo uso de la visualización ("visual proof") (Hanna, 1995), interceptando la función identidad con la función coseno y viendo únicamente que existe un valor que en efecto satisface la proposición y que el mismo supera a 0 y es estrictamente menor que $\frac{\pi}{2}$. No es la intención que el estudiante encuentre tal valor, sino que existe únicamente. *"Nuestros dibujos son, en la mayor parte de las ocasiones, meros auxiliares de nuestra imaginación que nos ayudan a retener las relaciones que consideramos útiles para nuestra mejor comprensión de los temas que tratamos y de los problemas que intentamos resolver."* (Balacheff, 1987). Para este caso en particular, en que se adjuntó una hoja adicional con fórmulas y las gráficas de las funciones trigonométricas, se trató de estimular la imaginación con esta acción.





Tipo de respuesta

1) *Incompleta inconexa***.** 1 estudiante → 02.38%
2) *Incapacidad frente a verdad existencial.* 31 estudiantes → 73.81%
3) *No responde*. 10 estudiantes → 23.81%

Razonamiento seguido – para respuestas incorrectas, se incluye el erróneo razonamiento de la única respuesta correcta –

1) *Empirismo näif o ingenuo=Balacheff.* 7 estudiantes → 16.67%
2) *Empirismo perceptivo:* Aquí el estudiante opera según el empirismo ingenuo descripto por Balacheff pero utilizando el comportamiento visual de la gráfica de una función, en este caso el coseno. La percepción aquí actuaría a través de un diseño con lápiz o virtualmente a través de la utilización del software que permita tal gráfica. 4 estudiantes → 09.52%
3) *Empirismo perceptivo/comparativo:* Aquí el estudiante opera según el empirismo perceptivo pero comparando con otras gráficas. 2 estudiantes → 04.76%
4) *Intento de experimento mental o experimento mental fallido.*13 estudiantes → 30.95% (**)
5) *Ausencia de razonamiento***.** 6 estudiantes → 14.29%
6) *No responde***.** 10 estudiantes → 23.81%

(**) El estudiante parte de un ejemplo particular e intenta argumentar pero luego vuelve a una simple verificación de lo "poco y débilmente argumentado". E inclusive puede ser que parta de un argumento genérico, y vuelva sobre la misma a una simple verificación. Debe destacarse que algunos manifestaron una transformación trigonométrica que luego terminó en una verificación de esta expresión transformada.

Observaciones

Se observa que la casi totalidad de los estudiantes "tantearon" con la calculadora tal como se pronosticó en el prolegómeno, no remitiéndose al análisis de la función trigonométrica involucrada, es decir que no apelaron a la visualización. Esta faceta del lenguaje matemático, requiere ejercicio cotidiano, y los ingresantes actuales no están entrenados a tales efectos. En la mayoría de los estudiantes que estableció la falsedad de la proposición dada, la argumentación establecida para tal falsedad consistió en esos "tanteos" producto de la utilización de una simple calculadora electrónica; destacándose que algunos se remitieron en tal argumentación al análisis breve del comportamiento de la función coseno, y su comparación con el seno y la tangente, manifestando que satisfacían el comportamiento planteado por la proposición para las dos funciones últimas mencionadas o para una de ellas, pero desde lo analítico y no gráfico.

Pocos recurrieron a la representación gráfica, y los que lo hicieron fue sin resultados significativos, ya que la mostración visual de la función coseno no fue relacionada con la función identidad, que era el objetivo. Simplemente se limitaron a mostrar visualmente valores notables en la gráfica y compararlos analíticamente con la imagen de estos, lo que no varió demasiado de los 'tanteos arbitrarios' que hizo la mayoría. El único estudiante que postuló la verdad para esta proposición, no hizo justificación alguna de tal escogencia.

Ejercicio 4

Considera la proposición: Toda ecuación cuadrática sin término independiente siempre tiene a 0 como raíz.
i. Decide si es verdadera o falsa. ii. Explica qué razonamientos sigues para justificar tu respuesta.

Aquí lo esperado de los estudiantes es que determinada la verdad de la proposición, ellos validen a la misma proponiendo la forma de la ecuación cuadrática sin término independiente en forma genérica, y la resuelvan, de modo que quede demostrado a través de esa resolución que una de las raíces es 0. También podría ser válida la propuesta de razonamiento visual apoyado por la representación gráfica de una parábola sin término independiente con coeficiente cuadrático positivo y otra con coeficiente cuadrático negativo, de modo que pueda observarse que en cualquiera de ambos casos, las gráficas pasan por el origen. Ambas parábolas podrían ser ejemplos concretos, en cuyo caso la cuestión seguiría la línea del empirismo ingenuo, pero para que pudiera considerarse una prueba visual, deberían ser dos parábolas hipotéticas.

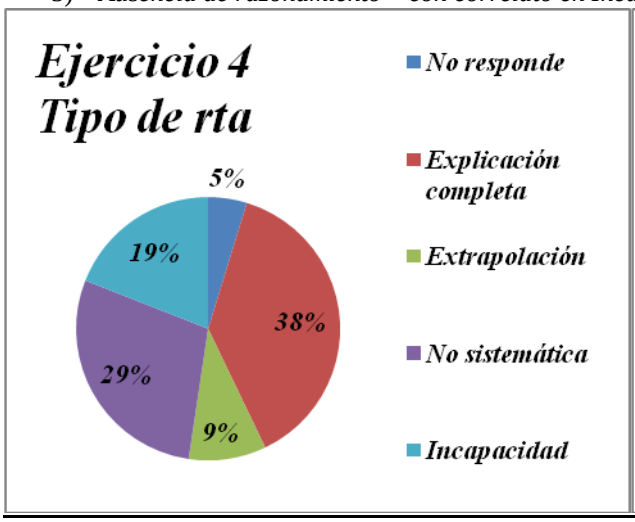
Tipo de respuesta obtenida

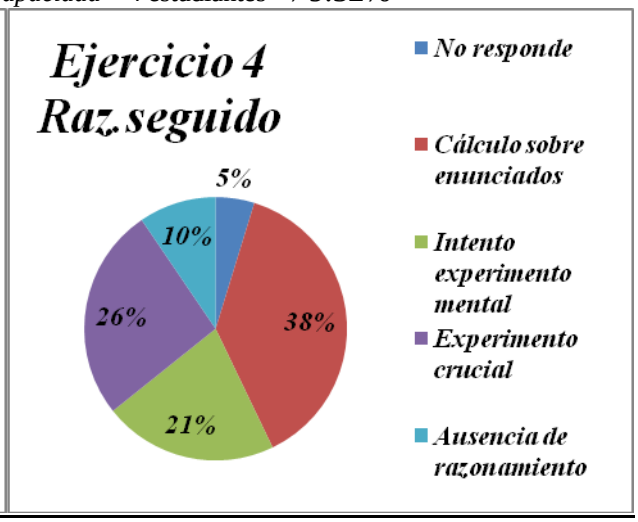
Nota previa: Aquí estrictamente se tomó la clasificación de Bell (1976) op.cit.

1) *No responde.* 2 estudiantes $\rightarrow$ 4.76%
2) *Explicación completa.* 16 estudiantes $\rightarrow$ 38.10%
3) *Extrapolación.* 4 estudiantes $\rightarrow$ 9.52%
4) *No sistemática.* 12 estudiantes $\rightarrow$ 28.57%
5) *Incapacidad*. 8 estudiantes $\rightarrow$ 19.05%

Razonamiento seguido

1) *No responde.* 2 estudiantes $\rightarrow$ 4.76%
2) *Cálculo sobre enunciados – con correlato en explicación completa* – 16 estudiantes $\rightarrow$ 38.10%
3) *Intento de experimento mental – con correlato en extrapolación* –9 estudiantes $\rightarrow$ 21.43%
4) *Experimento crucial – con correlato en no sistemática* – 11 estudiantes $\rightarrow$ 26.19%
5) *Ausencia de razonamiento – con correlato en Incapacidad* – 4 estudiantes $\rightarrow$ 9.52%





Observaciones

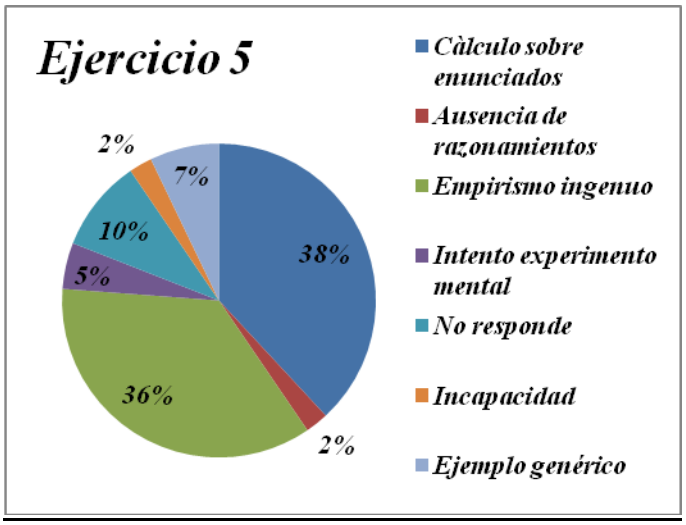
Aquí la respuesta manifestada y el tipo de razonamiento seguido por los estudiantes quedó evidenciado a través de un porcentaje destacable que pudo efectuar la prueba. Esto podría ser posible debido a que el enunciado es meramente coloquial; y con ausencia de símbolos. Los estudiantes creen conocer los símbolos pero su conocimiento es superficial. También puede deberse a un conocimiento más profundo del contenido implícito en esta proposición, de modo que a diferencia de las otras consignas, un considerable número de estudiantes más que argumentar, pudo hacer una *"working proof"* (Resnick, 1992) con mucha naturalidad. Otro buen número no pudo llegar a generar este razonamiento, y se limitó a la exhibición de un ejemplo o dos y resolverlos, con lo que le "alcanzó" para sustentar la verdad. Aproximadamente la cuarta parte de la muestra no sólo no supo ponderar correctamente el valor de verdad sino que lo quiso justificar de modo inconsistente.

Ejercicio 5: Considera las siguientes proposiciones verdaderas:

i. Si un entero es par entonces su cuadrado es par. ii. Si un entero es impar entonces su cuadrado es impar.

¿ Como probarías la verdad de cada una de las mismas?

En este ejercicio directamente se da por sentada la verdad de cada proposición y se le interroga al estudiante sobre como probaría tal verdad. Se espera que partiendo de que el número es par o impar, eleve entonces al cuadrado a cada número – ya sea par o impar – y luego analice si el resultado obtenido es par o impar. No debe sorprender por todo el análisis hecho hasta el momento que habrá estudiantes que mostrarán simples verificaciones como prueba de verdad.



Razonamiento seguido

Nota previa: Aquí la clasificación combina a Balacheff (2000) op.cit. con Bell (1976) op.cit.

1) *Cálculo sobre enunciados*. 16 estudiantes $\rightarrow$ 38.10%
2) *Ausencia de razonamiento*. 1 estudiante $\rightarrow$ 2.38%
3) *Empirismo näif*. 15 estudiantes $\rightarrow$ 35.71%
4) *Intento de experimento mental*. 2 estudiantes $\rightarrow$ 4.76%
5) *No responde*. 4 estudiantes $\rightarrow$ 9.52%
6) *Incapacidad*. 1 estudiante $\rightarrow$ 2.38%
7) *Ejemplo genérico*. 3 estudiantes $\rightarrow$ 7.14%

Observaciones

De acuerdo a lo descripto en el prolegómeno a los resultados del análisis, una tercera parte aproximadamente pudo llevar a cabo el razonamiento esperado bajo diferentes matices, pero con una conclusión. Otra tercera parte se limitó a verificar, de estos casos hay que distinguir los que solamente toman un par o un impar y lo elevan al cuadrado y ven que tal resultado es par o impar; mientras que otra tercera parte o no responde, o simplemente argumenta erróneamente, o inclusive justifica tautológicamente.

CONCLUSIONES

Los estudiantes atinan a verificar sin criterio formado a la hora de abordar una proposición confundiendo acciones tan distantes como las de verificar y demostrar.

"La discrepancia entre la verificación empírica típica del comportamiento ordinario y el razonamiento deductivo típico del comportamiento teórico, es una fuente de dificultades, un obstáculo para la comprensión del significado de la prueba. En la práctica educativa, es común confundir esos dos puntos de vista y, como consecuencia, desorientar a los estudiantes quienes ven los 'ejemplos' jugando un rol fundamental a la hora de establecer axiomas y 'descubrir' teoremas, pero los hallan prohibidos cuando se les pide que prueben un enunciado: uno o unos cuantos ejemplos no son aceptables como "prueba."..... En realidad, la relación entre verdad empírica y validez lógica, relación crucial en matemática, es una relación compleja y delicada que debe ser desarrollada a través de la educación." (Mariotti, 1998).

El estudiante ingresante a Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías requiere en los cursos de Matemática del currículo de la carrera elegida comprender la demostración de proposiciones y teoremas. Tiene profundas dificultades para comprenderlas, y más aún para reproducirlas, producto del retardo del desarrollo del pensamiento formal y la supresión de desarrollos teóricos en el área matemática en el ciclo medio.

El estudiante deberá distinguir que la epistemología de la Ciencia Matemática difiere notablemente de la que es propia de las Ciencias Experimentales que hace al tipo de Carreras Ingenieriles o en Ciencias Naturales. A la hora de comprender el proceso deductivo de validación de proposiciones matemáticas expuestas por el profesor en el aula, le es difícil, ya que por lo general, entiende qué se espera de él cuando se le pide una demostración y reconoce que la verificación es un recurso insuficiente como demostración. Sin embargo tiende a recurrir a la misma como mecanismo de prueba cuando encuentra dificultades. Esto probablemente está asociado al hecho de que en la vida y en las ciencias experimentales la verificación es el método de prueba estándar, enfrentándose los estudiantes a un problema epistemológico no menor.

A nivel de desarrollos teóricos en clase, el estudiante tiene reacciones previsibles a la hora de ser evaluado en la teoría y desarrollar demostraciones cuando le es requerido, existiendo en este aspecto dos posiciones diametralmente opuestas, por un lado estudiantes que a pesar de haber recibido un desarrollo en clase se limitan a verificar con imprecisiones ignorando lo realizado por el docente, mientras que otros repiten lo que este realizó pero de modo mecánico y sin tener absoluta claridad de lo que escribió. Ocurre que *"demostrar es una actividad característica del quehacer matemático"* (Mariotti, 1998), pero el estudiante tiene fuertes creencias sobre una Ciencia Matemática que permite "realizar ejercicios" en el peor de los casos; y en el mejor, que permite resolver problemas que tienen que ver con la cotidianeidad, pero sea como sea, su epistemología es algo muy lejano y hasta inexistente. Precisamente a la hora de abordar los procesos deductivos, es reacio frente a la acción de demostrar ya que es *"una actividad que marca diferencias sustanciales entre la matemática y el pensamiento ordinario y las prácticas de la vida cotidiana."*

BIBLIOGRAFÍA

Balacheff, N. (2000): "Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas". Una empresa docente. Univ. de Los Andes. (Bogotá).

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. Educational Studies in Mathematics, 18. pp.147-176.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. Educational Studies in Mathematics., 7(1), pp.23-40.

Brousseau, G. (1995). "Glossaire de didactique des mathématiques", en Thémes mathématiques pour la préparation du concours CRPE, Copirelem, IREM d´Aquitaine & LADIST.

D´Andrea, R.E. (2010). Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas. Tesis de Maestría. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina.

Duval, R. (1993). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? Petit x, 31. pp. 37-61.

Falsetti, M., Marino, T., Rodriguez, M. (2004). "Validación en Matemática en situaciones de aprendizaje". Memorias del VI Simposio de Educación Matemática. Buenos Aires, Argentina.

Hanna, G. (1995). Challeges to the importance of proof. For the Learning of Mathematics, 15(3), p.43.

Mariotti, A. (1998). La intuición y la prueba: Reflexiones sobre los aportes de Fischbein.Dpto de Matemática. Universidad de Pisa. Italia.
http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/981112Theme/981112ThemeES.html

MEC. (1989). Secundaria, p.480

Piaget, J. (1981). "La teoría de Piaget". En: Infancia y Aprendizaje, Monografías 2: "Piaget". Barcelona, 1981. pp.13-54.

Resnick, M.D. (1992). Proof as a source of truth, en Detlefsen, M.(ed.).Proof and knowledge in mathematics, pp.6-32. Londres: Routledge.

Solow, D. (1992). Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas. Case Western Reserve University. Limusa. Noriega Editores. México.