VISUALIZACIÓN Y TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS SERIES DE TAYLOR Y FOURIER

Marta G. Caligaris, Georgina B. Rodríguez y Lorena F. Laugero

Grupo Ingeniería & Educación
Facultad Regional San Nicolás
Universidad Tecnológica Nacional
Colón 332 (2900) San Nicolás, Argentina
gie@frsn.utn.edu.ar

Área temática: Investigación educativa
Palabras Claves: Series de Taylor, series de Fourier, Scilab, ventanas personalizadas.

Resumen

La necesidad de aproximar una función mediante polinomios o de representarla como suma de un número finito de funciones más sencillas, se presenta con frecuencia al resolver problemas de ingeniería. De allí, la importancia de que los estudiantes de estas carreras comprendan adecuadamente las series como las de Taylor o Fourier.

En este trabajo se muestran las ventanas personalizadas que se han diseñado en SCILAB para enseñar las series mencionadas. Además, se analizarán distintos ejemplos por medio de los cuales los alumnos, de una manera simple, podrán comprender aquellos conceptos que les resultan difíciles al estudiar el tema.

Introducción

La incorporación de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y aprendizaje ha transformado paulatinamente el modelo tradicional de la clase. Las nuevas tecnologías, gracias a la posibilidad que ofrecen de manejar dinámicamente los objetos matemáticos en sus múltiples sistemas de representación, abren espacios en los que el estudiante puede vivir experiencias matemáticas, difíciles de reproducir con lápiz y papel. En estas experiencias, el alumno puede realizar actividades de exploración y visualización en las que es posible manipular directamente los objetos matemáticos y sus relaciones y en las que él puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático [1].

En este nuevo contexto, la función primordial del docente es la de diseñar y organizar situaciones adecuadas que permitan, a través de la interacción del alumno con el medio, el surgimiento del conocimiento matemático [2].

La necesidad de aproximar una función mediante polinomios o de representarla como suma de un número finito de funciones más sencillas, se presenta con frecuencia al resolver problemas de ingeniería. Por esta razón, es importante que los estudiantes de estas carreras comprendan las diferencias que existen al emplear una serie de Taylor o Fourier en un problema particular, así como también determinar en qué situaciones es pertinente utilizar cada uno de estos desarrollos.

Para ayudar a los alumnos a comprender, por ejemplo, el concepto de aproximación de una función, ya sea en forma local o global, o para que analicen la influencia del grado de aproximación, se han diseñado ventanas personalizadas por medio de las cuales el alumno podrá “vivir esas experiencias matemáticas, difíciles de reproducir con lápiz y papel”.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar las ventanas personalizadas que se han elaborado en SCILAB y la forma de utilizarlas en el análisis de distintos ejemplos. Los mismos se han seleccionado adecuadamente para que los alumnos, de una manera sencilla, puedan comprender aquellos conceptos que suelen resultar dificultosos en el aprendizaje del tema. Se supone que los desarrollos en serie utilizados en las ventanas son conocidos [3 - 5], y por ello no se incluye su descripción.

Uso de recursos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática

Teniendo en cuenta los antecedentes que existen sobre el empleo de herramientas tecnológicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, es posible afirmar que las mismas son un recurso poderoso ya que brindan posibilidades didácticas y pedagógicas de gran alcance [6 – 8]. Esto se debe a que no sólo permiten visualizar fenómenos que de otra forma serían inaccesibles, sino que facilitan el aprendizaje de conceptos basándose en la exploración. Además, al tratarse de recursos novedosos, despiertan el interés y curiosidad del alumno.

Por otra parte, el hecho de poder resolver un problema cuantas veces quiera, posibilita al alumno analizar y relacionar los resultados obtenidos con las variaciones de parámetros efectuadas, realizar conjeturas, descubrir patrones, plantear y validad hipótesis, y sintetizar los resultados arrojados por el recurso con evidencias matemáticas en concordancia [9]. Es decir, el empleo de recursos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de la matemática permite desarrollar en los alumnos un tipo de pensamiento matemático diferente, basado en el desarrollo de habilidades y competencias.

Los sistemas de representación

Una particularidad de la matemática es que sólo se puede hablar de un objeto a través de alguna de sus representaciones o registros, debido a que no se puede tener acceso directo a ellos mediante la percepción o por medio de una experiencia intuitiva inmediata. En este sentido, se requiere de una representación que permita realizar una serie de actividades cognitivas, a través de las cuales el alumno pueda aproximarse a dicho objeto. Pero para generar la comprensión de un objeto matemático, es necesario que el alumno pueda disponer de distintos registros del mismo y transitar de un registro a otro según el tratamiento que se dé a dicho objeto. Por lo tanto, si un alumno dispone de una sola representación, el objeto que pretende identificar a través de ésta, no podrá ser independizado de la representación y por ende confundirá el objeto con esa única representación que conoce.

Una exigencia básica para la comprensión de un concepto matemático por parte de un estudiante es la coordinación o articulación entre sus diferentes representaciones. Es decir, se puede afirmar que un alumno ha comprendido un concepto cuando éste manifieste que ha enriquecido sus redes internas de conocimiento. Y esta manifestación sólo puede hacerse a través de los sistemas de representación y mediante las actividades asociadas a los mismos. Por lo tanto, la coordinación de registros no es la consecuencia del entendimiento matemático sino que es una condición esencial debido a que cada sistema de representación permite ver una faceta diferente del objeto a estudiar y pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes [10].

En este contexto, el empleo de recursos tecnológicos es favorable debido a que su utilización permite el manejo dinámico de las distintas representaciones del objeto matemático en estudio.

La visualización

La visualización es una de las habilidades que se desarrolla en los alumnos al incorporar recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La visualización es un concepto amplio, de hecho es una noción sobre la que hay diferentes concepciones en la investigación de la enseñanza de la matemática. Por ejemplo, para Arcavi [11] la visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, empleo y reflexión sobre cuadros, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas desconocidas y anticipando el entendimiento.

Por esta razón, es factible que el uso de ventanas personalizadas en el proceso de aprendizaje no sólo contribuya a que los alumnos desarrollen la habilidad de visualizar, sino que la interacción dinámica con las mismas permita coordinar las distintas representaciones semióticas del objeto matemático en estudio, favoreciendo así el aprendizaje conceptual.

El aprendizaje de las series de Taylor y Fourier

Existe una gran cantidad de problemas de ingeniería que requiere de las aproximaciones mediante series de Taylor y de Fourier para obtener su solución. Por esta razón, es importante que los alumnos incorporen adecuadamente estos objetos matemáticos y sepan aplicarlos en forma conveniente.

Sin embargo, es común que en su proceso de aprendizaje los alumnos encuentren diversos inconvenientes. Así por ejemplo, una de las principales dificultades que se presenta es la comprensión del concepto de aproximación local de la serie de Taylor y de aproximación global de la serie de Fourier. También el análisis de la influencia del grado de aproximación o la importancia del punto de desarrollo para el caso de la serie de Taylor.

Por esta razón, teniendo en cuenta las potencialidades que brindan los recursos tecnológicos, es importante que el docente haga uso de este tipo de herramientas en su proceso de enseñanza. De esta manera, el alumno podrá superar los posibles inconvenientes que se le presenten en el aprendizaje e internalizar los diversos conceptos involucrados en el tema.

Ventanas personalizadas

La elaboración de las ventanas personalizadas en el desarrollo de las series de Taylor y Fourier surgió a partir de la búsqueda de elementos que permitieran facilitar la enseñanza y el aprendizaje de determinados conceptos que habitualmente son difíciles de adquirir, y que necesitan de procesos de práctica tediosos y rutinarios.

La capacitación que se requiere para utilizar estas ventanas es mínima debido a que las mismas fueron diseñadas de manera que presenten una interfaz muy sencilla de interpretar y manipular. Esto permite que los alumnos se concentren en los conceptos que el docente quiere destacar, sin necesidad de que los mismos manejen la sintaxis del programa utilizado para elaborarlas.

La elección del software se basa fundamentalmente en el hecho de que los alumnos pueden acceder fácilmente al mismo, dado que se encuentra disponible en forma gratuita en Internet. En el sitio www.scilab.org se puede obtener el programa así como también documentación de introducción al uso del mismo.

En la Figura 1 se muestra la ventana personalizada que permite determinar el polinomio que se obtiene al truncar la serie de Taylor.

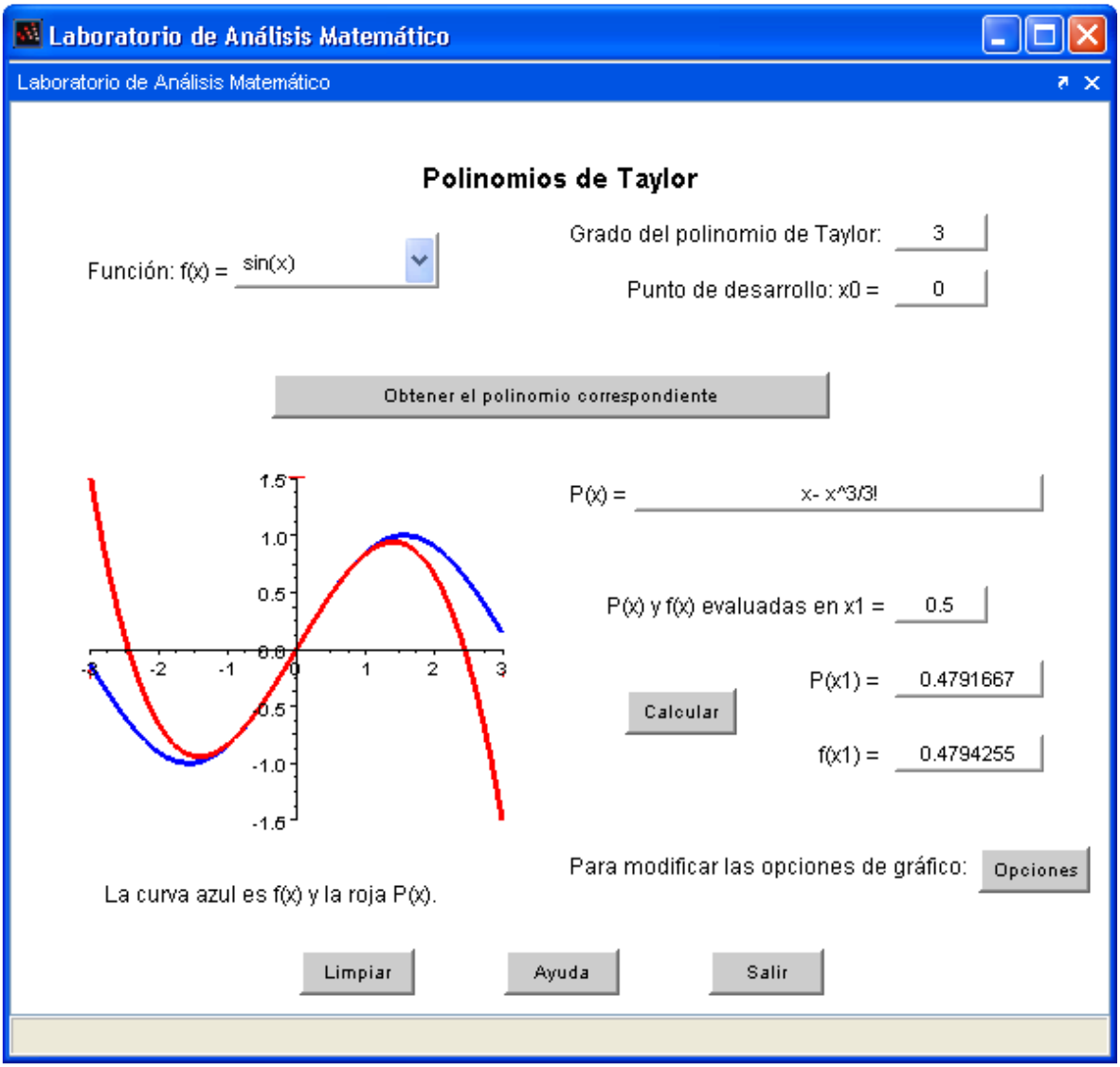


Figura 1. Ventana personalizada correspondiente al polinomio de Taylor

Para el empleo de esta ventana, el alumno deberá indicar la función que desea aproximar localmente. Para ello, tendrá que desplegar la lista de opciones y seleccionar una de las funciones disponibles. Además, deberá indicar el punto de desarrollo y el grado del polinomio que quiere calcular. En el caso de que el alumno indique un grado mayor que diez aparecerá un cuadro de diálogo, como se muestra en la Figura 2, donde se le indica que debe modificar el grado elegido.

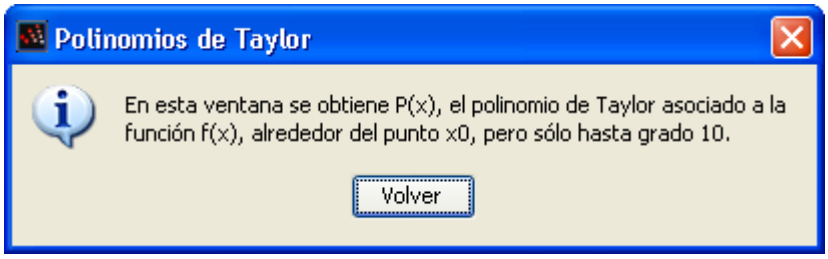


Figura 2. Cuadro de diálogo

Cabe aclarar que estas limitaciones en cuanto a la elección de la función o al grado del polinomio se debe al hecho de que SCILAB, al trabajar numéricamente, no calcula en forma simbólica las derivadas de las diversas funciones trascendentes. Por esta razón, fue necesario cargar las distintas derivadas de las funciones disponibles en la programación de la ventana personalizada.

Para que el estudiante analice el polinomio obtenido y compare las gráficas de la función asociada a dicho polinomio y de la función seleccionada, es necesario pulsar el botón **Obtener el polinomio correspondiente**.

En el caso de que se quiera modificar el intervalo de graficación, es posible hacerlo presionando el botón **Opciones**. De esta manera aparecerá, en primer lugar, la ventana que se muestra en la Figura 3.a donde se deberá indicar el extremo inferior de dicho intervalo. Al aceptar la información ingresada, emergerá una segunda ventana, Figura 3.b, donde se deberá ingresar el extremo superior.

(a) (b)

Figura 3. Cambio del intervalo de graficación

Con la finalidad de que los alumnos comprueben no sólo visualmente sino también numéricamente el grado de precisión del polinomio obtenido, podrán evaluar la función *f(x)* seleccionada y el polinomio *P(x)* calculado en un punto determinado. Para ello, deberán ingresar el punto en el que se desea evaluar *f(x)* y *P(x)* y pulsar el botón **Calcular**.

La Figura 4 muestra la ventana personalizada que se ha elaborado para calcular los primeros términos de la serie de Fourier.

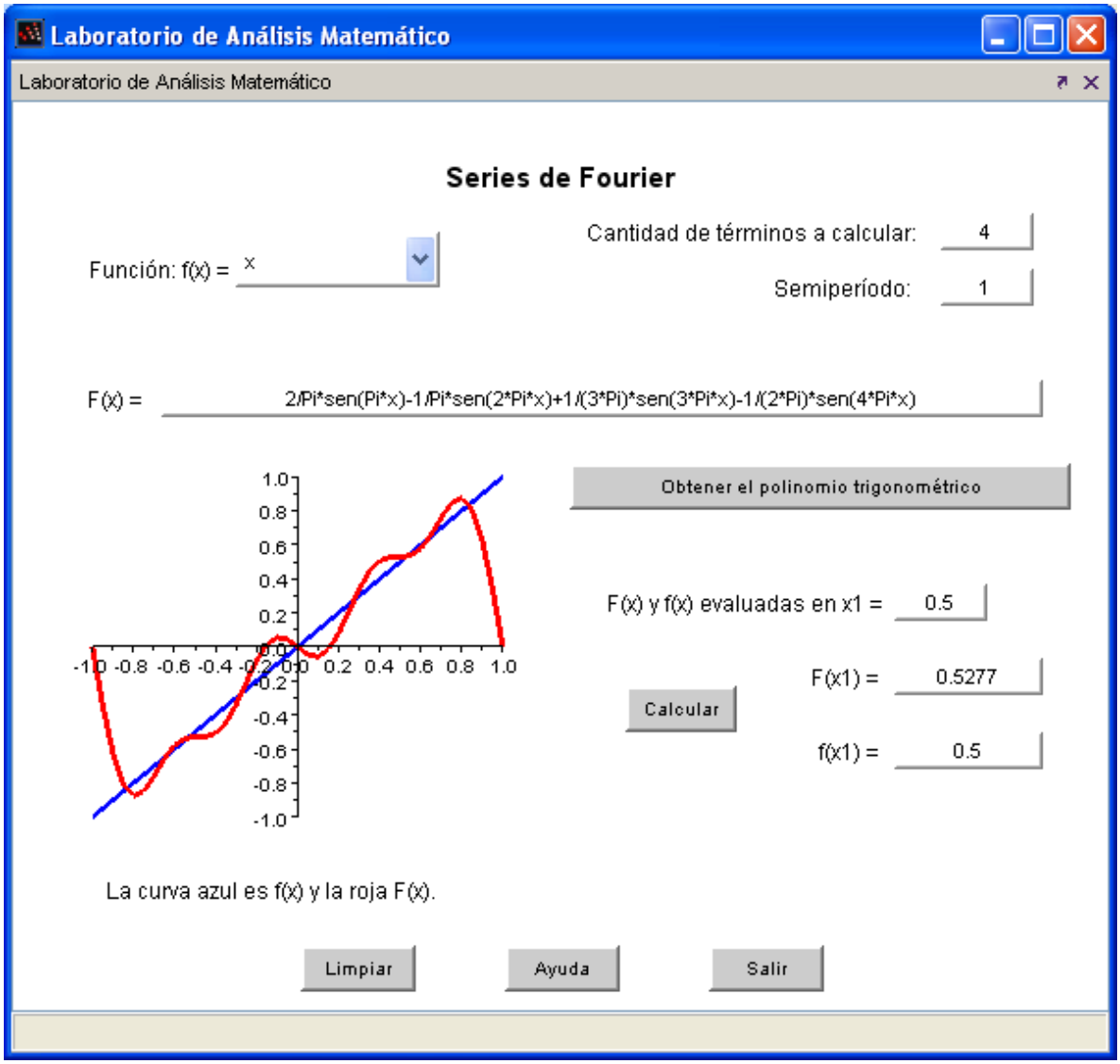


Figura 4. Ventana personalizada correspondiente a la serie de Fourier

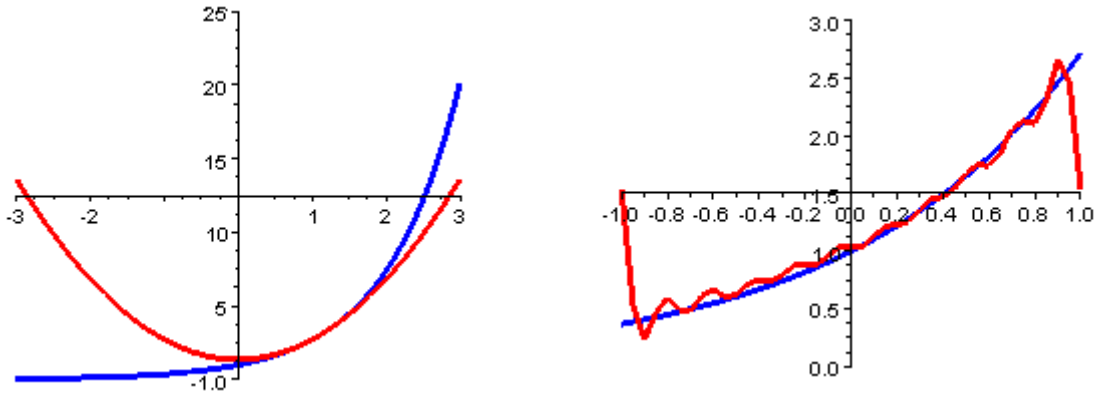
Como se puede observar, la misma presenta una interfaz muy similar a la de la ventana ya descripta. En la ventana de series de Fourier, el alumno deberá elegir la función a desarrollar en serie, ingresar la cantidad de términos que desea calcular e indicar la mitad del período del desarrollo deseado. En este caso, no se podrá modificar el intervalo de graficación.

La aplicación en el aula

El uso de las ventanas personalizadas diseñadas para la enseñanza de las series de Taylor y Fourier hace posible que se modifique la forma de enseñar ya que permiten que el alumno adquiera un rol más protagónico en su proceso de aprendizaje.

A continuación se presentarán algunos de los ejemplos que se han seleccionado adecuadamente y que permiten comprender con facilidad aquellos conceptos que en general causan problemas en el aprendizaje del tema.

Ejemplo 1: Obtener el polinomio de Taylor de grado dos que aproxima a la función $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 1$ y los diez primeros términos de la serie de Fourier en el intervalo $(-1;1)$.



(a) Gráfica de la función seleccionada y del polinomio de Taylor de grado dos

(b) Gráfica de la función seleccionada y de los diez primeros términos de la serie de Fourier

Figura 5. Salidas gráficas del Ejemplo 1

En la Figura 5, como en todos los gráficos que se muestran en las ventanas, la curva azul corresponde a la gráfica de la función *f(x)*, y la roja a su aproximación. A partir de la visualización y comparación de las gráficas obtenidas, los alumnos podrán comprender la diferencia entre los conceptos de aproximación local de la serie de Taylor y global de la serie de Fourier.

Ejemplo 2: Calcular una aproximación del cos(0,8) utilizando polinomios de Taylor de grado dos, cinco y ocho alrededor de x = 0.

	$f(x) = \cos(x)$	$P_2(x)$	$P_5(x)$	$P_8(x)$
$x = 0{,}8$	0,6967067	0,68	0,6970667	0,6967067

Tabla 1. Aproximaciones del cos(0,8)

Al obtener cada una de las aproximaciones del cos(0,8), utilizando los distintos polinomios de Taylor, los alumnos observarán que a medida que el grado aumenta, la aproximación calculada es cada vez más precisa. Es decir, podrán analizar la influencia del grado del polinomio en la precisión de la aproximación que se quiere calcular.

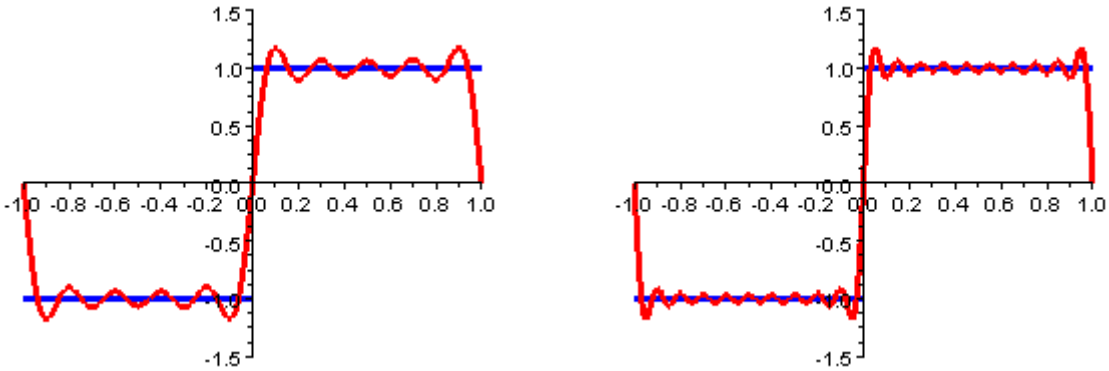
Ejemplo 3: Determinar el polinomio de Taylor de grado cuatro de la función *f(x) = ln(x)* alrededor de $x = 2$ y evaluarlo en $x = 2{,}5$ y $x = 4$.

Tras analizar los resultados obtenidos en la ventana, los alumnos concluirán que es pertinente utilizar el polinomio de Taylor para determinar aproximaciones de *f(x)* en valores cercanos al punto de desarrollo. Por lo tanto, por medio de este ejemplo, podrán comprender el significado y la importancia del punto elegido para lograr el polinomio de Taylor adecuado.

	$f(x) = \ln(x)$	$P_4(x)$
$x = 2{,}5$	0,9162907	0,9161290
$x = 4$	1,3862944	1,2764805

Tabla 2. Evaluación del $\ln(x)$ en distintos puntos

Ejemplo 4: Comparar la gráfica de los diez primeros términos del desarrollo de la serie de Fourier de la función signo en el intervalo (-1; 1) con la que se obtiene al tomar veinte términos.



(a) Gráfica de la función signo y de los diez primeros términos del desarrollo de la serie de Fourier

(b) Gráfica de la función signo y de los veinte primeros términos del desarrollo de la serie de Fourier

Figura 6. Salidas gráficas del Ejemplo 4

A partir de la visualización y comparación de las gráficas, los alumnos podrán comprender e intuir la tesis del teorema de convergencia de la serie de Fourier, es decir, se podrán dar cuenta que la serie de Fourier de la función elegida en el intervalo seleccionado converge a la función *f(x)* en los puntos de continuidad mientras que en los puntos de discontinuidad lo hace al promedio

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

donde *f(x+)* y *f(x-)* denotan el límite de la función *f(x)* por derecha y por izquierda, respectivamente. Además, observarán que, a pesar de aumentar la cantidad de términos, los picos en la serie de Fourier de la función signo no desaparecen. Esta situación es propicia para discutir el fenómeno de Gibbs, que se refiere al comportamiento de la serie de Fourier cerca de un punto en el que la función es discontinua.

Conclusiones

Los recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática por sí mismos no garantizan el mejoramiento del aprendizaje. Es el docente, mediante el diseño de situaciones didácticas apropiadas que involucren el empleo de este tipo de herramientas, quien contribuye a promover en los alumnos la comprensión conceptual, el desarrollo de capacidades y habilidades y la construcción de conocimiento, entre otras cosas.

Por esta razón, las autoras de este trabajo consideran que todo el esfuerzo que requiere el diseño y elaboración de recursos como las ventanas personalizadas mostradas vale la pena, ya que una de las principales tareas de cualquier docente interesado en el aprendizaje de sus alumnos es la de generar situaciones que mejor se adapten a las necesidades y dificultades de los estudiantes.

Referencias

[1] Gómez, P. (1997). *Tecnología y Educación matemática*. Informática Educativa, Vol. 10, Nº 1, 93 – 111.

[2] Chavarría, J. (2006). *Teoría de las situaciones didácticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Vol. 1, Nº 2.

[3] Zill, D. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Colombia: Thomson Learning.

[4] Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes tempranas*. México: Thomson Learning.

[5] Larson, R., Hostetler, R. & Edwards, B. (1995) *Cálculo y Geometría Analítica*. Volumen 1. España: Mc Graw – Hill.

[6] Bayón, R., Grau, J., Mateos, J., Ruiz, M. & Suárez, P. (2010). *Aprendizaje interactivo en Matemáticas utilizando el Wolfram Demonstrations Project.* XVIII Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Telecomunicación. Universidad de Cantabria. Santander.

[7] Azofeifa, C. (2003). *Uso de Excel en la enseñanza de las series*. Memorias Tercer Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora. Costa Rica.

[8] Almazán Colorado, C. & Sosa Moguel, L. (2010). *Resignificación de la serie de Taylor a través de tecnología*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 23, 1341 – 1349. México.

[9] Rodriguez, E. & Ansola Hazday, E. (2010). *El currículo de Matemática con tecnología en carreras de Ingeniería*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 23, 1293 – 1301. México.

[10] Duval, R. (1999). *Representation, vision y visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning*. En Hitt, F & Santos, M. (Eds). Proceeding of the Twenty – fist Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 1, 23 – 26. México.

[11] Arcavi, A. (1999). *The role of visual representations in the learning of Mathematics*. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. México.