Título de trabajo: Visualización interactiva para la implementación de una secuencia didáctica utilizando las TICs del método de algebra lineal numérica : gradiente conjugado

Nombre y Apellido de los autores: Oscar Enrique Ares.
Institución: Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales – Universidad Nacional de San Luis.
Dirección: 25 de Mayo 384 – Mercedes (San Luis)
E-mail: oares@fices.unsl.edu.ar

Area temática: investigación educativa.
Palabras Claves: gradiente conjugado –algebra numérica – métodos numéricos - visualización interactiva

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica utilizando nuevas tecnologías para la enseñanza de dos temas de algebra lineal numérica, pertenecientes al capítulo de la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales, el método de *gradiente conjugado* y el método del *descenso optimal de máxima inclinación*, que se enseñan a alumnos de tercer año de la carrera de Ingeniería Electrónica en la asignatura Cálculo Numérico. Para la implementar la propuesta didáctica se realiza una programación utilizando la interfase gráfica de MATLAB, GUI (graphical user interface). La *herramienta didáctica innovadora* es la utilización de esta GUI, conjuntamente con una guía de actividades que ordenan y articulan la secuencia didáctica.

Considerando la unidad didáctica "algebra lineal numérica", y con el objetivo de aumentar la comprensión de los métodos iterativos del álgebra matricial que en esta propuesta didáctica se mencionan se utiliza una nueva herramienta computacional que permita la *visualización* de estas técnicas iterativas y proporcione resultados numéricos que permitan entender visualmente definiciones como, *direcciones conjugadas*. En esta GUI de MATLAB se aborda, principalmente, la interpretación gráfica de los métodos numéricos y las condiciones requeridas para su aplicación. Para su diseño se ha tenido como eje la idea de que para enseñar a los alumnos un concepto matemático o método numérico se debe presentar la reunión de *registros de representación semiótica*, y su *coordinación* **.** El diseño propuesto, para dar tratamiento al tema ha sido elaborado con el software MATLAB. Este software permite integrar tres aspectos como lo son: *la computación numérica y simbólica, su visualización, y su ambiente de programación***.**

Objetivos

El objetivo principal es la *visualización interactiva* de *gradiente conjugado* y *descenso optimal de máxima inclinación* (también conocido como *gradiente de paso optimo)* y realizar un *estudio comparativo* de los métodos Jacobi, Gauss_Legendre, sobre relajación y gradiente conjugado, en gráficos semilogaritmicos, del error absoluto aproximado (en una cierta norma) versus el número de iteraciones. La utilización de esta GUI, permite verificar los cálculos realizados en actividades prácticas. En consecuencia se debe integrar a una guía de actividades que permita implementar la secuencia didáctica.

La ingeniería didáctica esta basada en los ejes teóricos de: *visualización interactiva y teoría de registros semióticos e imagen conceptual*, provenientes de la didáctica de las matemáticas.

Marco teórico

En calculo numérico el método de gradiente conjugado es una técnica iterativa para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuando la matriz de coeficientes es **simétrica y definida positiva**, esto es, $A = A^T$ (matriz simétrica) conjuntamente con la condición $\mathbf{x}^T A\, \mathbf{x} > 0 \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
(A definida positiva).

Los vectores **x** e **y** son conjugados con respecto a A, si se verifica:
$\mathbf{x}^T A\, \mathbf{y} = 0$ **.** Es evidente que **x** e **y** son vectores linealmente independiente.

Supongamos que en $\mathbf{R}^n$, tenemos un conjunto $\{\boldsymbol{p_k}\}_{k=1}^{k=n}$ vectores mutuamente conjugados,
y en consecuencia de direcciones mutuamente conjugadas. $\{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{k=n}$ define una base en $\mathbf{R}^n$.

La solución de Ax=b, se denota x^* y se puede escribir como combinación de los vectores de la base, $\{\boldsymbol{p_k}\}_{k=1}^{k=n}$.

$$\mathbf{b} = A\,\mathbf{x}^* = A \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k p_k$$

Sabiendo que $\mathbf{p}_i^T A\, \mathbf{p}_k = 0$ si $i \neq k$ y además $\mathbf{p}_k^T A\, \mathbf{p}_k = (\|\mathbf{p}_k\|_A)^2$, la expresión anterior, permite despejar α_k al premultiplicar por $\mathbf{p}_k^T$ miembro a miembro, obteniéndose:

$$\alpha_k = \frac{\langle \boldsymbol{p_k}, \boldsymbol{b} \rangle}{\|\boldsymbol{p_k}\|_A^2}$$

La idea central que se pretende visualizar conjuntamente con el método iterativo es la siguiente: *la solución de un sistema A**x** = **b** siendo A simétrica y definida positiva, puede obtenerse buscando el punto en el que alcanza el valor mínimo el funcional*

$$J(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T x + c$$

Que sea simétrica y definida positiva, determina que el punto crítico sea un mínimo.
Como ilustración se elige J: **R→R** así definido J (x) = 1/2 A x^2 – bx + c con A>0 número real.
J tiene un punto punto crítico en x^*: dJ / dx = A x* - b = 0 $\leftrightarrow$ A x^* = b (igual forma de un sistema de ecuaciones lineales) y finalmente x* = A / b . Luego d ^{2}J / dx^2 = A>0 (x* mínimo) .

En dos variables el funcional es: $J(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)(x_1, x_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + c$

Su gráfica es un paraboloide elíptico o de revolución y su mínimo es la solución del sistema
A **x** = **b**.

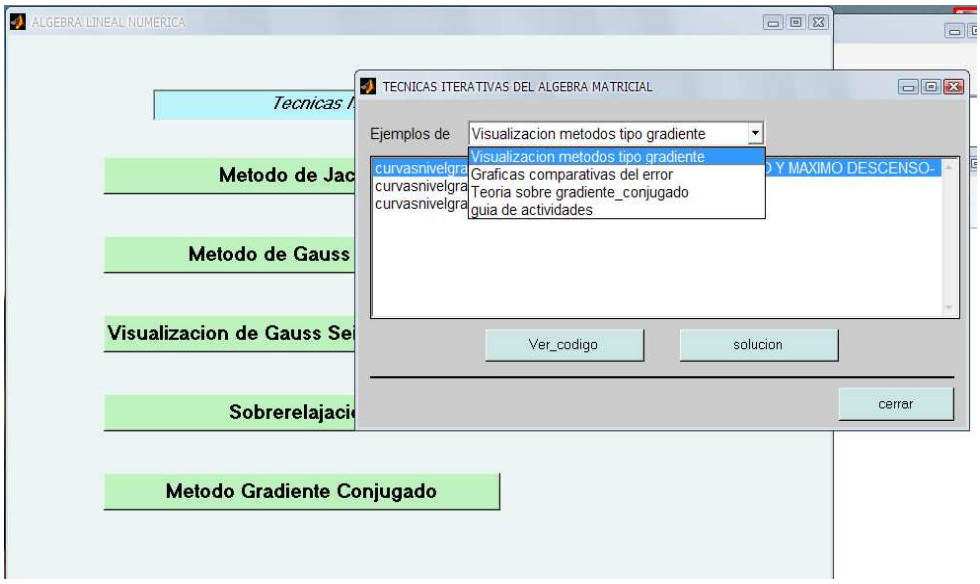
La importancia de la visualización y la imagen conceptual

La imagen conceptual es la *primera asociación mental no verbal que aparece en nuestra mente* cuando el nombre del concepto es evocado (Hitt,Fernando,2000).
Puede tratarse de una impresión visual o una colección de impresiones o experiencias. si bien estas imágenes visuales, experiencias pueden luego traducirse en forma verbales, no es así como aparecen en primera instancia.
Para adquirir un concepto *no es suficiente con memorizar su definición*, debe poseerse una imagen conceptual del mismo. es decir, que el aprendizaje, la comprensión, la aplicación y desarrollo de los conceptos matemáticos involucra la construcción de un cierto tipo de estructura mental: la imagen conceptual
La utilización de la computadora como herramienta cognitiva favorece el diseño de "**situaciones de acción, formulación y validación" e "institucionalización**" (Brosseau 1986, citado en el libro Matematica educativa, Farfan, María Rosa y otros).

Sucesión de pantallas que permiten la visualización

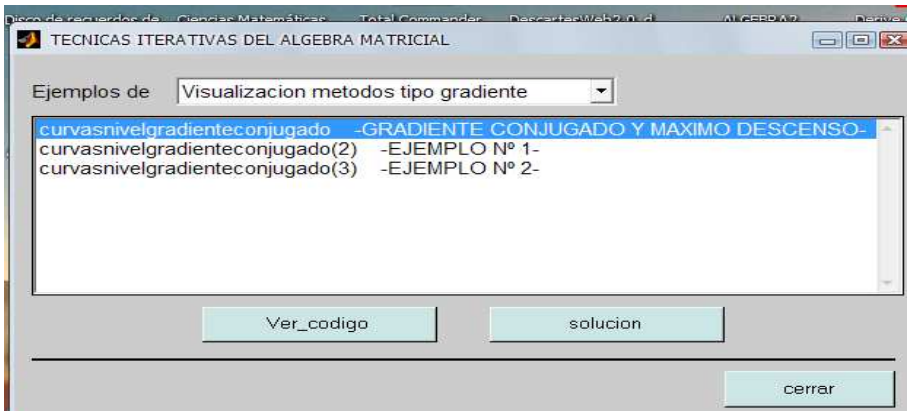
Pantalla inicial

Se ilustra una botonera con los distintos métodos iterativos del algebra matricial. Si se pulsa sobre gradiente conjugado se abre una ventana, donde existe un menú de opciones.

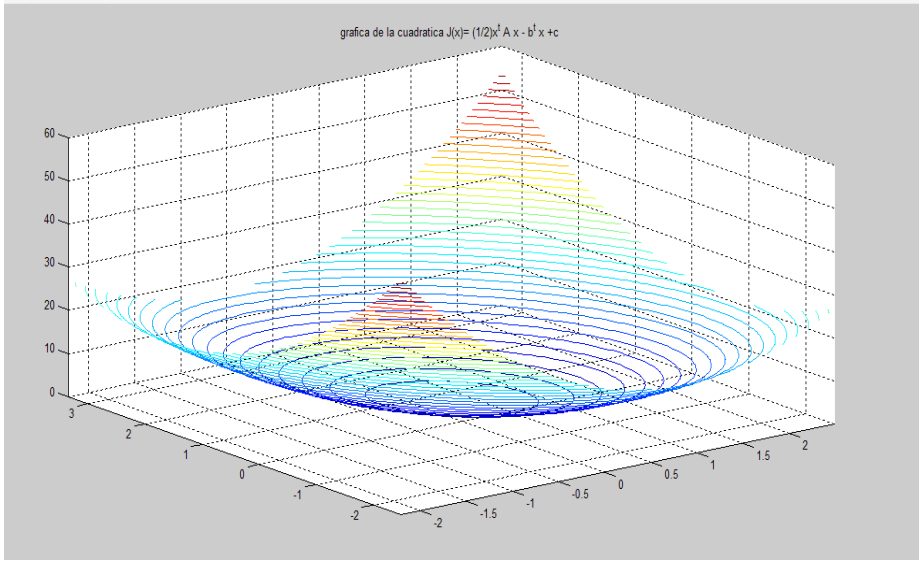


Al pulsar sobre visualización métodos tipo gradiente y luego sobre ejemplo 1, se despliegan las sucesivas pantallas que ilustran las gráficas asociadas al funcional

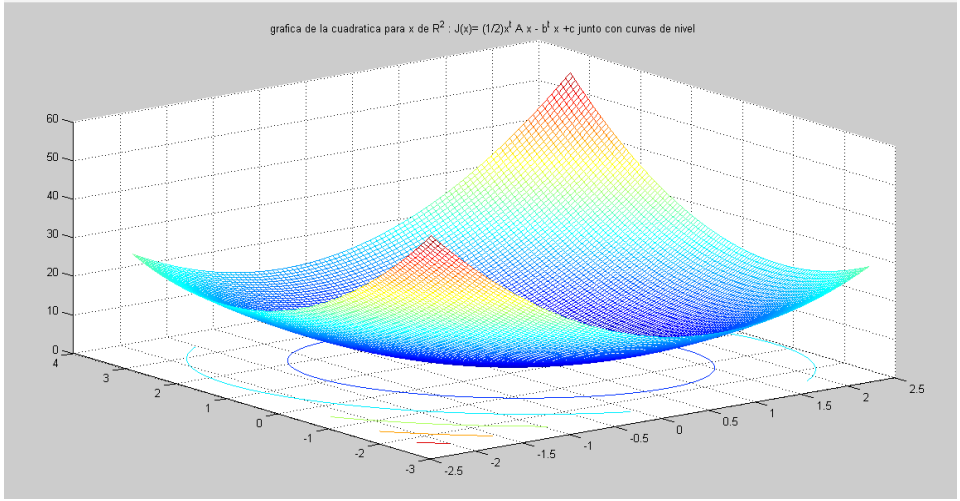
$J(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}\right)(x_1, x_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + c$, conjuntamente con las curvas de nivel.



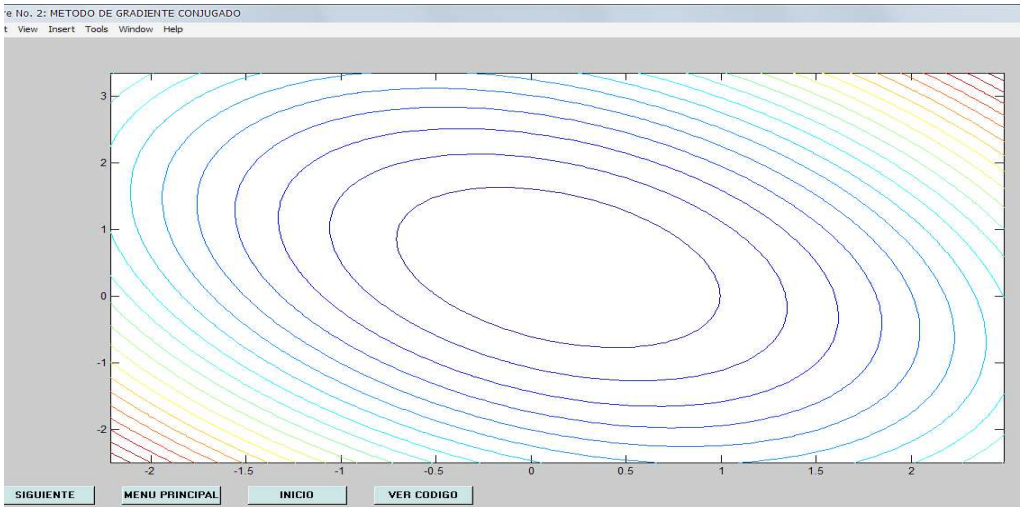
Grafica del funcional cuadrático, para una A predefinida. Todos las pantallas que se muestran a continuación, se van sucediendo con una pausa que puede regular el docente en su exposición o el alumno cuando la manipule directamente, puesto que puede *acceder directamente al codigo* del archivo.m de matlab.



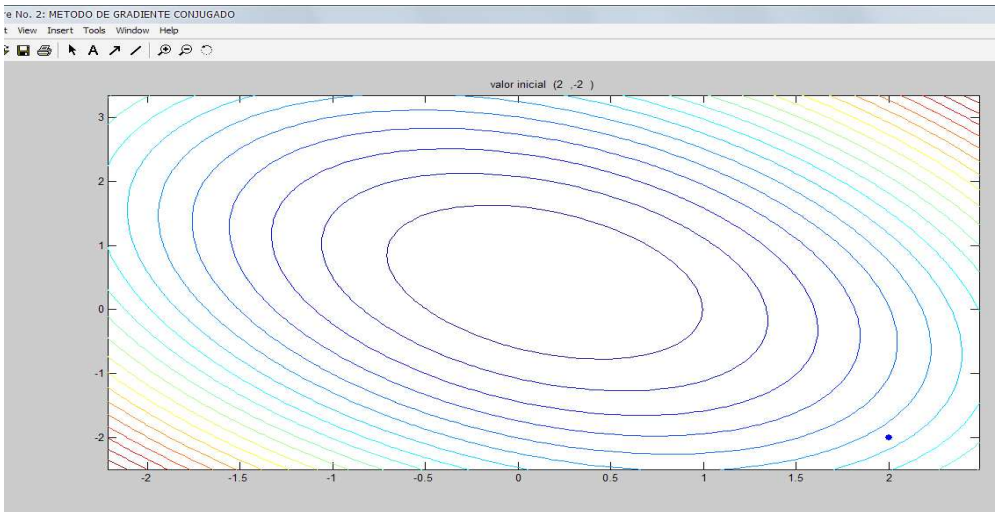
La pantalla siguiente ilustra el la superficie paraboloide elíptico junto con la proyección de sus curvas de nivel



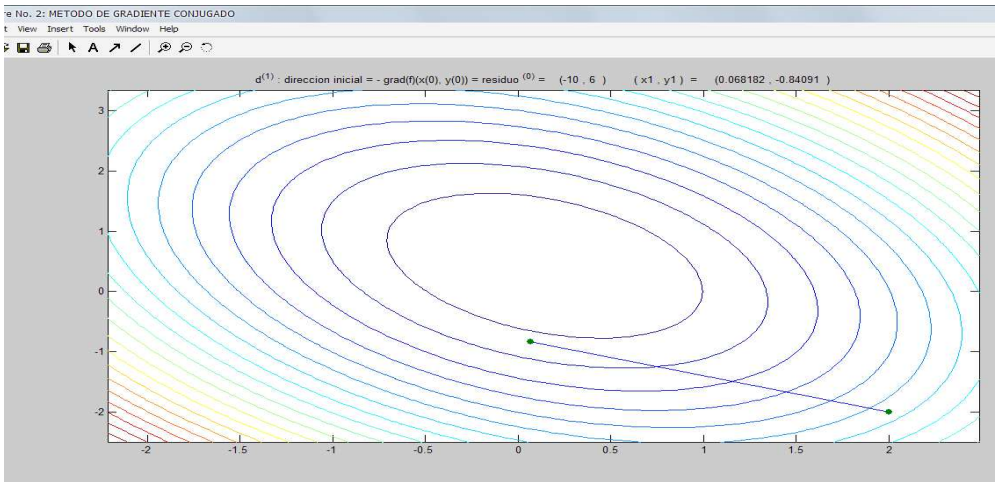
Esta pantalla muestra las curvas de nivel, puesto que la sucesión de puntos **x** del método iterativo se visualizan en este plano.

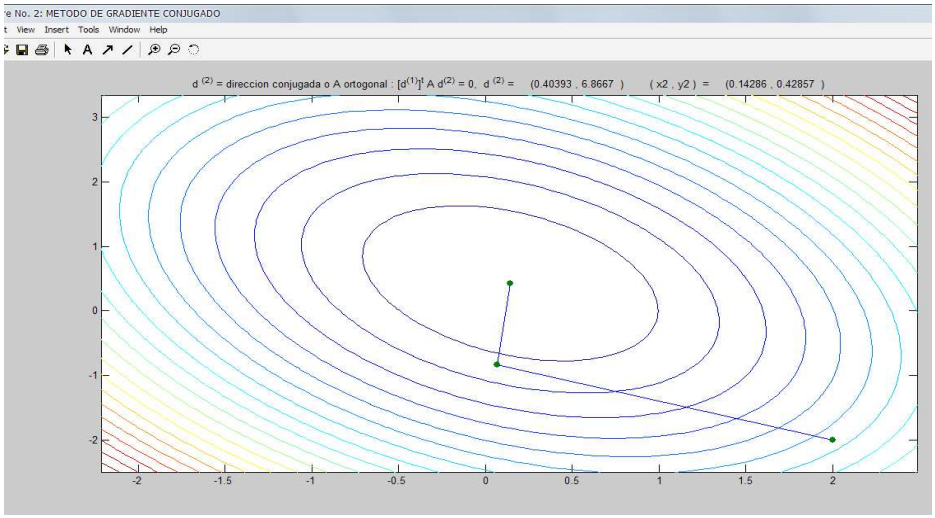


La esferita azul en la grafica indica el punto inicial o punto semilla que se fija para dar arranque al método. Obsérvese los *dos tipos de registros, coordinados, grafico y numérico*.

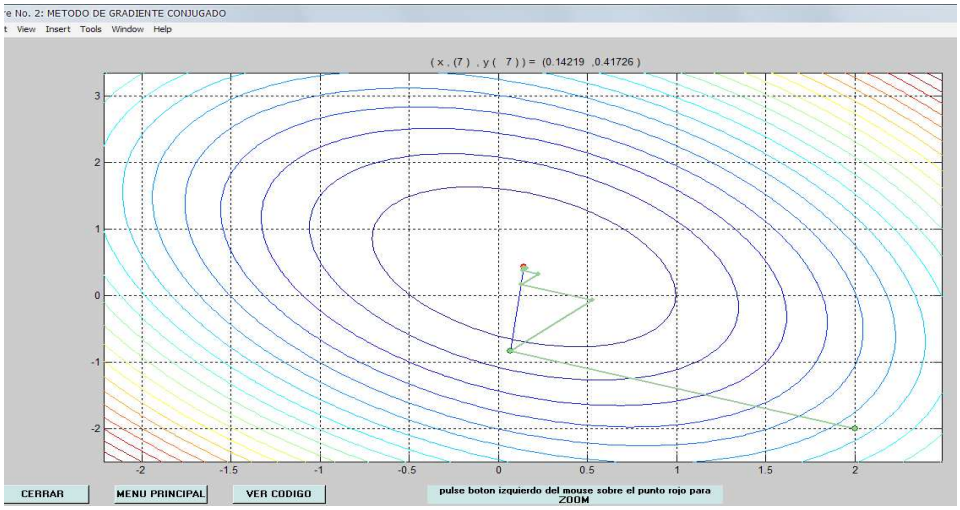


Puede observarse el mecanismo del método paso a paso. Se indican las *direcciones conjugadas y las coordenadas de los puntos sucesivos* $\mathbf{x}^{(i)}$**.**

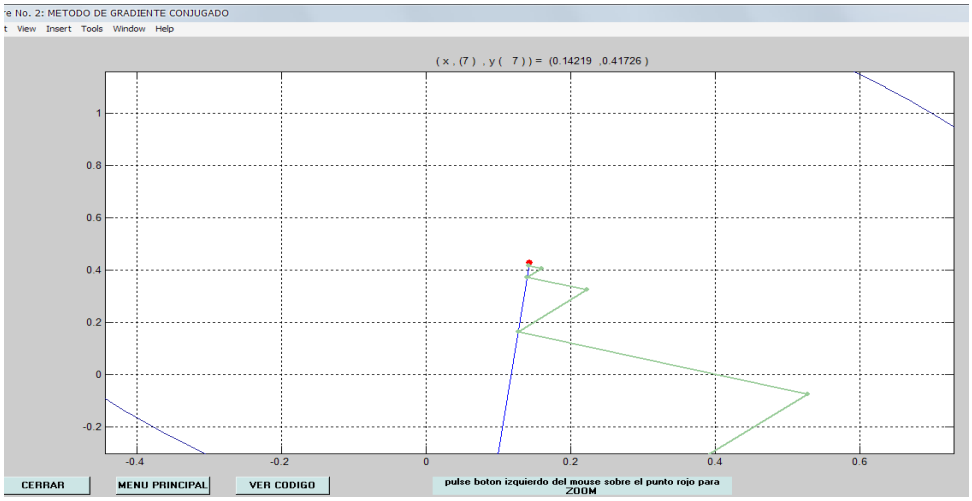




A continuación el método de *descenso optimal de máxima inclinación* superpuesto, en línea verde. Esto es, en cada punto se determina la dirección de máximo descenso y el tamaño de paso en esa dirección.

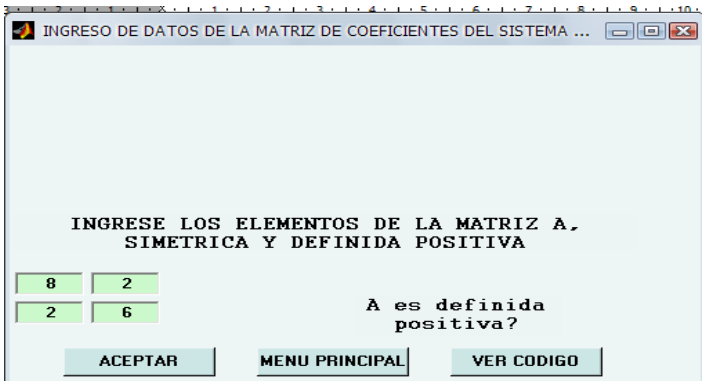


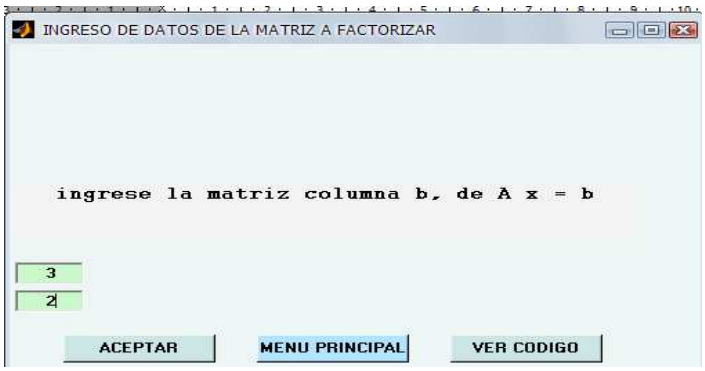
La esferita color rojo indica la solución exacta. En cada paso se indica el registro numérico de las coordenadas del punto. Puede observarse como la sucesion de punto de gradiente de paso optimo determina exactamente la recta del método de gradiente conjugado.

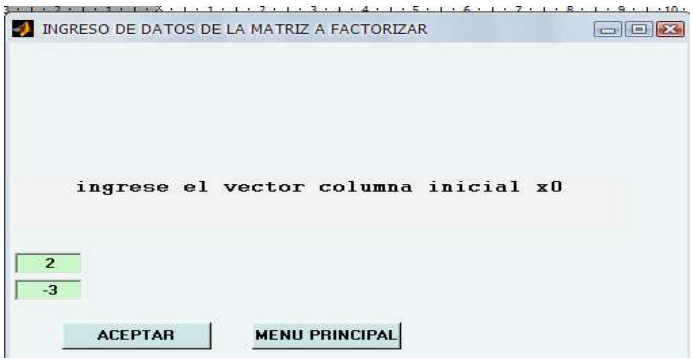


Interactividad para visualizar el proceso

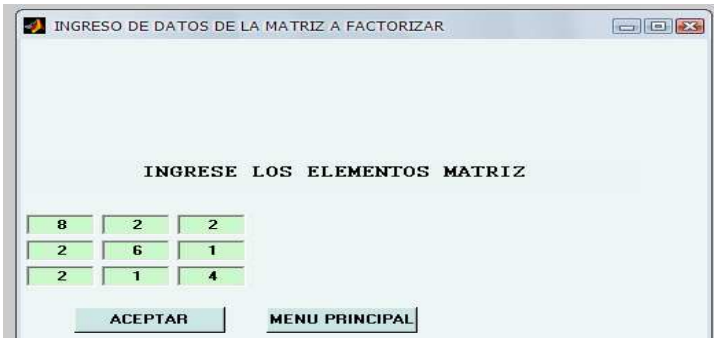
Se pueden cargar los valores de la matriz A, **b** que determinan el funcional cuadrático $J(x_1,x_2)=\left(\frac{1}{2}\right)(x_1,x_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}-(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}+c$, y el valor inicial $\mathbf{x}_0$. Cada vez que se pulsa el botón aceptar se abre una nueva ventana para cargar los datos restantes.

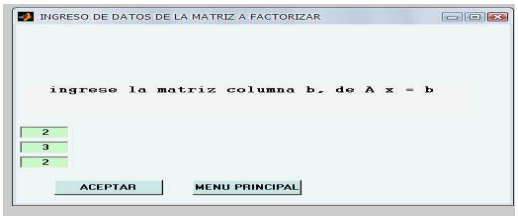


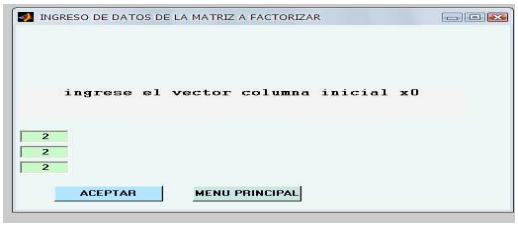


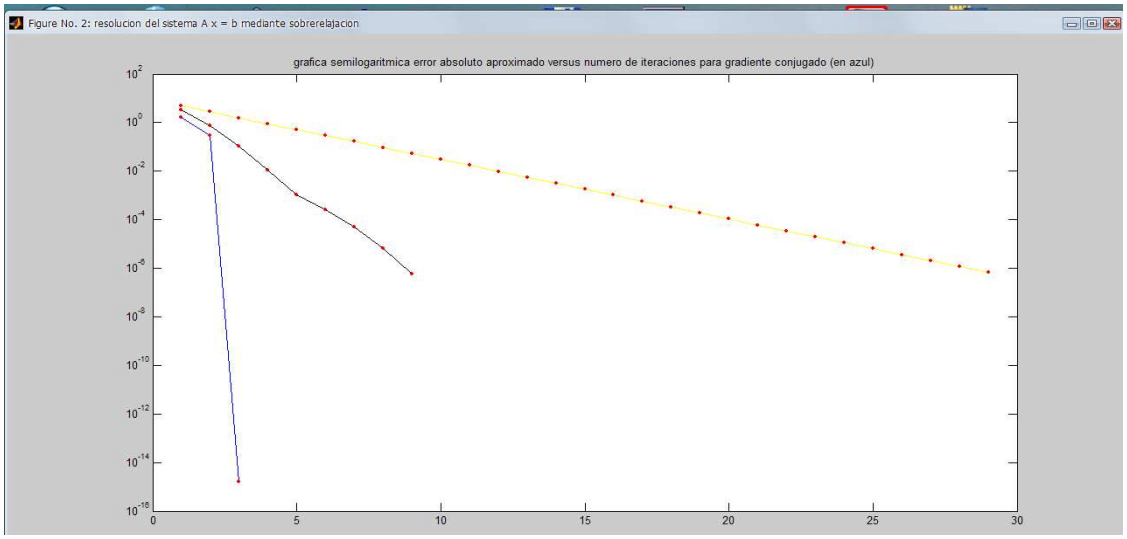


Para hacer un estudio del comportamiento del método de Gauss Seidel, Jacobi, Sobrerelajación y gradiente conjugado, el alumno va disponer de esta herramienta interactiva, a partir de la cual puede verificar hipótesis de la teoría acerca de la rapidez de convergencia. En la siguientes imágenes queda ilustrado el proceso









Conclusiones

Disponer de una herramienta computacional, que permita *visualizar* el mecanismo de iteración es de suma importancia en métodos numéricos. Permite simultáneamente verificar las actividades realizadas con lápiz y papel. Este diseño, se integra con una guía de actividades (no desarrollada en este trabajo), que ordena la secuencia didáctica. Cabe mencionar que esta secuencia fue ensayada en actividades de laboratorio, obteniendo gran aceptación por parte de los alumnos generándo una participación activa.

Bibliografia

1_Crisologo Dolores, Gustavo Martínez, Rosa María Farfan (2007). Matematica Educativa. Ediciones Diaz de santos.
2_Fernando Hitt (2000). Construccion de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas.
3_Steven C. Chapra (2008). Métodos numéricos para ingenieros.
4_David Kincaid (1994). Análisis Numerico matemáticas del calculo cientifico