ERRORES Y DIFICULTADES EN LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS DE LOS INGRESANTES A LA FACULTAD DE INGENIERÍA.

Héctor R. Tarifa
Facultad de Ingeniería – Universidad Nacional de Jujuy – Argentina
hart969@hotmail.com
Investigación Educativa
Palabras Claves: Errores. Dificultades. Ingresantes. Matemática.

Resumen:

En la enseñanza de la matemática, conocer aquellos aspectos que generan más dificultades contribuye a mejorar las estrategias a realizar en el acto educativo y así lograr aprendizajes significativos. Esto implica la necesidad de detectar y analizar los errores de los alumnos en sus producciones. En este trabajo se presenta el estudio realizado de los errores observados en 405 evaluaciones del Curso de Nivelación incorporado al Sistema de Ingreso de la Facultad de Ingeniería de la U.N.Ju. Se detectaron errores debido a datos mal utilizados, interpretación incorrecta del lenguaje matemático, teoremas y definiciones deformados, errores técnicos, entre otros.

1.- Introducción

En la actualidad algunas teorías revalorizan el papel del error en el proceso de enseñanza–aprendizaje, admitiendo en primer lugar a este como parte constituyente en la adquisición y construcción del conocimiento y en segundo lugar estableciendo que los errores surgen en un marco conceptual consistente basados en conocimientos adquiridos previamente. Por último postulan que toda teoría que tenga por objetivo la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos debe modificar la tendencia a culpabilizar a los estudiantes por los errores cometidos y reemplazar esta actitud por la prevención y su consideración en el proceso educativo.

Existen distintas posturas respecto a cómo tratar y trabajar el error, algunas apuntan a enfoques en los que se busca explotar los errores para generar nuevas cuestiones y exploraciones, o bien usar el error como punto de partida para la indagación en matemática. Un punto de vista muy conocido actualmente es el que surge del constructivismo y relaciona el diagnóstico de las dificultades de aprendizaje con las sugerencias para remediarlas.

De acuerdo con la postura constructivista los errores son una fuente de información para el profesor acerca de lo que han aprendido los estudiantes y de cómo lo han aprendido. El error no es simplemente el efecto de la ignorancia, la incertidumbre, del descuido o del azar, sino todo lo contrario, es la consecuencia de un conocimiento anterior que tenía su eficacia, su éxito pero que ahora se revela insuficiente o inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, pueden llegar a constituir verdaderos obstáculos en el aprendizaje.

Otro punto importante que puede destacarse desde el constructivismo es que el análisis de los errores puede resultar muy interesante ya que puede revelar la existencia de dificultades individuales que están relacionadas con aprendizajes incorrectos instalados y consolidados y que la enseñanza práctica no tiene en cuenta. Cuando el análisis está realizado por el alumno se vuelve una ayuda para progresar en el aprendizaje de los conceptos y cuando está realizado por el docente en una ayuda para la planificación de una enseñanza más eficaz.

En este trabajo se presentan los resultados generales obtenidos luego de haber determinado y clasificado los errores cometidos por los alumnos al resolver la evaluación del Curso de Nivelación incorporado al Sistema de Ingreso de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy, en los temas: ecuación de la recta, sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, expresiones algebraicas enteras y racionales.

Se pretende colaborar con la tarea docente describiendo las dificultades y errores cometidos por los ingresantes, es por ello que se presenta también parte del análisis efectuado con los errores detectados.

El instrumento evaluativo fue estructurado en dos partes. La primera incluía ítems de respuestas cerradas reduciendo así la subjetividad en el instrumento a la vez que se facilita la corrección (405 evaluaciones) y evaluación de un amplio temario. La segunda parte, motivo del análisis del presente trabajo, es una prueba semi–estructurada ya que constó de ítems de respuesta restringida.

2.- Fundamentación

La tarea del profesor es dirigir y guiar el desarrollo de ideas en las mentes de sus estudiantes, por ello es importante que conozca qué es lo que sus estudiantes piensan cuando desarrollan las tareas de matemática que les propone.

Los procesos mentales no son visibles, sólo es posible conjeturar su ocurrencia a través de manifestaciones indirectas. Los errores cometidos por los alumnos al desarrollar sus tareas matemáticas, la regularidad con que éstos aparecen, los patrones comunes a los que obedecen, son algunos de los elementos que permiten hacer inferencias de estos procesos mentales y de las estructuras en las que se van organizando los conocimientos.

En el proceso de construcción del conocimiento matemático aparecen sistemáticamente errores, por lo tanto dicho proceso debe incluir criterios de diagnóstico, corrección y superación de estos errores mediante actividades que promuevan la crítica sobre las propias producciones.

El análisis de errores tiene un doble interés ya que sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza–aprendizaje de las matemáticas insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades y también contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos.

Analizar las dificultades del aprendizaje de las matemáticas en términos de prevención y remedio supone combinar estrategias generales y específicas a largo plazo con estrategias particulares e inmediatas.

La prevención cuyo objetivo es minimizar el efecto de los errores debe estar orientada de manera general por los distintos tópicos en los que se pueden agrupar las dificultades detectadas.

Las estrategias de remedio vienen determinadas por el diagnóstico inicial del error y por el posicionamiento del profesor. Situado en un paradigma conductista el remedio consiste en solicitar al alumno que olvide un concepto o procedimiento erróneo y facilitarle, con ejemplos adecuados, una buena definición del concepto y los procedimientos correctos, de esta forma el alumno subsanará el error.

Si el punto de vista del profesor es cognitivista, se postula que el error lo ha construido el alumno y por lo tanto es una estructura cognitiva del mismo. La estrategia de remedio pasa porque el alumno modifique esa estructura errónea y la sustituya por la correcta. Las actividades que debe proponer el docente son aquellas que logren un conflicto cognitivo y desestabilice esa estructura errónea.

Finalmente, los errores y dificultades pueden emplearse como elementos de reflexión e instrumentos de motivación para que los jóvenes tomen conciencia que éstos pueden ayudar a progresar en el estudio de las matemáticas, puesto que se puede tomar el error o la dificultad como punto de partida para hacer exploraciones matemáticas creativas con ellos.

3.- Marco Teórico

3.1.- Las Dificultades

"Las dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores (Socas 1.997)".

Si se acepta que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas es de diversa índole, éstas pueden ser agrupadas en las siguientes categorías.

a) Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas

El lenguaje de las matemáticas opera en dos niveles, el nivel semántico de carácter estático donde los objetos matemáticos son vistos como una entidad conceptual (estatus conceptual) y el nivel sintáctico de carácter dinámico donde los objetos son vistos como proceso (estatus operacional).

A nivel conceptual, uno de los problemas nace de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos. En el lenguaje habitual el significado de lo que se quiere expresar puede ser comunicado aunque se cometan rupturas de reglas gramaticales o errores de ortografía, sin embargo el lenguaje de las matemáticas es más preciso ya que está sometido a reglas más estrictas y no comunica su significado salvo por la interpretación exacta de sus signos.

Otro de los problemas en el lenguaje de las matemáticas es el producido por las confusiones semánticas, palabras como raíz, potencia, matriz, primo, factor, semejante, índice, función, etc. tienen significados diferentes en matemáticas y en el lenguaje habitual.

Un tercer problema es que existen palabras específicamente matemáticas como por ejemplo hipotenusa, paralelogramo, coeficiente, isósceles, divisor, múltiplo, etc. que por ser poco familiares suelen provocar serias dificultades a los alumnos ya que éstos sólo se encuentran con ellas en las clases de matemáticas.

Otro aspecto del lenguaje de las matemáticas que difiere de la lengua común es la sintaxis. Esto pertenece a lo que se denomina la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos, entendiéndose esta naturaleza como un proceso de abstracción, caracterizado por diferentes etapas.

Se puede observar cómo los objetos de las matemáticas se presentan bajo una aparente dicotomía con estatus diferentes, el conceptual y el operacional, ambos constituyen los dos aspectos integrantes de un mismo objeto y ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de estos objetos.

b) Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

La matemática por trabajar con entes ideales (formales) y establecer relaciones entre ellos es considerada una ciencia formal, precisamente porque sus objetos de estudio no son cosas ni procesos, sino "formas" en las que se puede volcar un número ilimitado de contenidos. El método por el cual se demuestra la veracidad de las relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos es deductivo.

Por lo tanto, siempre se ha considerado como una de las principales dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, el aspecto deductivo formal de ésta.

En muchos casos se considera beneficioso dejar de lado algunas demostraciones formales en pos de una aplicación más instrumental de las reglas matemáticas, pero esto no debe implicar el abandono del pensamiento lógico, es decir la capacidad para seguir un argumento lógico.

El pensamiento lógico debe estar presente en todas las actividades matemáticas, esta capacidad no debe contraponerse a los métodos intuitivos, a las conjeturas, a los ejemplos y contraejemplos, sino todo lo contrario, puede ser desarrollado con la práctica de estos métodos informales.

Existen dificultades que son provocadas por las distintas rupturas en los modos de pensamiento matemático. Los modelos matemáticos producidos por un conocimiento sirven para resolver una variedad de problemas, pero también se pueden convertir en dificultades para un saber matemático nuevo.

Se puede hacer referencia, como ejemplos, a dos importantes rupturas que se dan en relación con los modos de pensamiento matemático: el modelo aditivo que crea dificultades a los modelos multiplicativo y lineal, y este último a su vez crea dificultades a otros modelos.

c) Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza tienen que ver con tres dimensiones íntimamente relacionadas e influenciadas unas con otras: la institución escolar, el currículo de matemática y los métodos de enseñanza.

Actualmente pensar la enseñanza de las matemáticas en la escuela es vincular esta disciplina con la resolución de problemas. Esto no es suficiente para caracterizar todo el trabajo que se despliega.

En primer lugar, se debe señalar que no existe una única concepción de problema en la enseñanza de las matemáticas. Se puede pensar en los problemas como oportunidades para que los alumnos apliquen aquello que ya aprendieron, o como gestores del sentido de un concepto tanto en las primeras interacciones del alumno con el concepto como en situaciones en las que ya existe cierto grado de familiarización con el mismo. En la primera postura, el problema cumple una función de evaluación y control del aprendizaje mientras que en la segunda, trata de enriquecer el sentido del mismo a partir de encontrarlo como medio de solución en un nuevo contexto.

En segundo lugar, hay que considerar que al enseñar matemáticas se está transmitiendo no sólo un conjunto de conceptos sino también un cierto modo de pensar y producir. Si no se generan situaciones que hagan posible la explicitación de los procedimientos, éstos adquirirán las características de los aprendizajes espontáneos y dificultarán la posibilidad de reutilización por parte de los estudiantes.

Éstas son simplemente dos cuestiones que se pueden abordar desde la compleja óptica institucional.

La forma en la que se organiza el currículo de matemáticas también puede generar diferentes dificultades. Se puede considerar, cuatro elementos básicos como dificultades en el currículo de matemáticas: las habilidades necesarias para desarrollar las capacidades matemáticas que definen la competencia de un alumno en esta disciplina, la necesidad de contenidos anteriores, el nivel de abstracción requerido y la naturaleza lógica de las matemáticas escolares.

La ultima dimensión que debe estar vinculada tanto a los elementos organizativos de la institución escolar como a la organización curricular son los métodos de enseñanza. Varios son los aspectos a considerar en este caso, por ejemplo, el lenguaje que debe estar adaptado a las capacidades y comprensión de los alumnos, la secuenciación de unidades de aprendizaje que tiene que estar adaptada a la lógica interna de las matemáticas, el respeto a las individualidades que tiene que ver con los ritmos de trabajo en clase, los recursos y las representaciones adecuadas.

d) Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos

Conocer los estadios del desarrollo intelectual, es una información que tienen un doble interés para los docentes porque permiten conocer el nivel de dificultades, realizaciones y respuestas a cuestiones esperadas de los alumnos y a la hora de diseñar los materiales de enseñanza indican los modos característico de razonamiento y las tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer.

Existen diferentes enfoques que se pueden considerar para el aprendizaje de las matemáticas, el enfoque jerárquico del aprendizaje, el evolutivo, el estructuralista, el constructivista, y el enfoque del procesamiento de la información, entre otros muchos.

Otros enfoques están centrados en criterios que van más allá de la adquisición de aptitudes para el cálculo práctico. Son los enfoques conceptuales de la pedagogía de la matemática, cuyo objetivo es determinar cuál es la mejor manera de enseñar los conceptos y principios que aportan coherencia al contenido de las matemáticas, es decir las estructuras matemáticas. El análisis psicológico de estos enfoques se centra en cómo comprenden las personas estos conceptos, cómo los utilizan, cómo los aprenden y en los métodos para la enseñanza de las relaciones y estructuras complejas que conforman el conocimiento matemático.

Todo intento de enseñar las estructuras matemáticas debe tener en cuenta la capacidad intelectual del aprendizaje, esto lleva a considerar las características de los procesos de pensamiento de las personas, procesos que les permite aprehender las estructuras matemáticas y pensar de forma matemática. Las definiciones de estructura psicológica se pueden derivar de distintas teorías, por ejemplo de la Gestalt, de la de Piaget y de las ideas de la aplicación del procesamiento de la información al estudio de los procesos cognitivos.

e) Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales

La matemática produce diversos y dispares sentimientos en los alumnos, en muchos produce por ejemplo tensión, ansiedad y miedo. Ansiedad por acabar una tarea, miedo al fracaso, a la equivocación, etc. que generan bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática y un rechazo hacia esta disciplina.

Sin lugar a dudas muchos son los aspectos que influyen en este rechazo, por ejemplo la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, las características mismas de la matemática, la actitud de los profesores

de matemática hacia los alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las matemáticas que son transmitidas a los estudiantes.

La naturaleza jerárquica del conocimiento matemático le confiere a la misma disciplina un carácter acumulativo que se ve acentuado por una presentación moderna y más estructurada.

La matemática posee propiedades superlativas que, a pesar de ser tan abierta a la creación intelectual, la convierte en una especie de fortaleza de muy difícil acceso. Esta ciencia es la más abstracta de las actividades mentales, la más virtual respecto de lo concreto. Es la más esquemática por sus figuras, sus diagramas y sus algoritmos; la más sistemática y organizada de forma hipotética deductiva a partir de axiomas que definen su estructura.

3.2.- Las investigaciones sobre los errores

La mayoría de los autores consideran que los errores no tienen un carácter accidental sino que surgen por las estrategias y reglas personales que los alumnos emplean en la resolución de situaciones problemáticas y son consecuencias de las experiencias anteriores en matemáticas.

Cuatro son las principales líneas en torno a las cuales se articulan los estudios e investigaciones relativos a errores en el aprendizaje de las matemáticas.

En la primera línea se agrupan los trabajos relativos al análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican y clasificación de los errores detectados.

A estos trabajos se los pueden ver desde dos ópticas, los que están relacionados con alguna teoría psicológica o psicopedagógica en las que encuentran un marco explicativo y los trabajos que tratan de establecer las causas estructurales para los errores debido a la propia naturaleza del conocimiento matemático con exclusividad sobre cualquier otro argumento.

Enmarcada en la óptica anterior está la categorización de los errores que se utilizó en el presente trabajo de investigación y que fue elaborada por Movshovitz–Hadar, Zaslavksy e Inbar, estos autores realizan una clasificación empírica de los errores cometidos por los alumnos de secundaria sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los estudiantes.

De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores detectados.

Datos mal utilizados. Si existe diferencia entre los datos que aparecen en una situación y el tratamiento que le dio el alumno, se produce este tipo de error. Aquí se encuentran los casos en los que se añaden datos extraños, se olvida algún dato para la solución, se contesta algo que no es necesario, se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado, se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

Interpretación incorrecta del lenguaje. Este tipo de errores se produce cuando se realiza una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre cuando el alumno, ante un problema, expresa una relación distinta a la enunciada, cuando se designa un concepto matemático mediante un símbolo distinto del usual y se opera con él según las reglas usuales o cuando se hace una interpretación incorrecta de símbolos gráficos como términos matemáticos y viceversa.

Inferencias no válidas lógicamente. Estos errores no se deben al contenido específico de matemática sino que se producen por falacias en el razonamiento. Se incluyen aquí, por ejemplo, concluir un enunciado en el que el consecuente no se deriva necesariamente del antecedente o realizar saltos injustificados en una inferencia lógica.

Teoremas o definiciones deformados. En esta categoría se incluyen aquellos errores producidos por la deformación de un principio, regla o definición conocidos. Se producen por la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias, aplicar la propiedad distributiva a una función no lineal, realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición, teorema o fórmula conocidos.

Falta de verificación en la solución. Aquí los errores se producen por que el estudiante no verificó la solución encontrada con el enunciado de la situación, cada paso de la resolución es correcto pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.

Errores técnicos. Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y los que se derivan de la ejecución de algoritmos básicos.

En la segunda línea de investigación se encuentran los estudios dedicados al tratamiento curricular de los errores en el aprendizaje de las matemáticas. Estos trabajos están orientados a la organización didáctica de la enseñanza de las matemáticas que contempla la consideración de los errores como un dato destacable. Un ejemplo de esta línea de trabajo es la enseñanza diagnóstica o por diagnóstico.

También se incluyen en esta línea los trabajos que contemplan los errores como plataformas para incentivar la investigación y el estudio de los contenidos matemáticos. La utilización del error como elemento motivador para la reflexión acerca de la naturaleza de nociones matemáticas puede ser provechosa en un doble sentido: investigar la naturaleza de nociones fundamentales como algoritmo, definición, demostración e investigar cuestiones abstractas relativas a la naturaleza de las matemáticas a las que es difícil acercarse por otra vía.

En la tercera línea de investigación se encuentran los estudios dedicados a determinar qué conviene que aprendan los profesores de matemática en formación con respecto al papel que juegan la observación, el análisis, la interpretación y el tratamiento de los errores que cometen los alumnos al aprender matemáticas en la escuela.

Brousseau y otros autores proporcionan algunas ideas directrices para poder decidir qué deberían aprender los futuros profesores de matemática al observar a los alumnos en su trabajo matemático.

Antes de enseñar a los estudiantes de matemáticas alguna técnica o concepto supuestamente novedoso, es mejor brindarles una oportunidad para ver qué conocen, o lo que pueden inventar o descubrir.

Proporcionar experiencias que influyan considerablemente en las representaciones mentales que los futuros docentes construirán.

El formador de profesores debe conocer las representaciones mentales que sus alumnos emplean antes las distintas situaciones que se les plantean.

Finalmente, también los profesores en formación cometen errores en las tareas matemáticas, muchos de ellos son similares o debidos a las mismas causas que los que cometen los escolares. Es conveniente promover actividades que pongan de manifiesto las concepciones deficientes y aprovechar este tipo de actividades para proponer esquemas de trabajo correctivos y situaciones en las que el conflicto cognitivo obligue a una reestructuración positiva de los esquemas previos.

En la cuarta y última línea de investigación se incluyen los trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clases de análisis de errores.

Existen una gran variedad de métodos para el estudio de los errores en matemática, los que pueden ser agrupados en cuatro amplias categorías:

Contar simplemente el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas.

Análisis de los tipos de errores cometidos.

Análisis de patrones de error.

Construir problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos.

3.3.- El análisis de datos

El análisis de los datos obtenidos incluyó dos distribuciones de frecuencias para cada ejercicio propuesto en la evaluación del Curso de Nivelación. La primera concerniente a las categorías en las que fue calificado cada ejercicio: No Resuelve, Mal, Regular y Bien. Esta distribución fue acompañada de su correspondiente gráfico.

La segunda distribución de frecuencia que se tuvo en cuenta es la referida a las categorías de los errores cometidos.

4.- Resultados

El siguiente cuadro resume los totales obtenidos en cada categoría en las que fueron calificados los ejercicios de las evaluaciones elaboradas por los ingresantes a la Facultad de Ingeniería.

Calificación / Ejercicio	No Resuelve	Mal	Regular	Bien
4a) Ecuación de la recta	89	219	17	80
4b) Raíz de un polinomio	71	124	67	143
5) Sistema de ecuaciones	35	189	39	142
6) Expresiones algebraicas racionales	43	284	38	40
Totales	238	816	161	405

Cuadro 4.1. Calificación total por ejercicio.

El gráfico correspondiente al cuadro anterior es el siguiente

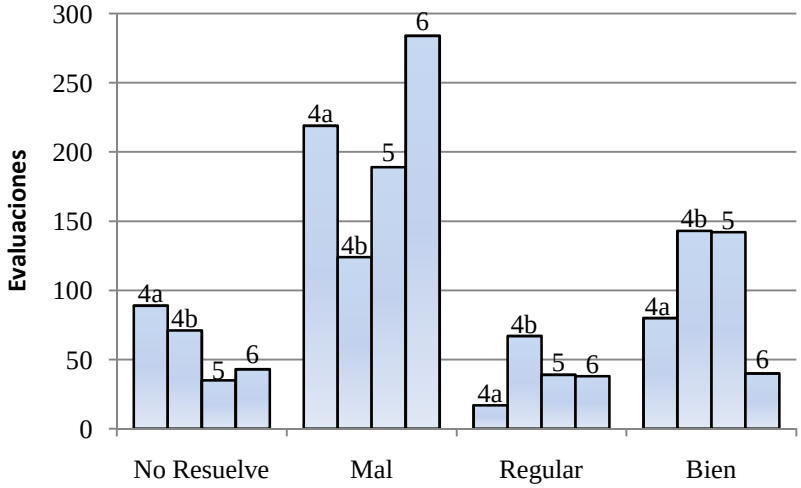

Gráfico 4.1. Frecuencias de las calificaciones totales.

Se presenta a continuación los totales obtenidos para los ejercicios según las categorías en las que fueron calificados los errores detectados.

Ejercicio / Error	Ecuación de la recta	Raíz de un polinomio	Sistema de ecuaciones	Exp Algebraicas racionales	Total
Datos mal utilizados	214	53	148	8	423
Interp. incorrecta del leng. matemático	51	196	129	-.-	376
Teoremas o definiciones deformados	42	5	5	267	319
Errores técnicos	43	167	106	252	568

Cuadro 4.2. Totales por ejercicio y error.

Para cada ejercicio se realizó un análisis más detallado de los errores detectados. Se presenta a continuación parte del mismo referido a sistema ecuaciones.

El ejercicio consistía en determinar gráficamente la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cada una e indicar claramente las coordenadas del punto solución.

Prácticamente el 47% de la población examinada resolvió incorrectamente la situación que se planteó en este ejercicio, mientras que el 35% lo hizo correctamente. El resto se distribuye en las categorías no resuelve y regular.

Se detalla a continuación el análisis de los errores.

Datos mal utilizados

Categorías	Frec. Abs.	Frec. Rel. (%)
Añadir datos extraños	6	4,1
Olvidar algún dato necesario	2	1,3
Responder algo innecesario	27	18,2
Asignar información inconsistente con los datos	6	4,1
Utilizar valores incorrectos para una variable	3	2
Lectura incorrecta del enunciado	104	70,3
Totales	148	100

Cuadro 4.3. Distribución de frecuencias por categorías.

La incorrecta utilización de los datos fue constatada en 36% de la población de análisis.

Los errores más comunes en esta categoría fueron responder algo innecesario y la lectura incorrecta del enunciado. En el primero de los casos el 85% de los que cometieron este tipo de error, además de realizar la representación gráfica del sistema de ecuaciones, determinó la solución del sistema por algún método analítico, sin especificar la razón por la que se hacía dicho procedimiento.

La lectura incorrecta del enunciado ocurrió porque contrariamente a lo solicitado en el ejercicio, el 80% del total de la población que cometió este error, sólo respondió con algún método analítico de resolución, mientras que el restante 20% no indicó claramente las coordenadas del punto solución.

Interpretación incorrecta del lenguaje matemático

Categorías	Frec. Abs.	Frec. Rel. (%)
Expresar una relación distinta a la enunciada	126	97,6
Designar un concepto matemático con un símbolo distinto al usual y operar con él	3	2,4
Totales	129	100

Cuadro 4.4. Distribución de frecuencias por categorías.

Como se puede observar en esta categoría el error más común fue expresar una relación distinta de la enunciada, hecho que ocurrió debido a que se representaban mal las rectas o bien sólo se representaba una de ellas.

La segunda categoría concerniente a este error no representa una cifra significativa en comparación a la cantidad de evaluaciones corregidas.

Todos los errores detectados en esta categoría representan un 32% de la totalidad de los exámenes analizados.

Teoremas o definiciones deformados

Categorías	Frec. Abs.
Mal valoración de un teorema, definición o fórmula conocidos	5
Totales	5

Cuadro 4.5. Distribución de frecuencias por categorías.

En esta categoría, que es el 1% de la población, no se observan cifras significativas en las frecuencias absolutas.

Errores Técnicos

Categorías	Frec. Abs.	Frec. Rel. (%)
Errores de cálculo	15	14,2
Errores al tomar datos de una tabla o gráfico	5	4,7
Errores en la manipulación de símbolos algebraicos	86	81,1
Totales	106	100

Cuadro4.6. Distribución de frecuencias por categorías.

El 26% de la totalidad de la población analizada cometió este tipo de error.

El error técnico más frecuente ocurrió por la manipulación de los símbolos algebraicos. Las situaciones más comunes que pudieron detectarse fueron dos, la incorrecta trasposición de términos y operar en forma inadecuada con la variable. Por ejemplo: $2x–y = –2 \Rightarrow y = –2–2x$ o bien $y = –2–2x \Rightarrow y = –4x$.

5.- Conclusiones

El ejercicio que en mayor porcentaje no se resolvió correctamente fue el referido a expresiones algebraicas racionales y la mayor cantidad de errores cometidos fueron en las categorías teoremas o definiciones deformadas y errores técnicos.

Lo más común fue no diferenciar entre la suma o diferencia de dos cubos y el cubo de una suma o diferencia, considerar que la suma de dos cuadrados se puede expresar de la misma forma que la diferencia de dos cuadrados, considerar que es lo mismo la suma o diferencia de dos cuadrados que el cuadrado de una suma o diferencia, transformar incorrectamente en producto la suma o diferencia de dos potencias de igual grado impar.

Los alumnos suelen modificar una regla o procedimiento para que abarque a una nueva situación, en vez de modificar esta última para poder solucionarla. De esta manera cubren el vacío que existe entre una regla conocida y problemas no familiares. Estos errores se originan por lo tanto, como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente por la falta de linealidad de éstos.

La linealidad describe una manera de trabajar con un objeto que puede descomponerse tratando cada una de sus partes en forma independiente.

Otro ejercicio que tuvo un alto porcentaje en la incorrecta resolución fue el referido a ecuación de la recta, mientras que la mayoría de los errores fueron detectados en la categoría datos mal utilizados. Se observó que dentro de esta categoría de errores el 53% de la población analizada utilizó valores numéricos de una variable para otra distinta.

Es muy probable que el error cometido sea producto del desconocimiento de la condición de perpendicularidad entre rectas, ya que a la recta dada de pendiente –3 se respondió que la pendiente de la recta perpendicular es 3 o 1/3.

Algo a destacar en el uso de valores incorrectos para una variable es que del total de los alumnos que cometieron este error aproximadamente un 20% confundió la ordenada al origen de la recta dada con su pendiente.

El proceso de enseñanza–aprendizaje de las matemáticas está íntimamente ligado a las representaciones de sus conceptos y a menudo el uso no controlado de estas o el no establecimiento de las relaciones entre las mismas representaciones crean problemas en la comprensión de un concepto u objeto matemático. Esta afirmación puede ser corroborada ya que prácticamente el 30% de la población de análisis no pudo establecer correctamente la relación entre los objetos matemáticos en cuestión (perpendicularidad entre las rectas).

Respecto de los errores técnicos, una de las causas por la que podrían estar originados es el hecho de que los estudiantes aplican durante los ocho primeros años de su vida escolar la “adición aritmética” en donde el signo más (+) implica un problema entre dos objetos de la misma clase, que tiene como respuesta otro objeto de la misma clase. Al estudiar algebra, los alumnos se enfrentan con la “adición algebraica” en donde expresiones del tipo 5 + b describen simultáneamente la operación y el resultado mismo.

Como reflexión final se cita la respuesta de Guy Brousseau ante la pregunta ¿cómo superar los errores en el acto educativo?

“[…] para superar un obstáculo se requiere de un esfuerzo de la misma naturaleza que cuando se establece un conocimiento, es decir, interacciones repetidas y dialécticas del alumno con el objeto de su conocimiento. Esta observación es fundamental para distinguir un verdadero problema, es una situación que permite esa dialéctica y que la explica”.

6.- Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. Wernwe, R. Observing Students at Work. En Rico, Luis. “Errores en el aprendizaje de las Matemáticas”. Didáctica de la Matemática. Licenciatura de Matemática. Quinto Curso. Universidad de Granada. España. 1.995.

Kilpratick, Jeremy; Gomez, Pedro; Rico, Luis. “Educación Matemática”. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico. 1.995.

Lazarte, Graciela del C. y otros. “Incipiente Investigación sobre el Sistema de Ingreso a la Facultad de Ingeniería”. Investigaciones en Facultades de Ingeniería del NOA. Tomo I. Enseñanza y Curricula de la Ingeniería. Editorial ECO – FACET.UNT. Tucumán. Argentina. 2.007.

Movshovith – Hadar N., Zaslavsky O., Inbar S. An empirical classification model for errors in High School Mathematics. Journal for Research in Mathematics Educations.

Poggi, Margarita y otros. “Apuntes y Aportes para la Gestión Curricular”. Colección Triángulos Pedagógicos. Editorial Kapeluz. S. A. Buenos Aires. Argentina. 1.995.

Resnick, Lauaren B.; Ford Wendy W. “La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos”. Editorial Paidos. Barcelona. España. 1.990.

Rico Romero, Luis, Castro Encarnación. “La educación matemática en la enseñanza secundaria”. Universidad de Barcelona. Instituto de Ciencias de la Educación. Horsori Editorial. España. 1.997.

Socas Martín M. “Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas”. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. Investigación en Educación Matemática XI. Universidad de Laguna. 2.007.