EL CONTENIDO Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIADOS POR RECURSOS TECNOLÓGICOS

Adriana Frausin, Malva Alberto
Facultad Regional Santa Fe-Universidad Tecnológica Nacional
afrausin@fiq.unl.edu.ar, mtoso@frsf.utn.edu.ar
Experiencias de cátedra

Palabras claves: ecuación del calor**,** diferencias finitas, estabilidad, recursos y regularidad

Resumen:

En este trabajo se informa acerca de una propuesta didáctica para la resolución de un problema típico de ingeniería que involucra una aplicación para ecuaciones en derivadas parciales. La experiencia requiere de la disponibilidad de una planilla de cálculo o el uso de un lenguaje de programación, a fin de comparar soluciones exactas con soluciones aproximadas en diferentes situaciones problemáticas. Éstas, adecuadamente preparadas, propician y tienden a la comprensión de conceptos tales como estabilidad y convergencia, permiten deducir condiciones suficientes para la estabilidad del método y derivar características de una fórmula para estimar los errores locales de discretización.

Introducción:

Queremos compartir una propuesta didáctica, que a priori, fue pensada y puesta en escena para aumentar las oportunidades de construcción del conocimiento y favorecer el anclaje de habilidades cognitivas superadoras. La estrategia, si bien no constituye una ocurrencia especial pensada para ser estandarizada en las clases de matemática, encierra una riqueza local que merece esta socialización. Es decir, la metodología educativa que fue usada y que describimos más adelante, se muestra con su naturaleza probabilística. Esto significa que no garantiza los resultados educativos y formativos deseados, sino que aumenta la probabilidad de que tales resultados tengan lugar.

La mediación entre el contenido y las respuestas esperadas del grupo de estudiantes fue dada por el uso de recursos y aplicaciones tecnológicas, que se emplean frecuentemente en el dictado de las clases prácticas o teóricas. Es decir, estos recursos no produjeron brechas (por ausencia, desconocimiento, mal funcionamiento, imposibilidad de acceso, etc) durante el desarrollo de la actividad.

La experiencia se realizó en el contexto de las condiciones de regularidad exigidas por la cátedra. Todos los alumnos estuvieron involucrados y observados. Con el propósito de recuperar y constatar a posteriori, los aspectos pedagógicos deseados con la implementación de la propuesta, se realizó el proceso de evaluación y la devolución de resultados. Se especificaron los errores detectados dando las indicaciones necesarias para que los trabajos pudieran retroalimentarse, corregirse y completarse adecuadamente. Las metas evaluativas fueron potenciar la participación grupal, la interacción entre pares y la observación de las condiciones en que se dan los distintos roles dentro del grupo; favorecer el logro de un grado de satisfacción aceptable y motivador para continuar resolviendo actividades experimentales; integrar adecuadamente los desempeños de los estudiantes para mejorar la comprensión del contenido y el uso de los recursos, métodos, estrategias y propiedades desarrollados y presentados sobre el tema y contribuir a la formación integral del ingeniero a través de actividades de resolución de problemas.

Fundamentación:

Los avances tecnológicos han generado nuevos paradigmas que impactan en las formas de aprender, de producir, de comunicar, de relacionarse, de promover. Esto abarca tanto los ámbitos de la empresa como gubernamentales, y sobre todo de la educación. La Educación Superior tiene frente a estos cambios un doble desafío: por un lado incorporar las nuevas tecnologías a sus actividades para pensar en su desarrollo e inserción en la sociedad, y por otro, generar estrategias educativas para que los profesionales que se formen en ellas desarrollen las capacidades necesarias para un mejor aprovechamiento de las mismas. En cualquier caso es indispensable el desarrollo de situaciones de aprendizaje que presenten escenarios favorables para generar secuencias didácticas con aportes significativos, para la cátedra, los docentes y los estudiantes.

La escogencia del tema y la cátedra no es arbitraria; desde el comienzo mismo de los procesos de acreditación de ingeniería (RES MIN 1232/01) se hace mención a que el objetivo de los estudios en matemáticas es contribuir a la formación lógico-deductiva del estudiante, proporcionar una herramienta heurística y un lenguaje que permita modelar los fenómenos de la naturaleza, señalándose además como contenidos mínimos temas con los cuales nos involucramos tales como Álgebra Lineal, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial e Integral en una y dos variables, Ecuaciones Diferenciales, Probabilidad y Estadística, además de temas de Análisis Numérico y Cálculo Avanzado. La capacidad de resolver problemas aparece como uno de los objetivos más importantes a lograr, especialmente cuando se tratan

cuestiones cuyo eje es la modelización de situaciones problemáticas de interés profesional. Coincidimos con la misma norma cuando hace referencia a la intensidad de la formación práctica diciendo que marca un distintivo de calidad de un programa, de una currícula o de una cátedra y que una mayor dedicación a actividades de formación práctica, sin descuidar la profundidad y rigurosidad de la fundamentación teórica, se valora positivamente y debe ser adecuadamente estimulada.

Tradicionalmente, la resolución de problemas ha sido reconocida como una actividad necesaria en el proceso de aprendizaje universitario ya que implica una permanente interacción de los conceptos, fundamentos y relaciones con las estrategias de resolución. Además, se ha constituido en una de las instancias básicas sobre la que se asienta la evaluación. La resolución de problemas amplía enormemente sus horizontes cuando cuenta con los recursos tecnológicos apropiados que permiten realizar cálculos tediosos en menor tiempo, aproximaciones por exceso y defecto, validaciones, metodología de diseño, y análisis de factibilidad, análisis de alternativas con variación de parámetros, pruebas de ensayo y error, etc. Por ello, los recursos tecnológicos disponibles, tales como calculadora gráfica, computadora y software específico, constituyen una condición imprescindible para la mejora de la calidad de la enseñanza universitaria y deben ser incorporados y explotados dentro y fuera del aula.

Las tecnologías de la información y la comunicación forman parte de la educación desde distintos enfoques: como recurso didáctico, como objeto de estudio (formando parte del currículum), como medio de comunicación y, como medio de administración y/o de gestión e investigación. Nuestro uso fue como un recurso didáctico y de gestión, donde ponen en relieve sus características de interconexión, interactividad entre los sujetos y con la información, instantaneidad, calidad y flexibilidad de los resultados y de imágenes, digitalización, influencia sobre los procesos y las personas (alumnos, comprensión, investigación); rapidez en el desarrollo de cálculos y posibilidad de introducir innovaciones; desarrollo de nuevos lenguajes (informático y multimedia); distribución de la información en forma no lineal y al resto de docentes y pares; diferenciación y segmentación de los usuarios según sus pretensiones o especialidades; preferencia hacia la automatización y sistematización en el funcionamiento y el uso de las tecnologías; pluralidad de tecnologías y, capacidad de almacenamiento para depositar información (Cabero Almenara, J. 2000: 19-23).

Con la utilización de las computadoras o de recursos y aplicaciones tecnológicas en general, pretendemos que las clases de resolución de problemas se muestren como verdaderos laboratorios experimentales que permiten al alumno explorar alternativas y aplicar diferentes estrategias de resolución de problemas.

El presente trabajo se sitúa dentro del proceso de la formación práctica para ingeniería, con componentes en la formación experimental y en la resolución de problemas y bajo una orientación que considera que el aprendizaje es básicamente un proceso de construcción de conocimientos, en el que las representaciones de los alumnos juegan un papel importante, y se ponen de manifiesto cuando se razona, se explica y se desarrollan actividades que comprometen respuestas para resolver una situación problemática (Pogré, 2002; Stone, 2006)

Desarrollo:

A continuación se describe una propuesta didáctica implementada en la cátedra de Cálculo Avanzado en el tercer nivel de las carreras de Ingeniería Civil, Eléctrica, Industrial y Mecánica que se dictan en la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional.

En la cátedra se incorpora como requisito para la obtención de la regularidad la resolución de un problema que involucra el contenido de ecuaciones en derivadas parciales. Se destinaron catorce horas para el desarrollo del eje temático Ecuaciones diferenciales parciales: soluciones “exactas” por separación de variables y aproximadas por diferencias finitas para problemas de calor, ondas y Laplace en dominios acotados [1]. Este problema está inserto como un trabajo práctico grupal, de hasta cuatro integrantes, donde se propuso el estudio de un problema integrador sobre propagación del calor en un cilindro “unidimensional” con condiciones de borde de temperatura prescripta y temperatura inicial dada, que permite visualizar no sólo la incidencia de la relación entre los pasos temporal y espacial respecto de la estabilidad del método explícito de diferencias finitas, sino también observar cómo influye en los errores locales una discontinuidad en el gradiente inicial de temperatura.

Se presenta el enunciado y parte del desarrollo del trabajo grupal resuelto con los alumnos del tercer nivel de las ingenierías mencionadas (las tablas y gráficos presentados corresponden a la presentación hecha por uno de los grupos)

TRABAJO PRÁCTICO PARA OBTENCIÓN DE REGULARIDAD

(A) Usar el Método de separación de variables para hallar una expresión de la solución "exacta" del siguiente problema típico de conducción de calor en un cilindro "unidimensional" unitario:

EDP: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad 0 \leq x \leq 1 \;,\; t \geq 0$

C.B: $u(0,t) = 0$ y $u(1,t) = 0$, $t \geq 0$

C.I: $u(x,0) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$

(B) Aplicar el esquema del método explícito de diferencias finitas desarrollado en clases con $\Delta x = 0.1$ para aproximar el valor u(x,T) en cada uno de los casos siguientes:

i) $\Delta t = 0.0048$ para T = 0.048 y 0.096.

ii) $\Delta t = 0.0052$ para T = 0.052 y 0.104.

(Usar una planilla de cálculo o un lenguaje de programación)

(C) Comparar gráficamente, en cada caso, la solución aproximada con la solución "exacta" y comentar los resultados.

Todos los grupos trabajaron con un planilla de cálculo, creando una tabla de doble entrada según la malla correspondiente a ($\Delta x, \Delta t$) dados en cada caso, donde ingresaron las temperaturas en los bordes, temperaturas iniciales y a partir del esquema del átomo computacional correspondiente a este problema completaron las temperaturas en todos los nodos interiores de la malla.

Respecto de la solución "exacta" obtenida por separación de variables, se obtiene una serie alternada convergente que truncada en el segundo término da una precisión de 7 dígitos debido al rápido decaimiento exponencial de sus términos (el error de truncamiento es menor en valor absoluto que el primer término omitido)

La expresión para la solución del problema continuo es $u(x,t) = 8\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{(n\pi)^2} e^{-(n\pi)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x)$,

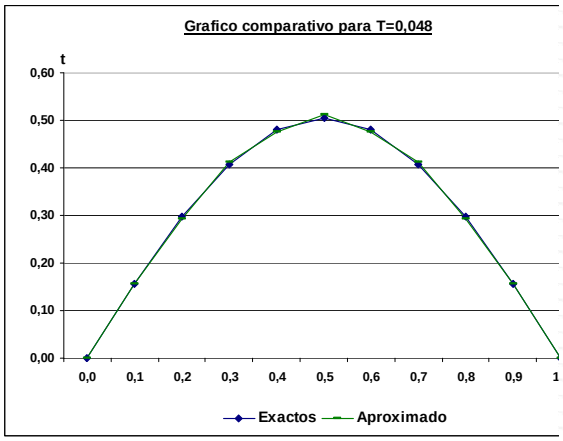
según el margen de precisión escogido por cada grupo, algunos consideraron sólo el primer término y otros los dos primeros términos no nulos de dicha serie.

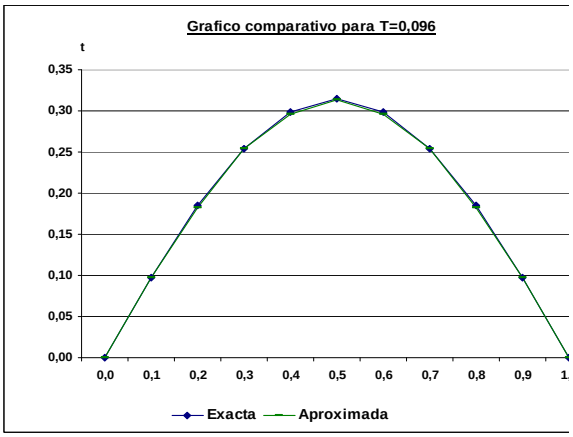
T=0.048

x	Valores exactos u(x;T)	Valores aproximados u(x;T)
0	0,00000000	0,00000000
0.1	0,15596088	0,15716558
0.2	0,29665522	0,29321734
0.3	0,40831088	0,41267583
0.4	0,47999822	0,47569114
0.5	0,50470000	0,51102050
0.6	0,47999822	0,47569114
0.7	0,40831088	0,41267583
0.8	0,29665522	0,29321734
0.9	0,15596088	0,15716558
1	0,00000000	0,00000000

T=0.096

x	Valores exactos u(x;T)	Valores aproximados u(x;T)
0	0,00000000	0,00000000
0.1	0,09711477	0,09687300
0.2	0,18472327	0,18267203
0.3	0,25424977	0,25362431
0.4	0,29888853	0,29557812
0.5	0,31427000	0,31350263
0.6	0,29888853	0,29557812
0.7	0,25424977	0,25362431
0.8	0,18472327	0,18267203
0.9	0,09711477	0,09687300
1	0,00000000	0,00000000



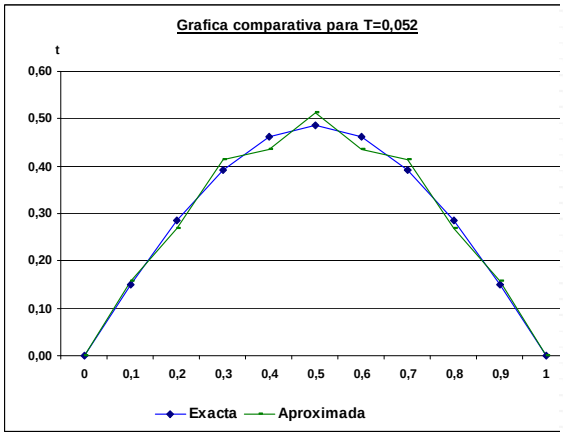


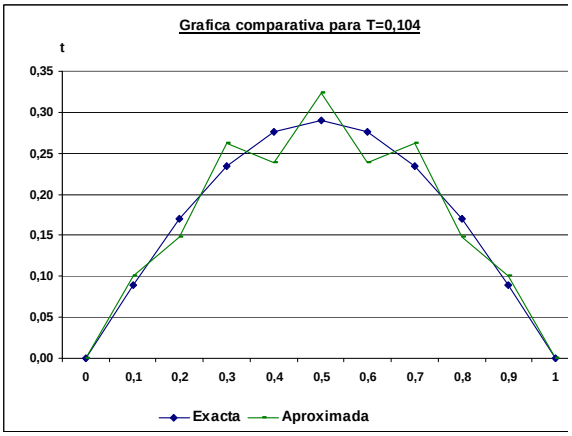
T=0.052

x	Valores exactos	Valores aproximados
	u(x;T)	u(x;T)
0	0,00000000	0,00000000
0.1	0,14993505	0,15765205
0.2	0,28519340	0,26883700
0.3	0,39253505	0,41401443
0.4	0,46145262	0,43501589
0.5	0,48520000	0,51272477
0.6	0,46145262	0,43501589
0.7	0,39253505	0,41401443
0.8	0,28519340	0,26883700
0.9	0,14993505	0,15765205
1	0,00000000	0,00000000

T=0.104

x	Valores exactos	Valores aproximados
	u(x;T)	u(x;T)
0	0,00000000	0,00000000
0.1	0,08973854	0,10007219
0.2	0,17069284	0,14758720
0.3	0,23493854	0,26200339
0.4	0,27618681	0,23879384
0.5	0,29040000	0,32386241
0.6	0,27618681	0,23879384
0.7	0,23493854	0,26200339
0.8	0,17069284	0,14758720
0.9	0,08973854	0,10007219
1	0,00000000	0,00000000





Si bien algunos grupos necesitaron ser guiados por el docente para focalizar las observaciones en los puntos de interés, la mayoría fue capaz de concluir a partir de las comparaciones gráficas en cada caso que:

- para Δx fijo el método es sensible frente a pequeñas variaciones en el paso temporal, volviéndose **inestable, en este caso**, cuando $\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} > \dfrac{1}{2}$
- los errores aumentan con el tiempo

- cuando el método es inestable, los errores son mayores cerca del punto medio de la barra debido a la discontinuidad que presenta en este punto el gradiente inicial de temperatura que no cumple con la suavidad requerida en las hipótesis del teorema de convergencia (deducido en clases) para el método explícito de diferencias finitas (ver[2] y [3])

Resultados

Si bien la consigna para el desarrollo de la solución de la situación problemática indicaba la disponibilidad de una planilla de cálculo o el uso de un lenguaje de programación, ningún grupo se decidió a utilizar el software Mathematica, con el que trabajaron en los niveles previos, específicamente resolviendo problemas de aplicación correspondientes a temas de Álgebra y Geometría Analítica y Análisis Matemático I y II. De todas maneras se atribuye el hecho a que en las prácticas de laboratorio de los niveles previos no se incluyó suficiente manejo de los comandos básicos para programar.

Sobre un total de 70 alumnos, el 78% aprobó el Trabajo Práctico. Se conformaron 32 grupos de trabajo y se obtuvieron los siguientes resultados:

Cantidad de trabajos aprobados en primera instancia: 24 con un total de 43 integrantes. Cabe destacar que sólo 6 de estos trabajos presentaron errores conceptuales.

Cantidad de trabajos que debieron rehacerse y fueron luego aprobados: 6 con un total de 12 integrantes

Cantidad de trabajos no aprobados y que no volvieron a se presentados : 2 correspondientes a 5 alumnos.

Conclusiones:

Si bien el estudio riguroso sobre estabilidad escapa a los contenidos del curso, consideramos que con la resolución de un problema integrador de este tipo se logra formar visualmente el concepto de estabilidad del método, esto es notar que el error disminuye conforme avanza el cálculo, y su diferencia con el concepto de la convergencia del mismo, lo cual significa que la solución aproximada tiende a la exacta cuando $(\Delta x, \Delta t) \to (0,0)$.

Además, respecto de la condición de estabilidad, la instancia de devolución de resultados sirvió para volver a enfatizar que esta condición es suficiente pero NO es necesaria para que el método numérico “ande bien”, lo cual ya se había observado en otros ejemplos propuestos en clases.

El uso de los recursos tecnológicos con carácter experimental, racional y razonado contribuye a construir conceptos, validar y argumentar resultados.

Referencias bibliográficas:

[1] R. Haberman “Applied Partial Differential Equations: with Fourier series and Boundary Value Problems” Editorial Prentice-Hall (cuarta edición 2004)

[2] D.Bleecker-G. Csordas “Basic Parcial Differential Equations” Editorial International (1996)

[3] J.Crank “ The mathematics of difusión” Editoral Oxford Clarendon Press (1975)

[4]Cabero Almenara, J (Coord.), Salinas, J., Duarte, A.M. y Domingo, J.: Nuevas Tecnologías aplicadas a la educación. Madrid: Síntesis Educación. 2000

[5]POGRÉ, P.: Enseñanza para la comprensión. Un marco para innovar en la intervención didáctica. En: Aguerrondo, I. ; Lugo, M.T.; Tadei, P.; Rossi, M.; Cifra, S.; Pogré, P.: La escuela del futuro II. Buenos Aires: Papers Editores, 2002.

[6]STONE WISKE, M.; RENNEBOHM FRANK, K.; BREIT, L.: Enseñar para la Comprensión con nuevas tecnologías. Primera edición. Buenos Aires: Paidós, 2006.

Documentos: Resolución Ministerial 1232/01. [Consulta en línea: 20 de mayo de 2004]