APLICACIÓN DEL CÁLCULO DE VARIACIONES PARA JUSTIFICAR LA INTERPOLACIÓN SPLINE

Carlos Adolfo Calvo, Veremundo Fernandez
Facultad de Ingeniería,Universidad Nacional de San Juan, Argentina
ccalvo@unsj.edu.ar ; vfernan@unsj.edu.ar

Palabras clave. Interpolación, Mínima energía, Ecuación diferencial ordinaria.

Resumen. Se pretende determinar la forma que adopta una cinta rectilínea metálica flexible y uniforme, empotrada en sus extremos, obligada a pasar por n puntos determinados. Se consideran pequeñas deformaciones e influencia del peso despreciable. Se sigue el principio de mínima energía potencial acumulada lo que conduce, usando las formulas de Euler del Cálculo de Variaciones, a una ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden, de cuya integración resultan polinomios de tercer grado (spline). Estos polinomios usados por tramos y con continuidad de derivadas primeras y segunda constituyen las curvas Spline.

INTRODUCCIÓN

Una cinta rectilínea metálica flexible, horizontal, de sección uniforme, es obligada a pasar por **n** puntos determinados $(x_i, y_i)\ i=1:n$. Para lograrlo es necesario aplicarle un momento flector M. Ésta se deforma suavemente. Se pretende determinar la ecuación de la curva deformada.

La curvatura K es una medida de la deformación por flexión. Se establece una relación lineal de causa M efecto K, siendo EJ el modulo de resistencia a la flexión. La energía acumulada en la cinta se expresa por el trabajo de deformación W. La curva que hace mínimo a W es la buscada.

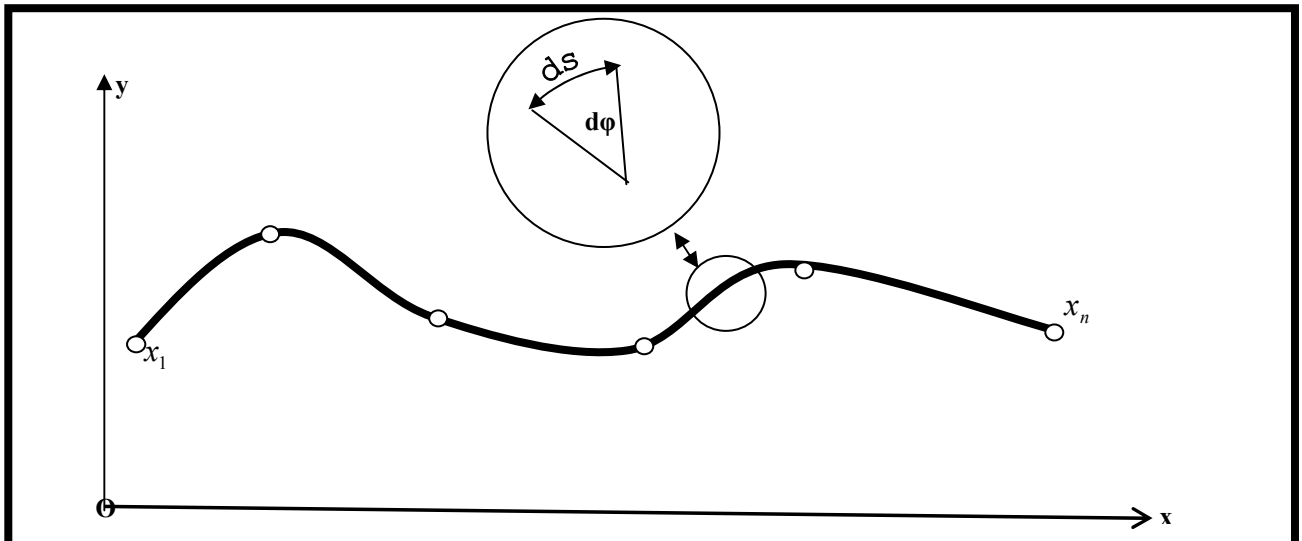

Figura 1: Cinta metálica pasando por n puntos

FUNDAMENTACIÓN

$$M = E\,J \qquad K = \frac{d\varphi}{d\,s} \qquad d\,W = M\,d\varphi = E\,J\,K^2\,ds \qquad W = E\,J\int_C K^2\,ds$$

Las distintas curvas C determinan distintas energías acumuladas W, o sea se establece una relación funcional $W = W(C)$. Dada la flexibilidad de la cinta, ésta tiende a su forma rectilínea original, entregando su emergía potencial acumulada. Las restricciones impuestas obligan a la cinta a adoptar una forma no rectilínea que corresponde a mínima energía de deformación. El siguiente principio variacional queda establecido: ‘‘La forma de la curva es la que corresponde a mínima energía potencial acumulada’’

DESARROLLO

Reemplazando en W, las expresiones de la curvatura y el elemento de arco:

$$K = \frac{d\theta}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \qquad \frac{ds}{dx} = (1+y'^2)^{1/2} \qquad W = E\,J\int_C \frac{(y'')^2}{(1+y'^2)^{5/2}}\,dx$$

Para curvas suaves, y pequeñas deformaciones $y' \cong 0$

$$W = E\,J \int_C (y'')^2\, dx = E\,J \int_C F(x, y, y', y'')\, dx$$

Para encontrar el mínimo de W, se usa la formula de Euler (ver Elsgoltz, 1978) del Cálculo de Variaciones).

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0$$

Que para este caso:

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y'')^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y'''' = 0$$

APLICACIÓN

La solución de $y'''' = 0$ es:

$$y(x) = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

I Las polinomios de tercer grado no pueden en general pasar por n puntos por lo que se usa interpolación segmentaría (ver Chapra, S.y Canale, R., 1999), es decir un polinomio por cada uno de los (n-1) tramos. Esta se llama Interpolación Spline, nombre en ingles de la plantilla gráfica, vulgarmente conocida por pistolete.

$$P_i(x) = a^{(i)} x^3 + b^{(i)} x^2 + c^{(i)} x + d^{(i)} \qquad x_i \le x \le x_{i+1} \qquad i = 1{:}n-1$$

Se tiene $\boxed{4(n-1)}$ incógnitas.

II Se imponen las siguientes condiciones:

a) Cada polinomio pasa por sus dos puntos extremos:

$$P_i(x_i) = y_i \quad P_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \qquad i = 1{:}n-1$$

Resultan $\boxed{2(n-1)}$ condiciones

b) Continuidad de la derivada primera y de la derivada segunda, en los (n-2) puntos interiores

$$P'_{i-1}(x_i) = P'_i(x_i) \qquad P''_{i-1}(x_i) = P''_i(x_i) \qquad i = 2{:}n-1$$

Resultan $\boxed{2(n-2)}$ condiciones

c) Derivadas segundas nulas en los extremos

$$P''_1(x_1) = 0 \quad P''_{i-1}(x_n) = 0$$

Resultan $\boxed{2}$ condiciones

III Resulta un sistema lineal de $4(n-1)$ ecuaciones con $4(n-1)$ incógnitas:

$$a^{(i)}, b^{(i)}, c^{(i)}, d^{(i)} \quad i = 1{:}n-1$$

$$\begin{cases} a^{(i)} x_i^3 + b^{(i)} x_i^2 + c^{(i)} x_i + d^{(i)} = y_i & i = 1:n-1 \\ a^{(i)} x_{i+1}^3 + b^{(i)} x_{i+1}^2 + c^{(i)} x_{i+1} + d^{(i)} = y_{i+1} & i = 1:n-1 \\ 3a^{(i-1)} x_i^2 + 2b^{(i-1)} x_i + c^{(i-1)} - 3a^{(i)} x_i^2 - 2b^{(i)} x_i - c^{(i)} = 0 & i = 2:n-1 \\ 6a^{(i-1)} x_i + 2b^{(i-1)} - 6a^{(i)} x_i - 2b^{(i)} = 0 & i = 2:n-1 \\ 6a^{(1)} x_1 + 2b^{(1)} = 0 & \\ 6a^{(n-1)} x_n + 2b^{(n-1)} = 0 & \end{cases}$$

CONCLUSIONES

Se ha justificado el uso de polinomios de tercer grado para interpolar por un método de mínima deformación.

REFERENCIAS

Chapra, S., Canale, R., Métodos Numéricos para Ingenieros, Mc Graw Hill, 1999.
Elsgoltz, L., Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, Ed. MIR, 1978