Descomposición de un campo vectorial diferenciable en un espacio interdisciplinar de ciencias básicas

Delicia Carmen TISERA, José Luis VICENTE
Facultad de Ingeniería, UNLP, Facultad Regional La Plata, UTN
dtisera@netverk.com.ar, vicente@inifta.unlp.edu.ar
Area Temática: Experiencias de cátedra
Palabras Claves: Integración horizontal y vertical, Rotor, Divergencia

Resumen

Se discute una propuesta didáctica, que busca integrar conocimientos e incorporar habilidades adquiridos en cursos de física y matemática. Se propone que los conceptos de divergencia y rotor de un campo vectorial sean abordados desde una nueva perspectiva analizando la parte lineal de la variación local del campo. Consideramos que este enfoque, mas allá de lo novedoso, toma en cuenta la esencia misma de tales operaciones que forman parte del cálculo diferencial mas que del integral que involucran flujos y divergencia. En la primer parte se destacan los conceptos y definiciones de cursos previos de álgebra, geometría, física y análisis, y en la segunda, se discuten los cambios de un campo vectorial en términos de los esquemas ya elaborados.

Introducción

En las asignaturas de Análisis Matemático II los conceptos de rotor y divergencia de un campo vectorial son presentados, en general, de dos formas. Una es dada en forma operativa, es decir introduciendo operadores diferenciales y de allí definir la forma de calcularlos, sin ningún otro tipo de significación mas allá que las operaciones involucran cierto tipo de cálculo diferencial a través de las derivadas parciales de las componentes del campo. La otra forma es a través de una reinterpretación [Santaló, 1970], luego de haber estudiado el cálculo integral de los campos, con la divergencia como la razón entre flujo a través de una superficie cerrada y el volumen que dicha superficie encierra en el límite en que dicho volumen se hace cada vez mas pequeño, y la componente del rotor en un determinado eje como o la razón entre la circulación alrededor de un disco perpendicular a dicho eje y el área de dicho disco en el límite cuando el disco se hace cada vez mas pequeño. Esta segunda forma, si bien busca darle significación a la divergencia y el rotor, presenta dos aristas conflictivas, la primera es que necesita recurrir a integrales para proponer un concepto diferencial y la segunda es que en la mayoría de los programas de estas asignaturas los temas que involucran integración de funciones de varias variables, en particular flujo y circulación de un campo, se introducen mucho después de la derivación de los mismos. Para superar estos problemas presentamos en esta comunicación una tercer propuesta didáctica, que recurre a tomar conocimientos adquiridos en cursos de física y matemática [Tisera 2007a, 2008], que a la vez permiten mostrar la vinculación entre teoría y práctica [Punte, 2008]. En la primer parte destacamos por un lado conceptos y definiciones de cursos de álgebra, geometría, como las propiedades de los números complejos [Crowe, 1994], y la diagonalización de matrices simétricas; y por otra conceptos y definiciones de análisis y física [Tisera, 2007b] como la parte lineal del cambio en una función diferenciable y la rotación de vectores en el plano y en el espacio. En la segunda parte, discutimos los cambios de un campo vectorial en términos de estos esquemas elaborados previamente. Específicamente, la segunda etapa consiste en trabajar con los campos vectoriales en analogía con los campos escalares, descomponer la parte lineal del cambio en una translación mas una parte simétrica y otra antisimética. La idea de la propuesta es promover el trabajo grupal [Tisera, 2009], para que unos alumnos puedan vincular el problema con la diagonalización de una matriz, como los estudiados en Algebra y Geometría, o como la deformación uniforme de un sólido, y la relación entre una matriz antisimética y las rotaciones en el espacio como en Física. De esta forma, a la vez que se favorece el trabajo grupal y el intercambio de roles, se puede mostrar la identidad común a todos ellos en la forma de plantear y resolver un problema de Matemática.

Elementos: Conceptos de álgebra
Operaciones con matrices y vectores

Existen propiedades de las matrices cuadradas que, desde el punto de vista de sus aplicaciones, resultan muy interesantes.
Una generalización el espacio vectorial R^n, es el espacio vectorial C^n sobre cuyos elementos (vectores complejos) también se puede definir un producto escalar, es decir dados dos vectores $\mathbf{z} = (z^1, \ldots, z^n)$ y $\mathbf{w} = (w^1, \ldots, w^n)$, donde los z^i y los w^j son complejos, se define su producto escalar $< \mathbf{z}, \mathbf{w} >$como:

$$< \mathbf{z}, \mathbf{w} > = \sum_{i=1}^{n} z^i \overline{w}^i \qquad (1)$$

siendo $\overline{z}$ es el conjugado del número z. Dado que $< \mathbf{z}, \mathbf{z} >$ es un número real no negativo, sobre dicho espacio, como en R^n, también se tiene la norma de un vector $|z| = (< \mathbf{z}, \mathbf{z} >)^{1/2}$. Además si **S** es una matriz real simétrica de n×n, del cálculo:

$$< \mathbf{Sz}, \mathbf{w} > = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} S_{i,j}\, z^j\right)\overline{w}^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} S_{j,i}\, \overline{w}^i\, z^j = \sum_{j=1}^{n} z^j\left(\sum_{i=1}^{n} S_{j,i}\, \overline{w}^i\right) = < \mathbf{z}, \mathbf{Sw} >$$

resulta que los autovalores de tales matrices, es decir los números d para los cuales existen vectores no nulos **z** que cumplen $\mathbf{S}\,\mathbf{z} = d\,\mathbf{z}$, no pueden tomar cualquier valor. Los autovalores resultan de pedir que el sistema lineal de ecuaciones algebraicas $(\mathbf{S} - d\,\mathbf{I})\,\mathbf{z} = 0$, donde **I** es la matriz identidad de n×n, tenga solución aparte de la nula, y de acuerdo al Teorema de Roche – Frobenius, basta resolver la ecuación $\det(\mathbf{S} - d\,\mathbf{I}) = (d - d_1) \ldots (d - d_n) = 0$. Tales raíces d podrían ser números complejos, pero:

$$d < \mathbf{z}, \mathbf{z} > = < d\,\mathbf{z}, \mathbf{z} > = < \mathbf{Sz}, \mathbf{z} > = < \mathbf{z}, \mathbf{Sz} > = < \mathbf{z}, d\mathbf{z} > = \overline{d} < \mathbf{z}, \mathbf{z} >$$

es decir que: $(\overline{d} - d)\,|\mathbf{z}|^2 = 0$, y como $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, d tiene que ser real. Este resultado vale para matrices mas generales que las reales y simétricas **S**, que son las matrices complejas **H** que satisfagan la condición $\overline{H_{i,j}} = H_{j,i}$, denominadas matrices de Hermite.
Existe otra propiedad de las matrices de Hermite, y por lo tanto de las matrices simétricas, y es que si $\mathbf{H}\,\mathbf{z}_1 = d_1\,\mathbf{z}_1$, $\mathbf{H}\,\mathbf{z}_2 = d_2\,\mathbf{z}_2$ y $d_2 \neq d_1$ entonces:

$$d_1 < \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 > = < d_1\,\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 > = < \mathbf{Hz}_1, \mathbf{z}_2 > = < \mathbf{z}_1, \mathbf{Hz}_2 > = < \mathbf{z}, d_2\,\mathbf{z}_2 > = d_2 < \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 >$$

es decir que $< \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 > = 0$, o sea que los autovectores son ortogonales.
Otra propiedad interesante que tienen las matrices **A** de n×n tales que $\mathbf{A}^T\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^T$, donde $\mathbf{A}^T$ indica la transpuesta de **A**, denominadas normales, se conoce como Lema de Schurr y dice que si $d_1, \ldots, d_n$ son los autovalores de una matriz normal **A**, entonces existe una matriz **T**, de n×n, tal que $\mathbf{T}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{T} = \mathbf{U}$, donde **U** es una matriz triangular superior ($U_{i,j} = 0$ si $i > j$), además $U_{i,i} = d_i$. Dichas matrices **T** y **U** se pueden construir mediante un proceso iterativo [Horn, 1990]:
Primero se toma un autovector $\mathbf{x}_1$, es decir tal que $\mathbf{A}\,\mathbf{x}_1 = d_1\,\mathbf{x}_1$, y la matriz $\mathbf{U}_1 = [\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n]$, de manera tal que el sistema $\{ \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n \}$ sea ortogonal, sabemos que d_1 es un número real por lo señalado anteriormente y entonces $\mathbf{A}\,\mathbf{U}_1 = [d_1\,\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2', \ldots, \mathbf{y}_n']$, o sea

$$\mathbf{U}_1^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} d_1 & [\mathbf{*}] \\ [\mathbf{0}] & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix}$$

donde $d_2, \ldots, d_n$ son los autovalores de $\mathbf{A}_1$, de $(n-1) \times (n-1)$, el proceso continua con $\mathbf{V}_2$ como

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 & [\ \mathbf{0}\ ] \\ [\mathbf{0}] & \mathbf{U}_2 \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$\mathbf{V}_2^T\,\mathbf{U}_1^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{U}_1\,\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & * \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} * \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \mathbf{0} \end{vmatrix} & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$$

Luego de n pasos se llega a $\mathbf{T} = \mathbf{U}_1\,\mathbf{V}_2 \ldots$, pero además $\mathbf{U}^T = (\mathbf{T}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{T})^T = (\mathbf{AT})^T\,\mathbf{T} = \mathbf{T}^T\,\mathbf{A}\,\mathbf{T} = \mathbf{U}$, es decir que **U** es a su vez diagonal. En otras palabras toda matriz simétrica **S** es diagonalizable.

Resultados: La geometría y la física de los movimientos

Movimientos en el plano

Vamos a recordar en primer lugar los movimientos que puede tener un vector en R^2, movimientos en el plano, en función de un parámetro que para visualizarlo mejor podemos pensarlo como el tiempo. Es decir se tiene un vector $\mathbf{h} = (h^1, h^2) = h^1\,\mathbf{e}_1 + h^2\,\mathbf{e}_2$, donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es la base canónica y las funciones h^i (i = 1, 2) son funciones C^1 de un parámetro t, queremos interpretar la evolución de **h** con t en R^2 si la parte lineal de su evolución con t se puede escribir:

$$\mathbf{h}(t + dt) \cong \mathbf{L}(t, dt) = \mathbf{h}(t) + \mathbf{M}\,\mathbf{h}(t)\,dt \qquad (1)$$

Es decir **h**(t) obedece la ecuación diferencial

$$\mathbf{h}'(t) = \mathbf{M}\,\mathbf{h}(t) \qquad (2)$$

Si **M** = **S** es una matriz simétrica, que significa dicho movimiento en términos del vector **h**, mediante un cambio de coordenadas ortogonal **T** se puede transformar **S** en $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\,\mathbf{S}\,\mathbf{T}$ una matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

y dado que la traza es invariante ante dicho cambio se tiene que Traza (**D**) = Traza (**S**)
Si consideramos un paralelogramo de lados $\mathbf{g}(t) = \mathbf{T}\,\mathbf{h}(t) = (g^1(t), g^2(t))$, que evoluciona con t y cuya superficie es $A(t) = g^1(t)\,g^2(t)$ y queda $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{D}\,\mathbf{g}(t)$ y la derivada de la superficie es

$$A'(t) = \sum_{i=1}^{2} d_i\,A(t) = \mathrm{Traza}(\mathbf{S})\,A(t) \qquad (4)$$

Por lo tanto la traza de **S** en la ecuación (1) mide la tasa de cambio asociado una deformación uniforme de la superficie del paralelogramo.
Para interpretar que sucede si en las ecuaciones (1) y (2) se tiene una matriz antisimétrica, $\mathbf{M} = \mathbf{R}_3$. Es decir:

$$\mathbf{h}(t + dt) \cong \mathbf{L}(t, dt) = \mathbf{h}(t) + \mathbf{R}_3\,\mathbf{h}(t)\,dt \qquad (5)$$

donde

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 \\ \omega^3 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

es decir

$$\mathbf{L}(t, dt) = \begin{pmatrix} 1 & -\omega^3\, dt \\ \omega^3\, dt & 1 \end{pmatrix} \mathbf{h}(t) \qquad (7)$$

Hora consideremos la rotación un ángulo $\phi^3 = \omega^3$ dt alrededor del eje $\mathbf{e}_3$, donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es la base canónica de R^3, o sea:

$$\mathbf{h}(t + dt) = \begin{pmatrix} \cos\phi^3 & -\text{sen}\,\phi^3 \\ \text{sen}\,\phi^3 & \cos\phi^3 \end{pmatrix} \mathbf{h}(t) \qquad (8)$$

Teniendo en cuenta las partes lineales las funciones involucradas: $\cos\phi^3 \cong 1$, $\text{sen}\,\phi^3 \cong \phi^3 = \omega^3$ dt, resulta que la parte lineal de la ecuación (8) coincide con (5), en otras palabras, las partes lineales de los movimientos expresados por las ecuaciones (1) y (2), en caso que la matriz **M** sea antisimétrica, representan una rotación definida a través de la ecuación (8). Además si definimos el vector velocidad angular en R^3 como $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega^3)$, se ve que la velocidad de giro es $\mathbf{h}'(t) = \mathbf{R}_3\, \mathbf{h}(t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{h}(t)$, y se puede comprobar que $\boldsymbol{\omega} = ½\, \mathbf{rot}\, (\mathbf{R}\, \mathbf{h}(t))$.

Movimientos en el espacio

Ahora queremos extender los resultados, obtenidos en R^2, a R^3, entonces queremos estudiar los movimientos que puede tener un vector en el espacio, en función del parámetro t. En otras palabras, dado el vector $\mathbf{h} = (h^1, h^2, h^3) = h^1\, \mathbf{e}_1 + h^2\, \mathbf{e}_2 + h^3\, \mathbf{e}_3$, donde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es la base canónica y las funciones h^i (i = 1, 2, 3) son funciones C^1 de t, queremos interpretar la evolución de **h** con t en R^3 si la parte lineal de su evolución con t se puede escribir:

$$\mathbf{h}(t + dt) \cong \mathbf{L}(t, dt) = \mathbf{h}(t) + \mathbf{M}\, \mathbf{h}(t)\, dt \qquad (9)$$

Es decir **h**(t) obedece la ecuación diferencial

$$\mathbf{h}'(t) = \mathbf{M}\, \mathbf{h}(t) \qquad (10)$$

Si **M** es una matriz simétrica **S**, que significa dicho movimiento en términos del vector **h**, mediante un cambio de coordenadas a través de una matriz ortogonal **T**, se tiene $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\, \mathbf{S}\, \mathbf{T}$, es decir **S** se puede transformar en una matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

y dado que la traza es invariante ante dicho cambio se tiene que Traza (**D**) = Traza (**S**)
Si $\mathbf{g}(t) = \mathbf{T}\, \mathbf{h}(t) = (g^1(t), g^2(t), g^3(t))$, el volumen $V(t) = g^1(t)\, g^2(t)\, g^3(t)$ del paralelepípedo cuyos lados son $g^1(t)\, \mathbf{e}_1$, $g^2(t)\, \mathbf{e}_2$, $g^3(t)\, \mathbf{e}_3$, evoluciona con t de acuerdo a (9) y (10) donde queda $\mathbf{g}'(t) = \mathbf{D}\, \mathbf{g}(t)$ y la derivada del volumen es

$$V'(t) = \sum_{i=1}^{3} d_i\, V(t) = \text{Traza}(\mathbf{S})\, V(t) \qquad (12)$$

Por lo tanto la traza de **S** en la ecuación (1) mide la tasa de cambio asociado una deformación uniforme del volumen del paralelepípedo, como se muestra en la Figura 1.

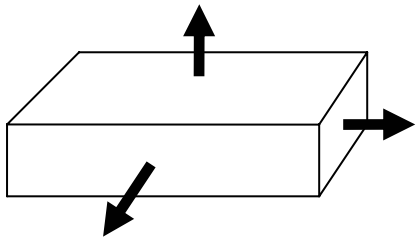

Figura 1. Deformación del volumen del paralelepípedo de lados $g^1\,\mathbf{e}_1$, $g^2\,\mathbf{e}_2$, $g^3\,\mathbf{e}_3$

Ahora queremos interpretar que sucede si en las ecuaciones (9) y (10) **M** es una matriz antisimétrica, que podemos escribir como:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

El caso particular en que $\mathbf{M} = \mathbf{R}_3$, donde

$$\mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & 0 \\ \omega^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

vimos que se puede pensar como una rotación un ángulo $\phi^3 = \omega^3$ t alrededor del eje $\mathbf{e}_3$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es la base canónica. Es decir:

$$\mathbf{h}(t + dt) \cong \mathbf{L}(t, dt) = \mathbf{h}(t) + \mathbf{R}_3\,\mathbf{h}(t)\,dt \tag{15}$$

A su vez podemos definir el vector velocidad angular alrededor del eje x^3 como $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega^3)$, y comprobar que la velocidad de giro es $\mathbf{h}'(t) = \mathbf{R}_3\,\mathbf{h}(t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{h}(t)$.
Que pasa si consideramos una rotación genérica cuyo vector velocidad angular es $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$, por lo que ya vimos sabemos que un giro $\phi^3 = \omega^3$ dt alrededor del eje x^3, seguido de un giro $\phi^2 = \omega^2$ dt alrededor del eje x^2, y seguido por un giro $\phi^3 = \omega^3$ dt alrededor el eje x^1, [Goldstein 1970] tendrán sus respectivas partes lineales como $\mathbf{I} + \mathbf{R}_i$ dt, con i = 1, 2, 3, donde

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^1 \\ 0 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Ahora si aproximamos una rotación genérica como el producto $(\mathbf{I} + \mathbf{R}_3\,dt)\,(\mathbf{I} + \mathbf{R}_2\,dt)\,(\mathbf{I} + \mathbf{R}_3\,dt)$, su parte lineal quedará $\mathbf{I} + (\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3)$. Esta última expresión tiene como parte lineal $\mathbf{I} + \mathbf{R}\,dt$, donde $\mathbf{R} = \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3$, entonces, de acuerdo a (9), (10) y (13) vemos que $\mathbf{M} = \mathbf{R}$, lo que permite interpretar el movimiento, en el caso de una matriz antisimétrica **M** cualquiera, como una rotación alrededor del un eje $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ como se muestra en la Figura 2. Además a partir del vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, la velocidad es $\mathbf{h}'(t) = \mathbf{R}\,\mathbf{h}(t) = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{h}(t)$ y se puede comprobar que $\boldsymbol{\omega} = ½\,\mathbf{rot}\,(\mathbf{R}\,\mathbf{h}(t))$.

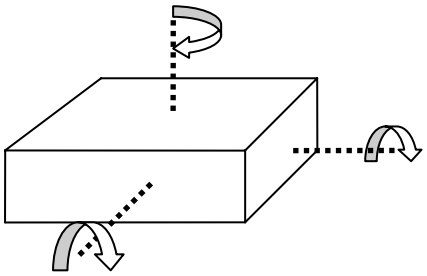

Figura 2. Rotación, con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$, del paralelepípedo definido por **h**

Conclusiones: El análisis de las funciones de varias variables
Las variaciones locales de un campo vectorial diferenciable

Se trata de estudiar las tasas de cambio de magnitudes en más de una dimensión, es decir, buscar un sustituto razonable de la derivada, que es el concepto esencial para estudiar variaciones de magnitudes unidimensionales.
Si bien existen muchas posibilidades a priori de encontrar esta sustitución a la derivada, algunas resultan más naturales y mas útiles, desde el punto de vista de las movimientos locales y sus aplicaciones.
Vamos a considerar el campo vectorial en R^3

$$\mathbf{A}(x^1, x^2, x^3) = A_1(x^1, x^2, x^3)\,\mathbf{e}_1 + A_2(x^1, x^2, x^3)\,\mathbf{e}_2 + A_3(x^1, x^2, x^3)\,\mathbf{e}_3 \qquad (17)$$

Para que resulte más intuitivo puede suponerse que **A** es, por ejemplo, el campo de velocidades de un fluido en estado estacionario, es decir, en cada punto $(x^1, x^2, x^3) \in R^3$ se tiene pues el vector velocidad $\mathbf{A}(x^1, x^2, x^3)$. Supongamos que Ω es una región acotada de R^3. ¿ Cómo cambia el volumen de Ω al desplazarse por el fluido? ¿Hay giros en dicho movimiento?
Vamos a suponer una regularidad suficiente de la función **A** de R^3 en R^3 que define el campo; específicamente supondremos que todas las derivadas primeras de **A** existen y son continuas.
Usando el teorema de Taylor [Alonso, 1995], escribimos:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{h} + o(\,|\mathbf{h}|^2\,) \qquad \text{cuando } \mathbf{h} \to \mathbf{0} \qquad (18)$$

Donde se abrevió $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $\mathbf{h} = (h^1, h^2, h^3)$ y $\mathbf{J}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})$ es el jacobiano de **A** en el punto **x**. Si $|\mathbf{h}|$, la norma del vector **h**, es suficientemente pequeña se puede tomar la parte lineal como valor aproximado de $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ el término

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{h} \qquad (19)$$

Traslación: El primer sumando representa una traslación. Empleando la notación $\partial A_i / \partial x^k = \partial^k A_i$, el segundo sumando escrito en detalle es:

$$\mathbf{J}\,\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \partial^1 A_1 & \partial^2 A_1 & \partial^3 A_1 \\ \partial^1 A_2 & \partial^2 A_2 & \partial^3 A_2 \\ \partial^1 A_3 & \partial^2 A_3 & \partial^3 A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ h^2 \\ h^3 \end{pmatrix} = \mathbf{U}\,\mathbf{h} \qquad (20)$$

Consideremos la parte simétrica y antisimétrica de U, es decir,

$$\mathbf{S} = ½\,(\mathbf{U} + \mathbf{U}^T) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{R} = ½\,(\mathbf{U} - \mathbf{U}^T) \qquad (21)$$

respectivamente; donde $\mathbf{U}^T$ denota la matriz traspuesta de **U**. De manera que la parte lineal de **A**(**x**+**h**) dado por (19) se puede expresar como

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}\,\mathbf{h} + \mathbf{R}\,\mathbf{h} \tag{22}$$

Dilatación - compresión: Respecto a la parte simétrica, el término **S h**, corresponde a

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \partial^1 A_1 & \tfrac{1}{2}\left(\partial^2 A_1 + \partial^1 A_2\right) & \tfrac{1}{2}\left(\partial^3 A_1 + \partial^1 A_3\right) \\ \tfrac{1}{2}\left(\partial^2 A_1 + \partial^1 A_2\right) & \partial^2 A_2 & \tfrac{1}{2}\left(\partial^3 A_2 + \partial^2 A_3\right) \\ \tfrac{1}{2}\left(\partial^3 A_1 + \partial^1 A_3\right) & \tfrac{1}{2}\left(\partial^3 A_2 + \partial^2 A_3\right) & \partial^3 A_3 \end{pmatrix} \tag{23}$$

Vemos que

$$\text{Traza}\,(\mathbf{S}) = \partial^1 A_1 + \partial^2 A_2 + \partial^3 A_3 = \text{div}\,\mathbf{A} \tag{24}$$

Recordando lo expresado en los puntos anteriores **S h**, dado en las ecuaciones (22) y (24), nos dice que la divergencia del campo **A** representa la tasa de cambio asociado una deformación uniforme del volumen del paralelepípedo definido por **h**.
Rotación: Respecto a la parte antisimétrica, el término **R h**, corresponde a

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 & \tfrac{1}{2}\left(\partial^2 A_1 - \partial^1 A_2\right) & \tfrac{1}{2}\left(\partial^3 A_1 - \partial^1 A_3\right) \\ -\tfrac{1}{2}\left(\partial^2 A_1 - \partial^1 A_2\right) & 0 & \tfrac{1}{2}\left(\partial^3 A_2 - \partial^2 A_3\right) \\ -\tfrac{1}{2}\left(\partial^3 A_1 - \partial^1 A_3\right) & -\tfrac{1}{2}\left(\partial^2 A_2 - \partial^2 A_3\right) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

donde el vector $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ es precisamente el rotor del campo **A**, es decir

$$\text{rot}\,\mathbf{A} = \boldsymbol{\omega} \tag{16}$$

Por lo tanto un campo vectorial diferenciable en R^3 se puede descomponer localmente en una traslación, una dilatación y un giro, donde la dilatación local está asociada a la divergencia del campo y el giro local a la rotación del mismo.

Referencias Bibliográficas

Alonso, I.P. “Primer curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales”. Ed. Addison – Wesley, Delaware, EUA, 1995.
Crowe, M.J. “A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system”. Ed. Dover Publications, New York, EUA, 1994.
Goldstein, H. “Mecánica Clásica”. Ed. Aguilar, Madrid, 1970.
Horn, R.A.; Johnson, C.R. “Matrix Analysis”. Ed. Cambridge University Press, Londres, Reino Unido, 1990.
Punte, Graciela; San marco, Enrique, Tisera, Delicia, C. “Diseño y puesta en marcha de un espacio interdisciplinar para alumnos de primer año”. XXI Congreso Chileno de Educación en Ingeniería. Santiago de Chile. 2008.
Santaló, Luis A. “Vectores y tensores con sus aplicaciones”. Ed. EUDEBA, Buenos Aires, 1970.
Tisera, Delicia C.; Tolosa, Eduardo. “Un ejemplo sobre la búsqueda de un enfoque interdisciplinairo, la visión de diferenciales en cursos de matemáticas y de ciencias experimentales”, XIII EMCI (V Congreso Internacional de Matemática en la Ingeniería), 2007a.
Tisera, Delicia C.; Tolosa, Eduardo; Vicente, José L. “Sistemas auto oscilantes: propuesta de un proyecto integrador como corolario de las asignaturas de ciencias básicas”, XIII EMCI (V Congreso Internacional de Matemática en la Ingeniería), 2007b.

Tisera, Delicia C. “Cuadrados mínimos como experiencia de articulación en ingeniería”. XIV EMCI (VI Congreso Internacional de enseñanza de la Matemática en Ingeniería), 2008.
Tisera, Delicia C. “La enseñanza para la comprensión con nuevas tecnologías: Una experiencia con talleres destinados a docentes de Ciencias Básicas. XV EMCI (VII Congreso Internacional de enseñanza de la Matemática en Ingeniería), 2009.