DETERMINACIÓN DE ARMÓNICOS DE UNA SEÑAL MEDIANTE FILTRADO ADAPTIVO

Dr. Ing. Jesús Rubén Azor Montoya
Facultad de Ingeniería – Universidad de Mendoza - Argentina
razor@telar.org
Cátedra Análisis de Señales

Palabras Clave: Transformada Discreta de Fourier, Filtrado Adaptivo, Calidad de Potencia, Combinador Lineal Adaptivo.

Resumen – El presente trabajo proporciona el trabajo algorítmico necesario para determinar los armónicos presentes en una señal eléctrica a través de la utilización de un sencillo filtro FIR de dos taps cuyos pesos se calculan mediante la ecuación de Wiener-Hopf.
La utilización de la presente técnica se aparta de la tradicional, la Transformada Discreta de Fourier (DFT), evitando los errores que se producen en esta última debido al fenómeno llamado "leakage" que produce una distorsión en la estimación de las amplitudes de los armónicos.

1 - Introducción

En la actualidad, la Calidad de Potencia del servicio eléctrico se ha convertido en un área de profunda investigación dada la alta incidencia de la electrónica digital en la gran mayoría de los aparatos conectados a las redes domiciliarias.

Dado que estos dispositivos trabajan en sólo una parte del ciclo de la onda de alimentación, las corrientes que circulan por los circuitos no tienen la onda senoidal (a lo sumo desfasada debido al factor de fase) que era habitual en el "mundo analógico" que se está dejando atrás.

En las redes industriales también está siendo más habituales los sistemas discretos, como por ejemplo los reguladores de velocidad de los motores, por mencionar uno de los más destacados.
La presencia de armónicos en las redes perturba notablemente el comportamiento de otros dispositivos conectados a ellas, ocurriendo en algunos casos intervalos en que las corrientes en los neutros superen a la de las fases [2].

En los motores, la presencia de armónicos, afectan las características de operación y la vida útil de los mismos [2]. Existen diversas técnicas para minimizar estos efectos que conducen siempre a conocer lo más exactamente posible la magnitud y el orden de cada uno de los armónicos.

Los armónicos de menor orden y secuencia negativa tienen un efecto mayor que los de secuencia positiva. También, los motores con alto contenido de armónicos en la tensión de alimentación sufrirán un incremento de vibraciones y torques pulsantes.

En este trabajo se propone un método de cálculo de la magnitud de cualquier armónico a partir de la toma de datos de la señal "contaminada" y procesada con un filtro adaptivo de tan sólo dos pesos.

2 - Filtrado adaptivo

Este tipo de filtro tiene la característica de presentar, a diferencia de los filtros tradicionales, un conjunto de pesos (cuyo número constituye el *orden del filtro*) que pueden variar conforme a un *algoritmo adaptivo*. De este modo, el filtro presenta distinto comportamiento en cuanto a sus características principales (como por ejemplo, la respuesta en frecuencia).

El caso más habitual, en cuanto a estructura, es el de un filtro de Respuesta Finita (FIR) ya que los algoritmos derivados de él son más sencillos que para el caso de los de Respuesta Infinita (IIR).

La propuesta más simple es el "*Combinador lineal adaptivo*" [3] que es fundamental para el procesamiento adaptivo de señales y de gran importancia en sistemas de "aprendizaje".

Un diagrama de la forma general de un combinador lineal adaptivo de orden (L+1) se muestra en la figura 1.

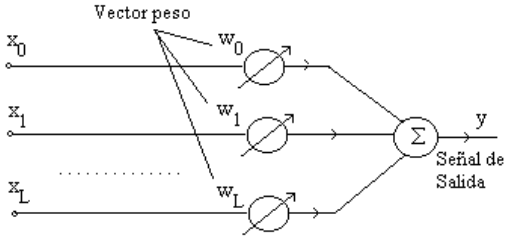

Figura 1 – Combinador lineal adaptivo

Donde **x** es el vector de datos de entrada al filtro, **w** es el vector de pesos ajustables, e y es la salida. Como se puede observar, en un instante del proceso de adaptación (que se indicará con la variable *k*), el vector de salida es una combinación lineal del vector de entrada a través del vector de pesos.

Si la señal de entrada es única, el esquema correspondiente es el del "*filtro transversal adaptivo*" que se muestra en la figura 2.

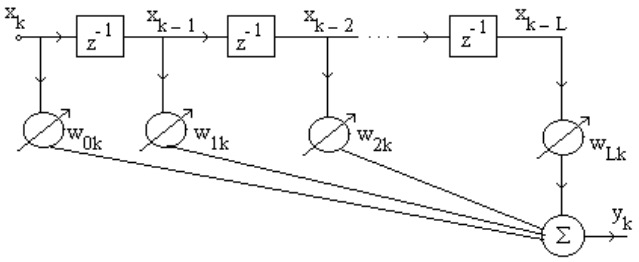

Figura 2 – Esquema del filtro transversal adaptivo

Los valores x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, … , x_{k-L}, son las entradas última, penúltima, etc. de la señal a procesar. Se agrega a los pesos un segundo subíndice, *k*, para hacer más explícito el concepto tiempo-variante de los mismos.

En base a lo visto, la salida ***y*** en el instante *k*, está dada algebraicamente por:

$$y_k = \sum_{l=0}^{L} w_{lk} \cdot x_{k-l}$$

Definiendo los dos siguientes vectores columna

$$x = \left(x_k \;\; x_{k-1} \;\; \ldots \;\; x_{k-L}\right)^T$$

$$w = \left(w_{1k} \;\; x_{2k} \;\; \ldots \;\; x_{Lk}\right)^T$$

La salida se puede expresar en forma más sucinta como

$$y_k = X_k^T \cdot W_k = W_k^T \cdot X_k$$

En procesos de adaptación con performance realimentada, el vector de pesos del combinador lineal es ajustado que produzca una salida, y_k, que concuerde lo más ajustadamente posible con una *señal de respuesta deseada*.

Esto se lleva a cabo comparando la salida con la respuesta deseada para obtener una señal de "*error*" y luego ajustar u optimizar el vector de pesos para minimizar esta señal.

En definitiva, se propone un esquema como el de la figura 3.

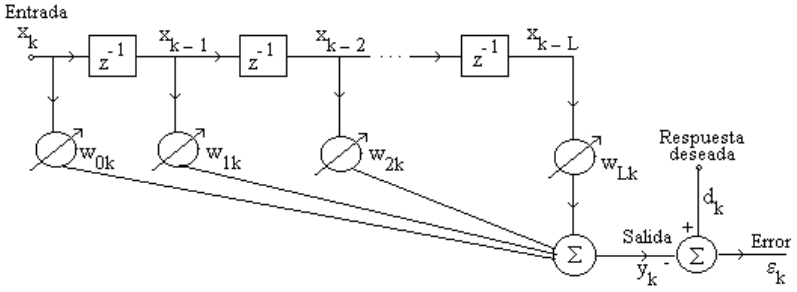

Figura 3 – Esquema a utilizar para el reconocimiento de armónicos.

4 - Algoritmo adaptivo

Se propone en este trabajo alimentar el esquema de la figura 3 con la señal (muestreada) a analizar como *respuesta deseada* (d_k) y como *señal de entrada* (x_k) una senoide (si se quiere calcular el coeficiente *b* del desarrollo en Serie de Fourier) o una cosenoide (si se quiere calcular *a*) con la frecuencia del armónico que se quiere determinar.

Es posible calcular el conjunto de pesos (*W_opt*) del mejor ajuste (desde el punto de vista de los mínimos cuadrados) mediante la expresión

$W_opt = R^{-1}.P$ Donde **R** es la "*Matriz de Correlación de Entrada*" y está dada por

$$R = E\begin{bmatrix} (x_k)^2 & (x_k \cdot x_{k-1}) & (x_k \cdot x_{k-2}) & \dots & (x_k \cdot x_{k-L}) \\ (x_{k-1} \cdot x_k) & (x_{k-1})^2 & (x_{k-1} \cdot x_{k-2}) & \dots & (x_{k-1} \cdot x_{k-L}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_{k-L} \cdot x_k) & x_{k-L} \cdot x_{k-1} & x_{k-L} \cdot x_{k-2} & \dots & (x_{k-L})^2 \end{bmatrix}$$

Donde *E* es el operador *esperanza matemática* y no es más que un "promedio de tiempos".

Para obtener el primer elemento de la matriz R, se suman los cuadrados de cada elemento del vector **x** y al resultado se lo divide por el número de sumas realizadas (longitud del vector **x**).

Para obtener el segundo de la derecha (primera fila, segunda columna) se suman los productos de los siguientes vectores, elemento a elemento, y la suma se divide por la cantidad de productos (longitud del vector **x** menos uno).

$$V1 = (x_k \;\; x_{k-1} \;\; \dots \;\; x_{L-1})^T \qquad V2 = (x_{k-1} \;\; x_{k-2} \;\; \dots \;\; x_L)^T$$

Con el mismo criterio, se halla el resto de los elementos. Desde ya que la matriz resultante es simétrica, lo que simplifica notablemente los cálculos.

El vector **P** es el conjunto de correlaciones cruzadas entre la respuesta deseada y los componentes de entrada.

$$P = E\left[(d_k \cdot x_k \;\; d_k \cdot x_{k-1} \;\; \dots \;\; d_k \cdot x_{k-L})^T\right]$$

Este vector es el conjunto de correlaciones cruzadas entre la respuesta deseada y los componentes de entrada.

Del mismo modo que para el cálculo de los elementos de **R**, el primero se calcula promediando la suma de los productos de los vectores **d** y **x** elemento a elemento.

Para calcular el segundo, se forma los vectores

$$V1 = (d_k \;\; d_{k-1} \;\; \dots \;\; d_{L-1})^T \qquad V2 = (x_{k-1} \;\; x_{k-2} \;\; \dots \;\; x_L)^T$$

Luego se suman los productos, elemento a elemento, y la suma se divide por la cantidad de productos (longitud del vector **x** menos uno).

5 - Simulaciones

Con el objeto de poner a prueba el comportamiento del modelo planteado ante una señal de prueba compleja, se procede a "montar" la siguiente estructura (figura 4) para verificar los resultados con los valores exactos calculados mediante integración.

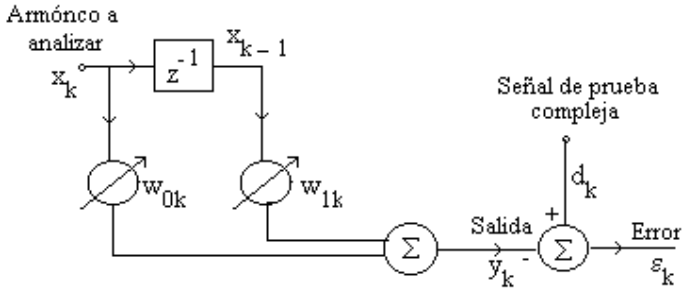

Figura 4 – Esquema para la determinación de un armónico determinado

Cuando se calcule el vector óptimo de pesos, la salida *y* deberá ser una senoide (o cosenoide, según sea la entrada) cuya amplitud coincide con el valor de la armónica buscada (coeficientes *a* ó *b*).

La señal compleja de prueba tiene forma que se observa en la figura 5 y se la elige por tener una cantidad infinita de armónicos (pares e impares) más una componente de continua.

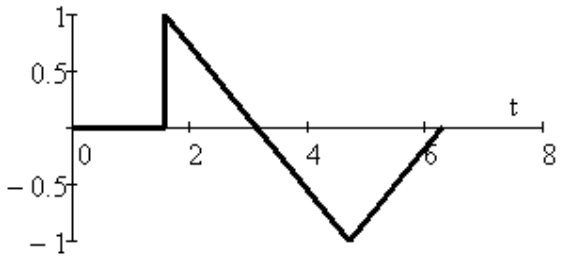

Figura 5 – Señal de prueba (ingresa como vector **d**)

A fin de instrumentar el proceso general propuesto en el trabajo, se propone un programa en Matlab® [4] que sintetiza la simulación.

*5-a Introducción de los vectores **d** y **x***

Con las siguientes sentencias se introduce un periodo completo de la función deseada (*d*) con 2^{16} muestras y la función de entrada (*x*) que es un seno de tres periodos completos (tercer armónico, coeficiente *b*.

```
N=2^16; % número de muestras
% Función deseada d(i)
i=1:N/4-1;d(i)=0;i=N/4:3*N/4-1;d(i)=2-4/N*i;i=3*N/4:N;d(i)=-4+4/N*i;
% Funcion entrada x(i) senoide de 3 ciclos
M=3;i=1:N;x(i)=cos(2*pi*(i-1)*M/N);
```

5-b Determinación del vector óptimo W_opt

```
n=2; % longitud del filtro adaptivo
% Cálculo de la matriz de autocorrelación R
% Diagonal principal
for k=1:n,
     V=x(k:length(x));R(k,k)=V*V'/length(V);
end
% Cálculo del resto de los elementos
for k=1:n,
     c=1;
     for j=k+1:n,
        V1=x(k:length(x)-c);
        V2=x(j:length(x));
        R(k,j)=V2*V1'/length(V1);R(j,k)=R(k,j);c=c+1;
     end
end
% Cálculo del vector de correlación cruzada P
c=0;
for j=1:n,
        V1=x(1:length(x)-c);
        V2=d(j:length(x));
        P(j)=V2*V1'/length(V1);c=c+1;
end
W_opt=R^-1*P'; B=W_opt;
% verificación del ajuste
y=filter(B,1,x);
My=max(y); entrega el coeficiente b(3) de la S. de Fourier
```

6 – Generalización

El procedimiento se puede generalizar inyectando en **x** una cosenoide de la misma frecuencia, obteniéndose el coeficiente *a*. Luego por simple manipulación matemática se pueden obtener los coeficientes *c*, que representan los valores modulares de los correspondientes armónicos.

7- Conclusiones

Este trabajo propone una implementación práctica de los filtros adaptivos, en este caso para la determinación de los armónicos contenidos en una señal.

Con esta metodología se pueden trabajar "en paralelo" los datos de la señal contaminada con varios filtros adaptivos que permitan individualizar los armónicos que sean de interés para el usuario.

También es posible instrumentar un sistema de "polling" que permita seleccionar el armónico en particular que se quiera evaluar.

8- Bibliografía

[1] Schneider Electric, "*Información Técnica, Generalidades sobre Armónicos"*. 1998.
[2] IEEE Report. *"The effects of power system harmonics on power equipment and loads"*. IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. 1985
[3] Widrow, B. "*Adaptive Signal Processing*". Prentice Hall. 1985
[4] Mathworks, "*MATLAB® The Language of Technical Computing*". 2008